ANALYTISCHE
GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

VON

GEORGE SALMON

NACH DER FREIEN BEARBEITUNG VON WILHELM FIEDLER

NEU HERAUSGEGEBEN VON

DR. FRIEDRICH DINGELDEY
O. PROFESSOR AN DER TECHN. HOCHSCHULE ZU DARMSTADT

SIEBENTE AUFLAGE

ZWEITER TEIL

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN 191[illegible]

Vorwort.

Bei der Bearbeitung der vorliegenden siebenten Auflage des zweiten Teiles der Salmon-Fiedlerschen Analytischen Geometrie der Kegelschnitte habe ich, verglichen mit der sechsten Auflage, folgende größere Änderungen vorgenommen:

In Nr. 253 und 254 wurden die verschiedenen Sonderfälle der Gleichung dritten Grades, von der die in einem Kegelschnittbüschel enthaltenen Geradenpaare abhängen, genauer betrachtet und besonders der Einfluß der Realität oder der Gleichheit ihrer Wurzeln auf die Art des Büschels und die Beschaffenheit des den Büschelkurven gemeinsamen Polardreiecks dargelegt.

In den Nummern 262 bis 266, 273 und 274 wurden mehrere Beispiele neu aufgenommen, die mir mein verehrter Freund, Herr Geh. Hofrat Professor Dr. K. Rohn in Leipzig, zur Verfügung stellte. Zum Teil stehen sie in enger Beziehung zu zwei Abhandlungen, die Herr Rohn im 16. und 22. Bande des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in den Jahren 1907 bez. 1913 veröffentlichte. Für die Erlaubnis zur Aufnahme in das Buch und für die Überlassung einiger zugehöriger Figuren spreche ich meinen besten Dank aus.

In Nr. 283 wurde die Konstruktion des Kegelschnittes aus projektiven Elementargebilden etwas ausführlicher behandelt.

Nr. 300 der früheren, sechsten Auflage wurde weggelassen, und gleiches gilt von den Beispielen zu Nr. 299 dieser Auflage. Mich leitete hierbei lediglich die Überzeugung, daß diese synthetisch durchgeführten Betrachtungen über Punkt- und Tangenteninvolutionen und über die Involution harmonischer Pole und Polaren nebst zugehörigen Konstruktionen nicht in ein Lehrbuch der analytischen sondern in ein solches der synthetischen Geometrie gehören.

Im 17., 18. und besonders im 19. Kapitel wurde nicht nur die Anordnung des Stoffes sondern auch die Art der Darstellung wesentlich geändert, manches weit ausführlicher behandelt. Ich nenne in dieser Richtung die Betrachtungen über eine gewisse Kombinante und über die harmonischen und äquianharmonischen Kegelschnitte eines Büschels. Nur wenig geändert wurden die Kapitel 20 bis 22.

Frei von Änderungen blieb fast kein Satz des Buches; häufig sind diese nur stilistischer Art, abgesehen von den vorerwähnten größeren Änderungen. Selbstverständlich wurden sämtliche in der früheren Auflage enthaltenen Beispiele durchgerechnet.

Die Literaturnachweisungen habe ich wesentlich vermehrt. Für noch ausführlichere Angaben dieser Art sei verwiesen auf den Bericht von E. Kötter im 5. Bande (1901) des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und auf meinen Artikel über Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme im dritten Bande der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, besonders auf die in den Jahren 1913 und 1915 erschienenen Hefte der französischen Ausgabe dieses Artikels.

Unter den in deutscher Sprache geschriebenen Werken, die die *Büschel und Netze von Kegelschnitten* in analytisch-geometrischer Methode behandeln, sind besonders drei zu erwähnen: Die von F. Lindemann mit Benutzung der Vorträge von A. Clebsch bearbeiteten und herausgegebenen „Vorlesungen über Geometrie", Leipzig 1876 oder 2. Auflage, 1. und 2. Lieferung, Leipzig 1906 bez. 1910, ferner L. Heffter und C. Koehler „Lehrbuch der analytischen Geometrie", 1. Bd., Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene, Leipzig und Berlin 1905 und H. Grassmann „Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt", 2. Bd. Ternäres, 1. Teil, Leipzig und Berlin 1913. An einigen Stellen der Literaturnachweisungen habe ich diese Bücher genannt und hatte noch oft den Wunsch, auf sie hinzuweisen mit Rücksicht auf die in ihnen gegebene Darstellung. Zur Vermeidung häufiger Wiederholungen in den Literaturnachweisungen seien diese Werke, von denen jedes in seiner Eigenart vorzüglich ist, hier ein für allemal genannt und dem Leser empfohlen.

Herrn Dr. Magin in Hamburg, der mir zwei im ersten Teile des Buches stehengebliebene Druckfehler mitteilte, sage ich für diese Freundlichkeit besten Dank.

Darmstadt, den 20. März 1918.

F. Dingeldey.

Inhaltsverzeichnis.

XIV. Kapitel. Nr. 249—278. 37 Beisp.

Lineare Systeme von Kegelschnitten.

XX. Kapitel. Nr. 370—386. 20 Beisp.

Analytische Grundlagen der Metrik.

XXI. Kapitel. Nr. 387—409. 83 Beisp.

Von den reziproken Verwandtschaften.

XXII. Kapitel. Nr. 410—431. 62 Beisp.

Von der Methode der Projektion.

Vierzehntes Kapitel.

Lineare Systeme von Kegelschnitten.

249. **Kegelschnittbüschel.** Nachdem in den fünf vorhergehenden Kapiteln fast durchgängig die Methode der Cartesischen und nur einigemal die der Plückerschen Koordinaten gebraucht worden ist, wiederholen wir nun den Entwickelungsgang des vierten Kapitels an dem mehr umfassenden Gebiet der Gleichungen vom zweiten Grade, um uns dadurch endlich in den vollständigen Besitz der allgemeinen Hilfsmittel und Gesichtspunkte zu setzen, die dort entwickelt worden sind. Dabei tritt wieder zuerst die Anwendbarkeit und der große Nutzen einer *abkürzenden Symbolik*[1]) hervor (Nr. 64),

Wenn wir auch diese Symbole zunächst auf Punktkoordinaten beziehen und demgemäß deuten, so ist zu bemerken. daß ihre Deutung in Linienkoordinaten (Nr. 82) ohne weiteres zu den dualistisch entsprechenden Sätzen der abgeleiteten führt (Nr. 270).

Nach Nr. 129 ist die Angabe eines Punktes der Kurve eine lineare Bedingung zwischen den fünf verfügbaren Konstanten der Gleichung zweiten Grades. Die Angabe von vier Punkten gestattet daher in der allgemeinen Gleichung vier Konstanten durch die fünfte, noch unbestimmt bleibende Konstante und gegebene Größen auszudrücken, mit anderen Worten: *Die Gleichung eines durch vier gegebene Punkte gehenden Kegelschnittes enthält linear eine verfügbare Konstante, einen Parameter.*

Nun können irgend vier reelle oder in Paaren konjugiert imaginäre (Nr. 24) Punkte als die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte von reellen Gleichungen angesehen werden. Wenn wir also für

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

die Abkürzung $f(x, y)$, für

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}$$

die Abkürzung $g(x, y)$ einführen, kann die Gleichung jede Kegelschnittes, der durch die vier Schnittpunkte der Kegel schnitte $f(x, y) = 0$ und $g(x, y) = 0$ hindurchgeht, in de Form

(1) $\quad f(x, y) - \lambda g(x, y) = 0 \quad$ oder kürzer $\quad f - \lambda g = 0$

dargestellt werden. Und umgekehrt definiert jede quadratisch Gleichung, die einen Parameter linear enthält, einen durc vier gegebene Punkte gehenden Kegelschnitt*).

Die Koeffizienten der Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $g(x, y) =$ werden im folgenden stets als *reell* vorausgesetzt.

Gibt man dem Parameter alle möglichen Werte, so bilde die Gesamtheit der Kegelschnitte $f - \lambda g = 0$ *ein Kegelschnit büschel;* die vier Punkte, die allen Kurven des Büschels ge meinsam sind, heißen *seine Grundpunkte. Durch jeden Punk der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels*, denn ein Para meterwert λ' wird dadurch bestimmt, daß die Gleichung durc die Koordinaten x', y' irgend eines fünften Punktes befriedig sein soll.

Sind $\varphi(x, y) = 0$ und $\chi(x, y) = 0$ irgend zwei Kurve des durch $f - \lambda g = 0$ dargestellten Büschels, so läßt sic jeder Kegelschnitt desselben auch durch eine Gleichung vo der Form $\varphi - \mu\chi = 0$ darstellen. Zum Beweis dieses Satze beachte man, daß $\varphi = 0$ und $\chi = 0$ als Gleichungen vo Büschelkurven gleichbedeutend sind etwa mit $f - \lambda_1 g =$ bez. $f - \lambda_2 g = 0$, $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, so daß die *Identitäten* bestehe

(2) $\quad f - \lambda_1 g \equiv \mu_1 \varphi, \quad f - \lambda_2 g \equiv \mu_2 \chi,$

*) In derselben Art enthält die allgemeine Gleichung eines Kege schnittes, der drei Bedingungen unterliegt, zwei unabhängige Kor stanten usw. Die Gleichungen der Orthogonalkreise eines gegebene Kreises (Nr. 121 und 122) und der Kreise durch einen Punkt gebe dazu Beispiele (vgl. Nr. 271 und 302). Aber die Kegelschnittsgleichunge die zwei lineare Parameter enthalten, definieren *nicht* umgekehrt ste Kurven durch drei Punkte.

in denen $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ gewisse Konstanten bezeichnen. Hieraus folgt

$$(\lambda_1 - \lambda_2)f \equiv \lambda_1\mu_2\chi - \lambda_2\mu_1\varphi, \quad (\lambda_1 - \lambda_2)g \equiv \mu_2\chi - \mu_1\varphi$$

und

$$(3) \quad (\lambda_1 - \lambda_2)(f - \lambda g) \equiv \lambda_1\mu_2\chi - \lambda_2\mu_1\varphi - \lambda(\mu_2\chi - \mu_1\varphi),$$

daher ist $f - \lambda g = 0$ in der Tat gleichbedeutend mit

$$(4) \qquad (\lambda - \lambda_2)\mu_1\varphi - (\lambda - \lambda_1)\mu_2\chi = 0$$

oder mit $\varphi - \mu\chi = 0$, wenn $\frac{(\lambda - \lambda_1)\mu_2}{(\lambda - \lambda_2)\mu_1}$ zur Abkürzung durch μ ersetzt wird.

B. Denjenigen Kegelschnitt des Büschels

$$3x^2 - 5xy + 4y^2 - 6x - \lambda(x^2 - 6xy + 3x - 8y - 5) = 0$$

zu bestimmen, der durch den Punkt $x = 2$, $y = 1$ geht.

Man findet $\lambda = \frac{2}{5}$, also

$$5(3x^2 - 5xy + 4y^2 - 6x) - 2(x^2 - 6xy + 3x - 8y - 5) = 0$$

oder $\qquad 13x^2 - 13xy + 20y^2 - 36x + 16y + 10 = 0.$

250. **Polarenbüschel.** Die Gleichung der Polare eines Punktes in bezug auf den Kegelschnitt $f - \lambda g = 0$ enthält nach Nr. 135 den Parameter λ ebenfalls linear. *Daher bilden die Polaren eines Punktes P in bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels selbst ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel P' der zu dem gegebenen Punkt P in bezug auf das Büschel doppelt konjugierte Pol heißt.*

Zunächst erhellt hieraus *die geometrische Bedeutung des Parameters λ* als einer Proportionalzahl zum Sinusteilverhältnis im Polarenbüschel irgend eines Punktes. Sind insbesondere $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ die Tangenten an $f = 0$, $g = 0$ in einem der Grundpunkte, so ist $t_1 - \lambda t_2 = 0$ die Tangente an $f - \lambda g = 0$ in demselben Grundpunkte. Es ist also $f : g = t_1 : t_2 = \lambda$, wenn man in die Funktionen die Koordinaten eines Punktes eingesetzt denkt, durch den die Kurve $f - \lambda g = 0$ geht.

Sind ferner P, P' zwei doppelt konjugierte Pole, so wird ihre Verbindungsgerade durch jeden Kegelschnitt des Büschels in einem zu P, P' harmonischen Punktepaar geschnitten. *Insbesondere hat der durch P gehende Kegelschnitt die Verbindungsgerade von P mit P' als die ihn in P berührende Tangente,*

denn sie ist eine der zu P gehörigen Polaren; ebenso berührt PP' den durch P' gehenden Kegelschnitt in P'.

Umgekehrt liegen in jeder beliebigen Geraden zwei doppelt konjugierte Pole P, P'. Denn ihre Schnittpunktepaare mit den Kurven $f=0$, $g=0$ haben ein gleichzeitig zu beiden harmonisches Punktepaar P, P' (Nr. 17). Nach Definition schneiden sich aber die Polaren von P bezüglich $f=0$ und $g=0$ in P', also auch alle anderen Polaren im Büschel. *Somit wird jede Gerade von zwei Kegelschnitten eines gegebenen Büschels berührt und von den übrigen in Punktepaaren geschnitten, die zu den eben genannten Berührungspunkten harmonisch liegen.*

251. **Geradenpaare im Büschel.** Es gibt drei Werte von λ, für die $f-\lambda g=0$ ein Geradenpaar darstellt, d. h. *unter den Kegelschnitten eines Büschels gibt es stets drei Geradenpaare.*

Setzt man nämlich $f-\lambda g$ gleich

(5) $c_{11}x^2+2c_{12}xy+c_{22}y^2+2c_{13}x+2c_{23}y+c_{33},\quad c_{ik}=a_{ik}-\lambda b_{ik},$

so besteht die Bedingung, unter der die Kurve $f-\lambda g=0$ in ein Geradenpaar zerfällt, nach Nr. 62 in dem Verschwinden der Diskriminante von $f-\lambda g$, also in dem Verschwinden der aus den c_{ik} gebildeten Determinante dritten Grades. Die Gleichung, die man auf solche Weise erhält, ist in λ vom dritten Grade, also von der Form

(6) $$C(\lambda)\equiv A-3\mathsf{H}\lambda+3\Theta\lambda^2-B\lambda^3=0,$$

und hier sind A und B die Diskriminanten von f und g, während H und Θ durch

(7) $3\mathsf{H}=b_{11}A_{11}+2b_{12}A_{12}+b_{22}A_{22}+2b_{13}A_{13}+2b_{23}A_{23}+b_{33}A_{33},$

(8) $3\Theta=a_{11}B_{11}+2a_{12}B_{12}+a_{22}B_{22}+2a_{13}B_{13}+2a_{23}B_{23}+a_{33}B_{33}$

bestimmt sind. Die A_{ik} und B_{ik} sind die Unterdeterminanten der Elemente a_{ik} bez. b_{ik} der Determinanten A und B von f bez. g. Werden also die Wurzeln der kubischen Gleichung $C(\lambda)=0$ durch λ_1, λ_2, λ_3 bezeichnet, so sind

(9) $$f-\lambda_1 g=0,\quad f-\lambda_2 g=0,\quad f-\lambda_3 g=0$$

die Gleichungen der drei Paare von Sehnen, die zwischen den vier Schnittpunkten beider Kegelschnitte $f=0$, $g=0$ gezogen werden können (Nr. 214).

In dem vollständigen Viereck der Grundpunkte ist jedes Gegenseitenpaar ein zerfallender Kegelschnitt des Büschels. Von diesen Schnittsehnen ist stets *ein* Paar reell (Nr. 214), die beiden andern können aus reellen oder konjugiert imaginären Geraden bestehen oder selbst komplexe Gleichungen haben, wie im folgenden gezeigt wird.

252. **Realität der Geradenpaare des Büschels.** Wir nehmen im folgenden wie bisher an, daß die beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $g = 0$ voneinander verschieden seien und untersuchen die im Büschel $f - \lambda g = 0$ enthaltenen Geradenpaare ausgehend von der Gleichung $C(\lambda) = 0$. Man kann *vier Hauptfälle* unterscheiden.

I. Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Gleichung $C(\lambda) = 0$ sind voneinander verschieden.

Hier entsprechen irgend zwei Wurzeln, z. B. λ_1 und λ_2, zwei verschiedene Geradenpaare, die keine Gerade gemeinsam haben. Wäre nämlich z. B.

$$(10) \qquad f - \lambda_1 g \equiv q \cdot r, \qquad f - \lambda_2 g \equiv q \cdot s,$$

wo $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ die Gleichungen von Geraden bedeuten, so würde aus (10) hervorgehen:

$$(11) \qquad f \equiv \frac{q(\lambda_1 s - \lambda_2 r)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad g \equiv \frac{q(s - r)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

d. h. jeder der beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $g = 0$ würde in ein und dieselbe Gerade $q = 0$ und je eine andere Gerade zerfallen, auch wäre dann q *allen* Kegelschnitten des Büschels gemeinsam, *jeder* solche Kegelschnitt wäre ein Geradenpaar, $C(\lambda)$ würde identisch verschwinden.

Auch kann keiner Wurzel der Gleichung $C(\lambda) = 0$ eine Doppelgerade entsprechen. Dies läßt sich folgendermaßen zeigen[2]): Da $C(\lambda)$ die aus den Elementen $c_{ik} \equiv a_{ik} - \lambda b_{ik}$ gebildete Determinante dritten Grades ist, so geht $C(\lambda_h + \mu)$, $(h = 1, 2, 3)$, aus dieser Determinante dadurch hervor, daß man $a_{ik} - \lambda b_{ik}$ durch $c_{ik}(\lambda_h) - \mu b_{ik}$ ersetzt; hierbei ist $c_{ik}(\lambda_h) \equiv a_{ik} - \lambda_h b_{ik}$. Man erhält daher nach (6) eine Gleichung von der Form

$$(12) \qquad C(\lambda_h + \mu) = C(\lambda_h) - 3\mu \mathsf{H}_1 + 3\mu^2 \Theta_1 - \mu^3 B,$$

wo $3\mathsf{H}_1$ und $3\Theta_1$ aus $3\mathsf{H}$ und 3Θ dadurch hervorgehen, daß

man in (7) und (8) die Größen A_{ik} bez. a_{ik} durch die Unterdeterminanten C_{ik} und die Elemente $c_{ik}(\lambda_h)$ der für $\lambda = \lambda_h$ gebildeten Determinante $C(\lambda)$ ersetzt. Hat nun (12) eine Doppelwurzel $\mu = 0$, so hat $C(\lambda + \mu) = 0$, d. h. $C(\lambda) = 0$ die Doppelwurzel $\lambda = \lambda_h$. Dieser Fall würde tatsächlich eintreten, wenn einer Wurzel von $C(\lambda) = 0$ eine Doppelgerade entspräche, denn alsdann wären nach Teil I, Nr. 138 die Größen C_{ik} sämtlich gleich Null, in der Gleichung $C(\lambda_h + \mu) = 0$ würden also das absolute Glied und der Faktor von μ^1 verschwinden, diese Gleichung hätte eine Doppelwurzel $\mu = 0$, die Gleichung (6) die Doppelwurzel $\lambda = \lambda_h$. Dies war aber nach Voraussetzung ausgeschlossen, daher kann im vorliegenden Fall keine Doppelgerade im Büschel enthalten sein.

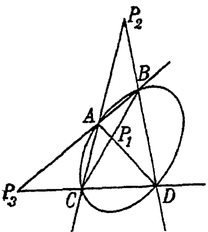


Fig. 1.

Die drei den Wurzeln von $C(\lambda) = 0$ zugehörigen Geradenpaare haben demnach vier gemeinsame, voneinander verschiedene Schnittpunkte A, B, C, D, die die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels $f - \lambda g = 0$ bilden (Fig. 1), und es kann der den beiden Geraden eines Paares gemeinsame Punkt nicht auf einer eigentlichen Kurve des Büschels liegen. Die Realität der Grundpunkte wird in Nr. 254 untersucht.

II. Die Gleichung $C(\lambda) = 0$ hat eine Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ und eine einfache Wurzel λ_3. Wir unterscheiden hier zwei Unterfälle a) und b), je nachdem für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ mindestens eine der Unterdeterminanten C_{ik} von Null verschieden ist oder diese sämtlich gleich Null sind.

a) Der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ entspricht ein eigentliches Geraden*paar*. Sein Schnittpunkt gehört allen Kurven des Büschels an, denn die Gleichung $C(\lambda_h + \mu) = 0$ hat nun für $h = 1$ oder 2 die Doppelwurzel $\mu = 0$, neben $C(\lambda_1)$ verschwindet auch $3\mathsf{H}_1 = [b_{11}C_{11} + 2b_{12}C_{12} + \cdots + b_{33}C_{33}]_{\lambda=\lambda_1}$, d. h. (nach Teil 1, Nr. 138) der Schnittpunkt A des Geradenpaares liegt auf der Kurve $g = 0$, somit auf allen Kurven des Büschels, er ist ein Grundpunkt des Büschels, oder vielmehr zwei der vier Grundpunkte sind, wie sofort gezeigt werden soll, in A zusammengerückt, alle Büschelkurven be-

rühren sich in A, haben also an dieser Stelle eine und dieselbe Tangente. Dies ergibt sich, wenn man die Gleichung der in A an die Kurve $f - \lambda g = 0$ gezogenen Tangente aufstellt; sie ist nach Teil I, Nr. 134, wenn x_1, y_1 die Koordinaten von A bedeuten, in homogener Schreibweise:

$$(13)\quad f'(x_1)x + f'(y_1)y + f'(z_1)z - \lambda\{g'(x_1)x + g'(y_1)y + g'(z_1)z\} = 0.$$

Nun erfüllen aber die Zahlen x_1, y_1, z_1 als homogene Koordinaten des Doppelpunktes des zu $\lambda = \lambda_1$ gehörigen Geradenpaares nach Teil I, Nr. 137, die drei Gleichungen

$$(14)\quad f'(x_1) - \lambda_1 g'(x_1) = 0,\quad f'(y_1) - \lambda_1 g'(y_1) = 0,$$
$$f'(z_1) - \lambda_1 g'(z_1) = 0,$$

so daß die Gleichung (13) auch in einer der beiden Formen

$$(15)\quad (\lambda_1 - \lambda)\{g'(x_1)x + g'(y_1)y + g'(z_1)z\} = 0$$

oder

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\{f'(x_1)x + f'(y_1)y + f'(z_1)z\} = 0$$

geschrieben werden kann. Wie diese Formen zeigen, ist daher die im Grundpunkt A an den beliebigen Kegelschnitt $f - \lambda g = 0$ des Büschels gezogene Tangente t zugleich Tangente der Kegelschnitte $g = 0$ und $f = 0$ im Punkte A, d. h. alle Büschelkurven haben in dem ihnen gemeinsamen Punkte A dieselbe Tangente t, sie berühren sich also sämtlich in A. Die Gerade t muß somit auch „Tangente" an das der Wurzel λ_3 der Gleichung (6) entsprechende Geradenpaar $f - \lambda_3 g = 0$ sein, d. h. mit einer Geraden dieses Paares zusammenfallen, dessen zweite Gerade mit der Verbindungslinie der beiden übrigen, von P verschiedenen Grundpunkte C, D des Büschels zusammenfällt (Fig. 2). Daß der Schnittpunkt P des Paares λ_3 jetzt kein Grundpunkt sein kann, ist klar, denn sonst müßte neben $C(\lambda_3)$ auch die für $\lambda = \lambda_3$ gebildete Größe $b_{11}C_{11} + 2b_{12}C_{12} + \cdots + b_{33}C_{33}$ verschwinden, die Gleichung $C(\lambda_3 + \mu) = 0$ hätte die Doppelwurzel $\mu = 0$, also $C(\lambda) = 0$ die Doppelwurzel $\lambda = \lambda_3$ neben der schon vorhandenen $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

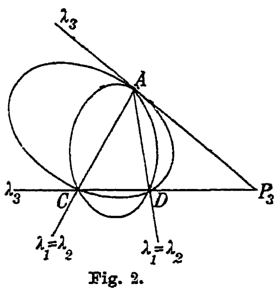


Fig. 2.

b) Das zu $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ gehörige Geradenpaar wird zur *Doppelgerade.* Trifft diese die Kegelschnitte des Büschels in

A und C, so haben alle Büschelkurven in diesen beiden Grundpunkten dieselbe Tangente, wie sich in gleicher Weise ergibt wie im Falle IIa, man hat ein Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte (Fig. 3), denn die Grundpunkte A und C können nicht zusammenfallen, sonst würde die Doppelgerade in A alle Büschelkurven berühren, also auch den Kegelschnitt $g = 0$. Aus

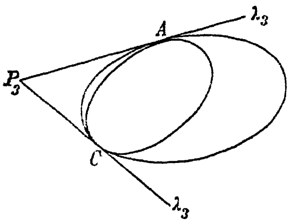


Fig. 3.

$$(16) \quad f - \lambda_1 g \equiv (c_1 x + c_2 y + c_3 z)^2 \equiv [c_{11} x^2 + 2 c_{12} xy + \cdots + c_{33} z^2]_{\lambda = \lambda_1}$$

folgt aber $c_{ik} = c_i c_k$, und wenn die Gerade λ_1 Tangente wäre an $g = 0$, so hätte man

$$(17) \qquad [B_{11} c_{11} + 2 B_{12} c_{12} + \cdots + B_{33} c_{33}]_{\lambda = \lambda_1} = 0,$$

die Gleichung $C(\lambda_1 + \mu) = 0$ hätte nun eine dreifache Wurzel $\mu = 0$, also $C(\lambda) = 0$ die dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_1$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung. Die *beiden* Geraden des zu $\lambda = \lambda_3$ gehörigen Paares sind die in A und C gezogenen gemeinsamen Tangenten; dies folgt in gleicher Weise wie im Falle IIa für die *eine* Gerade des Paares $\lambda = \lambda_3$.

Man hat nun Gleichungen von der Form

$$(18) \qquad f - \lambda_1 g \equiv q^2, \quad f - \lambda_3 g = rs,$$

aus denen hervorgeht, daß sich die Kurven $f = 0$ und $g = 0$ nunmehr durch

$$(19) \qquad \lambda_3 q^2 - \lambda_1 rs = 0 \quad \text{und} \quad q^2 - rs = 0$$

darstellen lassen.

III. Die Gleichung $C(\lambda) = 0$ hat die dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_1$. Auch hier werden zwei Unterfälle a) und b) unterschieden, je nachdem für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ mindestens eine der Unterdeterminanten C_{ik} von Null verschieden ist oder diese sämtlich gleich Null sind.

a) Der dreifachen Wurzel λ_1 entspricht ein eigentliches Geraden*paar* m, n, dessen Schnittpunkt A wie im Falle IIa ein allen Büschelkurven gemeinsamer Berührungspunkt ist. Neben C und H_1 verschwindet für $\lambda = \lambda_1$ nunmehr nach (12) auch

$$(20) \qquad 3\Theta_1 = [B_{11} c_{11} + 2 B_{12} c_{12} + \cdots + B_{33} c_{33}]_{\lambda = \lambda_1}.$$

Beachtet man, daß $G(u, v, w) \equiv B_{11}u^2 + 2B_{12}uv + \cdots + B_{33}w^2 = 0$ nach Teil I, Nr. 149, den Kegelschnitt $g = 0$ in Linienkoordinaten darstellt, daß ferner $f - \lambda_1 g = 0$ als Gleichung eines Geradenpaares von der Form

$$(u_1 x + v_1 y + w_1 z)(u_2 x + v_2 y + w_2 z) = 0$$

ist, so läßt sich $\Theta_1 = 0$ in der Gestalt

$$u_2 G'(u_1) + v_2 G'(v_1) + w_2 G'(w_1) = 0 \tag{21}$$

schreiben, d. h. die Geraden des Paares λ_1 sind harmonische Polaren des Kegelschnittes $g = 0$ (vgl. Teil I, Nr. 149), der in bezug auf g genommene Pol der einen Geraden liegt auf der anderen. Ist n keine Tangente von g, so muß der Pol Q von n auf der in A an g gezogenen und allen Büschelkurven gemeinsamen Tangente liegen, die zweite Gerade m des Paares λ_1 ist daher diese Tangente. Alle Büschelkurven haben nun außer A nur noch den zweiten Schnittpunkt D der Geraden n mit dem Kegelschnitt g gemeinsam, es müssen daher drei der vier Grundpunkte nach A gerückt sein, alle Kegelschnitte des Büschels berühren sich in A dreipunktig (Fig. 4), es findet daselbst eine Berührung zweiter Ordnung oder Oskulation statt (vgl. Teil I, Nr. 215).

b) Der dreifachen Wurzel λ_1 entspricht eine *Doppelgerade*.

Hier ist $f - \lambda_1 g \equiv (c_1 x + c_2 y + c_3 z)^2 = 0$, man hat $c_{ik} = c_i c_k$, so daß $3\Theta_1 = 0$ nach (20) in $B_{11}c_1^2 + 2B_{12}c_1c_2 + \cdots + B_{33}c_3^2 = 0$ übergeht, die Doppelgerade berührt den Kegelschnitt g, somit alle Kurven des Büschels, in einem Punkte A. Dieser ist

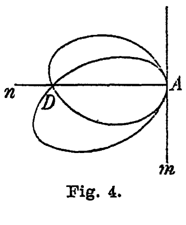


Fig. 4.

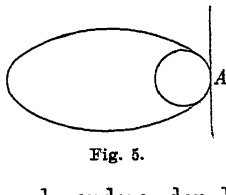


Fig. 5.

als Grundpunkt vierfach zu zählen, da andere den Büschelkurven gemeinsame Punkte jetzt nicht vorhanden sein können; alle Kegelschnitte des Büschels berühren sich vierpunktig in A, es findet eine Berührung dritter Ordnung statt (Fig. 5).

IV. Die Gleichung $C(\lambda) = 0$ verschwindet identisch, jeder Kegelschnitt des Büschels ist nun ein Geradenpaar; neben $A = 0$ und $B = 0$ hat man jetzt auch $\mathsf{H} = 0$ und $\Theta = 0$, d. h. der Doppelpunkt P des Geradenpaares f liegt auf g, der Doppelpunkt Q von g liegt auf f. Auch hier sind zwei Unterfälle möglich:

a) Die Punkte P und Q sind verschieden, die Kurven des Büschels sind alsdann Geradenpaare, die eine Gerade gemeinsam haben, die Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ sind von der Form $qr = 0$ bez. $qs = 0$. Hier wird $f - \lambda g \equiv q(r - \lambda s) = 0$, jede Kurve des Büschels besteht aus der Geraden q und einer durch den Schnittpunkt von r und s gehenden Geraden.

b) Die Punkte P und Q fallen zusammen. Hier ist etwa $g \equiv rs$, $f \equiv \alpha r^2 + \beta rs + \gamma s^2$, daher

$$f - \lambda g \equiv \alpha r^2 + (\beta - \lambda) rs + \gamma s^2,$$

jeder Kegelschnitt des Büschels besteht aus einem durch den Schnittpunkt von r und s gehenden Geradenpaar.

In den Fällen I—III der vorstehenden Betrachtungen konnte natürlich angenommen werden, daß die Kegelschnitte $f = 0$ und $g = 0$ keine Geradenpaare sind; denn man kann nach Nr. 249 die Gleichung des Büschels stets in eine solche Form, z. B. gerade in die Form $f - \lambda g = 0$, gebracht denken, daß f und g irgend zwei willkürlich herausgegriffene Kurven des Büschels, also z. B. zwei nicht ausartende Kegelschnitte, darstellen.

253. **Gemeinsames Polardreieck.** Da die harmonische Beziehung zwischen Pol und Polare durch ein dem Kegelschnitt eingeschriebenes Viereck vermittelt werden kann (Fig. 1 und Nr. 135), so sind in dem Diagonaldreieck $P_1P_2P_3$ des Vierecks der Grundpunkte jede Ecke P_1 usw. und die Gegenseite P_2P_3 usw. Pol und Polare in bezug auf jeden Kegelschnitt, der durch die Grundpunkte geht. Das Dreieck $P_1P_2P_3$ ist somit in bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels ein gemeinsames Polardreieck (Nr. 136).

Es gibt aber auch im allgemeinen nicht mehr als drei Punkte, die in bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels dieselbe Polare haben. Denn sind $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ die Polaren

eines solchen Punktes $x' | y'$ in bezug auf $f = 0$, $g = 0$, so muß identisch $p_1 = \lambda p_2$ sein, damit jene Polaren untereinander identisch seien. Daher muß $x' | y'$ bestimmt werden aus den drei in λ linearen Bedingungen, daß die Koeffizienten von x, von y und die konstanten Glieder in p_1 und p_2 proportional seien. Dies ist aber nur möglich, wenn die Determinante dieser drei Gleichungen verschwindet, d. h. λ aus einer Gleichung *dritten* Grades bestimmt wird*).

Jedes Kegelschnittbüschel hat in dem Diagonaldreieck des Vierecks der Grundpunkte das einzige gemeinsame Polardreieck.

254. Wir wollen nun untersuchen, wie dieses Dreieck in den vier in Nr. 252 unterschiedenen Fällen beschaffen ist.

I. Die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der Gleichung $C(\lambda) = 0$ sind voneinander verschieden. Hier gibt es einige Unterfälle:

a) Die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 und die ihnen zugehörigen Geradenpaare sind reell. In diesem Fall schneiden sich die Geradenpaare in den vier reellen Grundpunkten A, B, C, D, das Diagonaldreieck $P_1 P_2 P_3$ ist reell (Fig. 1, S. 6).

b) λ_1, λ_2, λ_3 sind reell, aber nur eines der zugehörigen Geradenpaare ist reell. Die beiden imaginären Geraden*paare* haben Gleichungen mit reellen Koeffizienten, also reelle Doppelpunkte. Jetzt sind die Grundpunkte A, B, C, D imaginär, das Diagonaldreieck $P_1 P_2 P_3$ ist aber wieder reell.

c) Der Fall, daß bei reellen Wurzeln λ zwei Geradenpaare reell, das dritte imaginär ist, kann nicht eintreten, denn das dritte Paar muß durch die nun reellen Schnittpunkte A, B, C, D der beiden ersten Paare gehen, also gleichfalls reell sein.

d) Eine Wurzel, etwa λ_1, der Gleichung $C(\lambda) = 0$ ist reell, λ_2 und λ_3 sind konjugiert komplex. Die zu λ_2 und λ_3 gehörigen Geraden*paare* haben Gleichungen mit imaginären Koeffizienten; sie sind imaginär und haben auch imaginäre Doppelpunkte. Die Gleichung des einen Paares geht aus der des anderen durch Vertauschung von i mit $-i$ hervor. Ent-

*) Man überzeugt sich leicht, daß diese Bedingungsgleichung identisch ist mit der gleich Null gesetzten Diskriminante von $f - \lambda g = 0$, also mit $C(\lambda) = 0$.

sprechen der Wurzel λ_2 die beiden Geraden $q + ir = 0$ und $s + it = 0$, wo q, r, s, t in x und y lineare Ausdrücke mit reellen Koeffizienten bedeuten, so entsprechen der Wurzel λ_3 die Geraden $q - ir = 0$ und $s - it = 0$. Von den vier Grundpunkten des Büschels sind *zwei reell* (der Schnittpunkt der beiden Geraden $q \pm ir = 0$ und der Schnittpunkt der beiden Geraden $s \pm it = 0$), *zwei* sind *konjugiert imaginär*. Die Ecke P_1 des Diagonaldreiecks ist als Doppelpunkt des Geradenpaares λ_1 reell, auch die Geraden dieses Paares sind als Verbindungslinien der eben erwähnten zwei reellen bez. zwei konjugiert imaginären Grundpunkte reell. Die Ecken P_2 und P_3 des Diagonaldreiecks sind konjugiert imaginär, haben aber eine reelle Verbindungslinie. Bei diesem Dreieck ist also jetzt eine Ecke und ihre Gegenseite reell.

II. a) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ und für die Doppelwurzel verschwinden nicht alle C_{ik}: Die Büschelkurven berühren sich in A und gehen außerdem durch die Punkte C und D hindurch. Der Punkt A ist als Doppelpunkt des der Doppelwurzel zugehörigen (reellen oder imaginären) Geradenpaares reell, daher ist auch das zur Wurzel λ_3 gehörige Paar, dessen eine Gerade alle Kegelschnitte des Büschels in A berührt, reell. Je nachdem das Geradenpaar λ_1 reell oder imaginär ist, sind die Punkte C und D reell (vgl. Fig. 2) oder imaginär. Ein eigentliches Polardreieck ist jetzt nicht vorhanden.

b) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ und für die Doppelwurzel verschwinden alle C_{ik}: Die Büschelkurven berühren sich in zwei Punkten A und C, die reell oder imaginär sind, je nachdem das zu λ_3 gehörige Geradenpaar reell oder imaginär ist. Hier gibt es unendlich viele Polardreiecke, die den Schnittpunkt P_3 des Geradenpaares λ_3 zur gemeinsamen Ecke, die Doppelgerade $\lambda_1 = \lambda_2$ zur Seite haben (Fig. 3). Die beiden anderen Ecken eines jeden Polardreiecks werden durch ein auf der Geraden $\lambda_1 = \lambda_2$ gelegenes, zu A und C harmonisches Punktepaar gebildet. Das Geradenpaar und die Doppelgerade bilden *kein* Polardreieck. In den Fällen III und IV von Nr. 252 gibt es kein eigentliches Polardreieck.

Beispiele für die Fälle Ib und Id bieten die Kreis-

büschel; bei reellen Grenzpunkten bilden diese mit dem unendlich fernen Punkt P_∞ der Potenzlinie das reelle Diagonaldreieck der imaginären Schnittpunkte, bei imaginären Grenzpunkten sind der Punkt P_∞ und die gemeinsame Zentrale die einzigen reellen Elemente desselben (Nr. 120).

255. **Gattungen der Kegelschnitte im Büschel.** So lange im Viereck der Grundpunkte zwei reelle Schnittsehnen eines Paares einen endlichen Winkel einschließen, können wir diese als die beiden Koordinatenachsen annehmen.

Nennen wir die Achsenabschnitte l, l' bez. m, m', so sind in einer Gleichung zweiten Grades, die sich für $y=0$ bez. $x=0$ auf

$$x^2-(l+l')x+ll'=0 \quad \text{bez.} \quad y^2-(m+m')y+mm'=0$$

reduziert, die Koeffizienten aus

$$2a_{13}=-a_{11}(l+l'),\quad 2a_{23}=-a_{22}(m+m'),$$
$$a_{33}=a_{11}ll'=a_{22}mm'$$

zu bestimmen, während $a_{12}=\lambda$ völlig unbestimmt bleibt. Mit $a_{33}=ll'mm'$ können wir also die Gleichung des Büschels schreiben

$$(22)\qquad mm'x^2+2\lambda xy+ll'y^2-mm'(l+l')x$$
$$-ll'(m+m')y+ll'mm'=0.$$

Hier kann man sofort den Einfluß des Umstandes erkennen, ob die Grundpunkte ein einfaches Viereck mit lauter ausspringenden Winkeln oder mit einem einspringenden Winkel zulassen. Dies hängt, wie man sich leicht durch eine Zeichnung überzeugt, nur davon ab, ob die Produkte ll' und mm' gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben. Im letzten Falle ist $ll'mm'$ negativ, also kann auch $a_{11}a_{22}-\lambda^2$ für reelle λ nicht positiv oder Null sein. *Daher enthält ein Büschel, von dessen Grundpunkten einer im Dreieck der übrigen liegt, keine reellen Ellipsen oder Parabeln* (Nr. 131). In der Tat muß offenbar der einem solchen Viereck umgeschriebene Kegelschnitt eine Hyperbel sein, deren beiden Ästen ein bez. drei Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen angehören.

Ist dagegen $ll'mm'>0$, so liefern die Parameterwerte $\lambda^2<ll'mm'$ reelle Ellipsen und insbesondere $\lambda=\pm\sqrt{ll'mm'}$ Parabeln. *Einem konvexen Viereck sind stets zwei reelle Para-*

beln umgeschrieben. Dasselbe gilt auch für ein Viereck von zwei Paaren konjugiert imaginärer Punkte, da dann auf den reellen Schnittsehnen die Produkte ll', mm' positiv sind. Aus demselben Grunde entspringt die Unterscheidung: *Büschel mit nur zwei reellen Grundpunkten enthalten keine reellen Ellipsen und Parabeln, wenn jene durch den Träger der imaginären Grundpunkte getrennt werden.*

B. 1) *Der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels ist ein Kegelschnitt, der durch die sechs Seitenmitten des vollständigen Vierecks der Grundpunkte und durch die Ecken des Diagonaldreiecks geht.* Vgl. auch Nr. 301, 15 und 314, 1.

Denn der Mittelpunkt des Kegelschnittes, der eine Gleichung von der Form (22) hat, ist gegeben durch

$$a_{11}x + \lambda y + a_{13} = 0, \quad \lambda x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$

und durch Elimination von λ entsteht der Ort

$$a_{11}x^2 - a_{22}y^2 + a_{13}x - a_{23}y = 0.$$

Die Kurve geht durch die Punkte $0 \mid 0$, $0 \mid \frac{1}{2}(l + l')$, $\frac{1}{2}(m + m') \mid 0$, Schnittpunkt und Mitten eines Gegenseitenpaares usw. Übrigens ordnen sich offenbar die sechs Seitenmitten zu drei Parallelogrammen; diese haben daher den Mittelpunkt des soeben betrachteten Kegelschnitts zum gemeinsamen Mittelpunkt.

Der Ort ist eine Hyperbel, wenn ll' und mm' gleiche Vorzeichen haben, die Grundpunkte ein einfaches konvexes Viereck bilden; die beiden Asymptotenrichtungen $a_{11}x^2 - a_{22}y^2 = 0$ geben also *die Achsenrichtungen der Parabeln des Büschels.* Im Falle eines nur aus Hyperbeln bestehenden Büschels ist der Ort ihrer Mittelpunkte eine Ellipse.

2) Jedes Büschel enthält eine gleichseitige Hyperbel. Ihr Parameter folgt aus $a_{11} + a_{22} = 2\lambda \cos\omega$ (Nr. 165).

3) *Durch vier Punkte, deren jeder der Höhenschnittpunkt im Dreieck der übrigen ist, gehen nur gleichseitige Hyperbeln.*

Wir haben nach Nr. 41, 7 nur rechtwinklige Koordinaten und $ll' = -mm'$, also $a_{22} = -a_{11}$, anzunehmen. Wir können auch kürzer sagen: Durch drei Punkte geht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, weil ein vierter mitbestimmt ist.

4) *Der Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, die einem Dreieck umgeschrieben sind und nach Teil I, Nr. 165, 2 auch durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks gehen, ist der Feuerbachsche Kreis desselben* (Nr. 99, 3).

Die Gleichung des Ortes in 1) gibt mit $a_{22} = -a_{11}$ einen Kreis, der die Seiten und die Eckenabstände des Höhenschnittpunktes hal-

biert. Die Höhenfußpunkte sind die Ecken des Polardreiecks des Büschels gleichseitiger Hyperbeln.

256. Aus den Betrachtungen in Nr. 249 geht hervor, daß man bei $f - \lambda g = 0$ für eine der beiden Kurven $f = 0$, $g = 0$ (oder auch für beide) Geradenpaare des Büschels wählen kann. Sind etwa $s_1 = 0$, $s_2 = 0$; $s_3 = 0$, $s_4 = 0$ zwei Schnittsehnenpaare, so ist in

$$s_3 s_4 - \mu s_1 s_2 = 0 \tag{23}$$

die Gleichung jedes dem Viereck umgeschriebenen Kegelschnittes enthalten, jedoch nur dann in reeller Form, wenn das Viereck ganz reell oder ganz imaginär ist. (Vgl. Nr. 254.)

Diese Gleichungsform liefert z. B. den Satz: *Sind die Schnittsehnenpaare Rechtwinkelpaare, so besteht das Büschel nur aus gleichseitigen Hyperbeln.* Denn bei rechtwinkligen Koordinaten sind dann die Koeffizienten von x^2 und y^2 sowohl in $s_1 s_2$ als in $s_3 s_4$, daher auch in $s_3 s_4 - \mu s_1 s_2$, entgegengesetzt gleich (Nr. 255, 2).

Weil aber wenigstens ein Schnittsehnenpaar $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ reell ist (vgl. Nr. 252), *so kann jedes Kegelschnittbüschel durch einen Kegelschnitt und ein Geradenpaar stets reell definiert werden:*

$$f - \mu s_1 s_2 = 0, \tag{24}$$

wie schon an der Form $f - \lambda xy = 0$ von Nr. 255 erkennbar ist. Die Schnittpunkte von $f = 0$ mit $s_1 = 0$ bez. $s_2 = 0$ mögen P_1, Q_1 bez. P_2, Q_2 heißen. Den Parameterwerten $\mu = 0$ und $\mu = \infty$ entspricht $f = 0$ und $s_1 s_2 = 0$, also muß die kubische Gleichung zur Bestimmung der Parameter der Geradenpaare sich nun auf eine quadratische reduzieren.

B. 1) Wenn drei Kegelschnitte $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ gegeben sind, und zwei andere $\varphi = 0$, $\chi = 0$ durch die bez. dem ersten und zweiten, dem ersten und dritten von ihnen gemeinsamen Punkte gelegt werden, so liegen die vier gemeinsamen Punkte von $\varphi = 0$ und $\chi = 0$ und die des Paares $g = 0$, $h = 0$ auf einem und demselben Kegelschnitt.

Denn die Gleichungen der Kegelschnitte φ, χ sind $f + \mu' g = 0$, $f + \mu'' h = 0$ und einer der durch ihre Schnittpunkte gehenden Kegelschnitte ist $\mu' g - \mu'' h = 0$.

2) Die Gleichung des Kegelschnittes, der durch $1 \mid 2, 3 \mid 5$,

$-1 \mid 4, -3 \mid -1, -4 \mid 3$ geht, wird erhalten, indem man die Gleichungen der Seiten des durch die vier ersten Punkte gebildeten Vierecks bestimmt und in der Gleichung

$$(3x-2y+1)(5x-2y+13)=\lambda(x-4y+17)(3x-4y+5)$$

die Koordinaten des fünften Punktes zur Bestimmung von λ einsetzt. Man findet $\lambda=-\frac{221}{19}$, also die Gleichung des Kegelschnittes

$$79x^2-320xy+301y^2+1101x-1665y+1586=0.$$

3) Man bilde und untersuche die Bedingungen, unter denen drei Kreise demselben Büschel angehören.[3])

257. **Berührungsbüschel.** Äußerst brauchbar ist die Gleichungsform $f-\lambda s_1 s_2=0$, z. B. um die besonderen Beziehungen zwischen Kegelschnitten in allgemeinerer Form als in Nr. 216 darzustellen. Die Kegelschnitte $f=0$, $f-\lambda s_1 s_2=0$ berühren einander, d. h. zwei ihrer Schnittpunkte fallen zusammen, wenn entweder eine der Geraden $s_1=0$, $s_2=0$ den Kegelschnitt $f=0$ berührt, oder wenn $s_1=0$, $s_2=0$ sich in einem Punkte von $f=0$ schneiden.

Ist also $t=0$ die Gleichung der Tangente von $f=0$ im Punkte $x' \mid y'$, so ist

$$f-t(a_1x+a_2y+a_3)=0 \tag{25}$$

die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, der $f=0$ *im Punkte* $x' \mid y'$ *berührt;* noch drei weitere Bedingungen sind erforderlich, um die Bestimmung des Kegelschnittes durch die Ermittelung von a_1, a_2, a_3 zu vollenden.

Wenn die Gerade $a_1x+a_2y+a_3=0$ durch den Punkt $x' \mid y'$ geht, so fallen *drei* von den vier Schnittpunkten zusammen; *die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, der* $f=0$ *im Punkte* $x' \mid y'$ *oskuliert, ist*

$$f-t\{a_1(x-x')+a_2(y-y')\}=0. \tag{26}$$

Wird insbesondere die Gleichung des oskulierenden Kreises verlangt, so haben wir nur auszudrücken, daß in dieser Gleichung erstens der Koeffizient von xy verschwindet, und zweitens die Koeffizienten von x^2 und y^2 einander gleich sind, wir erhalten die Werte von a_1 und a_2 aus diesen Bedingungsgleichungen.

Die beiden Kegelschnitte haben endlich vier zusammenfallende Schnittpunkte, wenn die Geraden $a_1x+a_2y+a_3=0$

und $t=0$ zusammenfallen. *Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, der mit $f=0$ im Punkte $x' \mid y'$ eine Berührung dritter Ordnung (Hyperoskulation) hat, ist*

(27) $$f-\lambda t^2=0 \text{ (Nr. 216).}$$

Ein Kegelschnitt hat in jedem Punkte eine hyperoskulierende Parabel, denn von den zwei Parabeln, die durch vier Grundpunkte gehen (Nr. 250 am Schluß und Nr. 143), artet nun die eine in $t^2=0$ aus.

B. 1) Wenn die Achsen des Kegelschnittes $f=0$ zu denen des Kegelschnittes $g=0$ parallel sind, so haben auch die Achsen von $f-\lambda g=0$ dieselbe Richtung.

Denn für Koordinatenachsen, die den Achsen von $f=0$ parallel sind, enthalten weder f noch g das Glied xy. Wenn z. B. $f=0$ einen Kreis darstellt, so sind die Achsen von $f-\lambda g=0$ denen von $f=0$ parallel; ist $f=0$ ein Geradenpaar, so geben seine Winkelhalbierenden die Achsenrichtungen.

2) Sind die Koordinatenachsen den Achsen von $f=0$ und denen von $f-\lambda s_1 s_2=0$ parallel, so sind s_1 und s_2 von der Form $a_1x+a_2y+a_3$, $a_1x-a_2y+a_3'$.

3) Gleichung des oskulierenden Kreises für den Punkt P' eines Mittelpunktskegelschnitts.

Die Gleichung muß nach dem Texte von der Form sein

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)\{a_1(x-x')+a_2(y-y')\}.$$

Die erste Bedingung des Textes reduziert sie auf

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)\left(\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}-\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right),$$

und hier bedeutet λ eine Konstante, die sich aus der zweiten Bedingung gleich $b'^2:(b^2-a^2)=-b'^2:c^2$ ergibt. Dabei ist b' der zum Halbmesser a' des Punktes P' konjugierte Halbmesser (vgl. Nr. 170). Also lautet die Gleichung

$$x^2+y^2-2c^2\left(\frac{x'^3x}{a^4}-\frac{y'^3y}{b^4}\right)+a'^2-2b'^2=0.$$

4) Die Gleichung des oskulierenden Kreises des Punktes P' der Parabel $y^2=2px$ ist

$$(p^2+2px')(y^2-2px)=\{yy'-p(x+x')\}\{yy'+p(x-3x')\}.$$

5) Die Gleichung der Parabel, die einen auf Tangente und Normale als Koordinatenachsen bezogenen Kegelschnitt im Nullpunkt hyperoskuliert, ist

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+\frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2+2a_{23}y=0.$$

6) Die hyperoskulierende Parabel hat eine zu dem betreffenden Durchmesser $2a'$ des Kegelschnittes parallele Achse und den Hauptparameter $p = a^2b^2 : a'^3$.

258. **Doppelberührung.** Wenn der Kegelschnitt $f = 0$ von den Geraden $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ geschnitten wird, so rücken die Punkte P_1 und P_2, Q_1 und Q_2 (Nr. 256) bez. um so näher zusammen, je näher die Sehnen zur Deckung mit derselben Geraden $s = 0$ kommen. Daher stellt die Gleichung $f - \lambda s^2 = 0$ *ein Büschel von Kegelschnitten dar, die mit $f = 0$ in der gemeinsamen Sehne $s = 0$ je eine reelle oder imaginäre doppelte Berührung haben* (Nr. 215).

Ebenso stellt $s_1 s_2 - \lambda s^2 = 0$ jeden Kegelschnitt dar, der die Geraden $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ in den Punkten berührt, in denen sie von der Geraden $s = 0$ geschnitten werden (Nr. 147). Die Gleichung eines Kegelschnittes, der mit $f = 0$ in den beiden Punkten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ eine doppelte Berührung hat, kann ebendeshalb auch in der Form $f - \lambda t_1 t_2 = 0$ dargestellt werden, wenn $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ die Tangenten von $f = 0$ in diesen Punkten ausdrücken.

259. **Unendlich ferne Schnittsehne.** Die Gleichungsform $f - \lambda s_1 s_2 = 0$ umfaßt namentlich auch den besonderen Fall, wo eine oder mehrere Schnittsehnen im Unendlichen liegen. Man hat sich nur zu erinnern, daß die Gleichung der unendlich fernen Geraden die Form $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$ hat und in jedem Gliede von zu geringem Grade eine oder mehrere Konstanten c durch $0 \cdot x + 0 \cdot y + c$ ersetzt gedacht werden können.

So ist die Gleichung $f - \lambda s = 0$ als der besondere Fall der Form $f - s_1 s_2 = 0$ anzusehen, bei dem $s_1 \equiv s$ und $s_2 \equiv 0 \cdot x + 0 \cdot y + \lambda$ ist. Sie stellt daher Kegelschnitte dar, die durch die Schnittpunkte von $f = 0$ mit $s = 0$ und $0 \cdot x + 0 \cdot y + \lambda = 0$ gehen. Diese Gleichungen $f - \lambda s = 0$ stimmen auch offenbar in den quadratischen Gliedern alle überein (Nr. 132), definieren daher bei beliebigem s alle Kegelschnitte mit parallelen Asymptoten (Nr. 224). *Somit bilden alle ähnlichen oder ähnlich gelegenen Kegelschnitte mit zwei festen Schnittpunkten im Endlichen ein Büschel.* Dieses ent-

hält im allgemeinen keine Parabeln, denn zwei der Schnittsehnenpaare bestehen aus Parallelen (Nr. 143). Dagegen sind seine sämtlichen Kurven parallelachsige Parabeln, wenn $f=0$ selbst eine Parabel ist. Auch das Kreisbüschel gehört hierher.

Ferner ist die Gleichung $f-\lambda^2=0$ ein besonderer Fall der Gleichung $f-s^2=0$, nämlich $f-(0\cdot x+0\cdot y+\lambda)^2=0$. Sie bezeichnet daher (Nr. 258) einen Kegelschnitt, der mit $f=0$ eine doppelte Berührung hat, doch ist die Berührungssehne unendlich fern. Ihr Pol ist in jedem der Kegelschnitte der Mittelpunkt (Nr. 139) und allen gemeinsam. *Daher bilden alle ähnlichen und koachsialen Kegelschnitte ein Büschel mit Doppelberührung,* wie z. B. das Büschel konzentrischer Kreise. Da für Parabeln insbesondere die unendlich ferne Gerade Tangente ist (Nr. 257), *so bilden die Parabeln $f=\lambda^2$ ein Oskulationsbüschel* (Nr. 226).

Endlich kann jede nicht-symbolische Gleichung selbst als unter der Gleichungsform $s_3s_4-\lambda s_1s_2=0$ inbegriffen angesehen werden. Denn im allgemeinen Ansatz

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

liefert das erste Trinom, gleich Null gesetzt, ein Geradenpaar $s_3s_4=0$ aus dem Nullpunkt und das zweite Trinom eine durch die unendlich ferne Gerade $s_2=0$ zu einem Paar ergänzte Gerade $s_1=0$. Die Asymptotenparallelen $s_3=0$, $s_4=0$ treffen die Kurve in zwei endlichen Schnittpunkten von der Sehne $s_1=0$.

Insbesondere zeigen die Gleichungen der Parabel

$(\alpha x+\beta y)^2+(2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33})=0$, $y^2=2p'x$ (Nr. 197), als von der Form $s_1s_2-\lambda s^2=0$, daß die Gerade $s_1=0$ oder $2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ bez. $x=0$ und die unendlich ferne Gerade $s_2=0$ die Kurve in den Punkten des Durchmessers $\alpha x+\beta y=0$ bez. $y=0$ berühren. Von derselben Art ist auch die auf die Asymptoten bezogene Hyperbelgleichung $xy=k^2=(0\cdot x+0\cdot y+k)^2$ (Nr. 164); hier sind $x=0$, $y=0$ Tangenten der Kurve mit unendlich ferner Berührungssehne.

260. **Die Gleichungsform**

$$l_1s_1^2+l_2s_2^2+l_3s_3^2=0 \tag{28}$$

definiert einen Kegelschnitt, für den die Geraden $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ *Seiten eines Polardreiecks sind* (Nr. 136).

Im bisherigen Zusammenhange erkennt man dies, indem man die Gleichung (28) in drei äquivalenten Formen schreibt, deren eine Seite nur je eines der Quadrate bildet. Denn die Form $l_2 s_2^2 + l_3 s_3^2 = -l_1 s_1^2$ zeigt, daß $l_2 s_2^2 + l_3 s_3^2 = 0$ ein Geradenpaar darstellt, das zu dem Paare $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ harmonisch ist und aus den Tangenten der Kurve zu der Berührungssehne $s_1 = 0$ besteht. Also ist die Ecke $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ der Pol der Seite $s_1 = 0$. Ebenso folgt aus $l_3 s_3^2 + l_1 s_1^2 = -l_2 s_2^2$ und $l_1 s_1^2 + l_2 s_2^2 = -l_3 s_3^2$, daß $s_3 = 0$, $s_1 = 0$ die Polare $s_2 = 0$ und $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ die Polare $s_3 = 0$ hat.

Setzen wir ein reelles Polardreieck voraus, so haben wir zu unterscheiden, ob die drei Koeffizienten l_1, l_2, l_3 dasselbe oder ob nur zwei von ihnen dasselbe Vorzeichen haben. Nur im zweiten Falle ist der definierte Kegelschnitt reell. Nehmen wir etwa $l_1 = \lambda_1^2$, $l_2 = \lambda_2^2$, $l_3 = -\lambda_3^2$, so sind die zu den Seitenpaaren des Dreiecks harmonischen Tangentenpaare $\lambda_2 s_2 \pm \lambda_3 s_3 = 0$, $\lambda_1 s_1 \pm \lambda_3 s_3 = 0$ und $\lambda_1 s_1 \pm i\lambda_2 s_2 = 0$, womit die Lage des Dreiecks gemäß Nr. 136 verdeutlicht wird. Insbesondere für $\lambda_1^2 s_1^2 + \lambda_2^2 s_2^2 = c^2$, $(s_3 = c)$ besteht das Polardreieck aus der unendlich fernen Geraden und zwei konjugierten Durchmessern $s_1 = 0$, $s_2 = 0$.

In gleicher Weise bestätigt man, daß die Gleichung

$$a_{11} s_1^2 + 2 a_{12} s_1 s_2 + a_{22} s_2^2 = a_{33} s_3^2 \tag{29}$$

einen Kegelschnitt bezeichnet, für den der Punkt $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ der Pol der Geraden $s_3 = 0$ ist; denn die linke Seite stellt, gleich Null gesetzt, ein Geradenpaar durch jenen Punkt dar. Ist insbesondere $s_3 = 1$, so haben wir die auf den Mittelpunkt $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ der Kurve bezogene Gleichung (Nr. 140).

Wenn die Gleichung (28) einen Kreis darstellt, so muß sein Mittelpunkt der Höhendurchschnittspunkt des fundamentalen Polardreiecks sein, weil das vom Pol auf die Polare gefällte Lot durch den Mittelpunkt geht.

Weil ferner zwei Kegelschnitte ein gemeinsames Polardreieck haben, *so können wir im allgemeinen die Gleichungen*

zweier Kegelschnitte gleichzeitig auf die Normalform gebracht voraussetzen:

(30) $l_1 s_1^2 + l_2 s_2^2 + l_3 s_3^2 = 0, \quad l'_1 s_1^2 + l'_2 s_2^2 + l'_3 s_3^2 = 0.$

Jedoch erscheinen diese Darstellungsformen imaginär, wenn das Polardreieck imaginär ist, d. h. wenn zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte vorhanden sind (Nr. 254).

261. *Wenn zwei Kegelschnitte mit einem dritten in doppelter Berührung sind, so gehen ihre Berührungssehnen mit diesem und eines von ihren drei Schnittsehnenpaaren durch einen und denselben Punkt und bilden ein harmonisches Büschel.*

Für $f = 0$ als die Gleichung des dritten Kegelschnittes sind $f + s_1^2 = 0$, $f + s_2^2 = 0$ die Gleichungen der beiden ersten. Durch Subtraktion derselben voneinander erhält man als Gleichung der fraglichen Schnittsehnen $s_1^2 - s_2^2 = 0$; aber die Geraden $s_1 \pm s_2 = 0$ sind zu den Berührungssehnen $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, durch deren Schnittpunkt sie gehen, harmonisch.[4])

B. 1) Wenn zwei Kegelschnitte in doppelter Berührung sind, so schneiden sich die Sehnen, die ein durch die Berührungspunkte willkürlich gelegter Kegelschnitt mit beiden bestimmt, auf der Berührungssehne.

Die Gleichungen $f = 0$, $f + s_1^2 = 0$, $f + s_1 s_2 = 0$ enthalten den Beweis. Für Geradenpaare durch die Berührungspunkte und für Hyperbeln mit denselben Asymptoten ergeben sich besondere Sätze.

2) Denkt man sich an zwei Kegelschnitte ein Paar ihrer gemeinsamen Tangenten gezogen, so ist der Schnittpunkt der dem einen und der dem anderen Kegelschnitte angehörigen Berührungssehne zugleich Schnittpunkt eines Paares ihrer gemeinsamen Sehnen.

Man erhält diesen Satz als einen Sonderfall des Hauptsatzes, wenn man annimmt, daß $f = 0$ ein Geradenpaar ist.

Wenn die Asymptoten einer Hyperbel eine Ellipse berühren, so sind zwei Schnittsehnen dieser Kurven der Berührungssehne parallel und von ihr gleichweit entfernt.

3) Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen und die des entsprechenden ihm umgeschriebenen Vierecks gehen durch einen Punkt und trennen einander harmonisch.

Dies ist der besondere Fall von dem Satze des Textes, in dem die Kegelschnitte $f + s_1^2 = 0$, $f + s_2^2 = 0$ in je ein Geradenpaar ausarten. Der Beweis kann aber für diesen Fall auch direkt geführt werden wie folgt: Sind $t_1 = 0$, $t_2 = 0$; $t_3 = 0$, $t_4 = 0$ die Gleichungen von zwei Tangentenpaaren und $r = 0$, $s = 0$ die ihrer

Berührungssehnen, d. h. der Diagonalen des entsprechenden eingeschriebenen Vierecks, so kann man die Gleichung des Kegelschnittes in jeder der Formen $t_1 t_2 - r^2 = 0$, $t_3 t_4 - s^2 = 0$ schreiben. Daher sind diese identisch oder nur um einen konstanten Faktor λ verschieden, d. h. es entspringt die Identität $t_1 t_2 - \lambda t_3 t_4 \equiv r^2 - \lambda s^2$. In dieser drückt die rechte Seite durch ihr Verschwinden ein Geradenpaar aus, das mit $r = 0$, $s = 0$ ein harmonisches Büschel bildet, während die linke Seite zeigt, daß diese Geraden die Punkte verbinden

$$t_1 = t_3 = 0, \quad t_2 = t_4 = 0 \quad \text{und} \quad t_1 = t_4 = 0, \quad t_2 = t_3 = 0.$$

4) Man stelle die Gleichungen der Diagonalen des Vierecks auf, das von den Tangenten eines Mittelpunktskegelschnittes in den vier Punkten gebildet wird, denen die exzentrischen Winkel 2α, 2β, 2γ, 2δ entsprechen.

In diesem Falle ist (Nr. 159)

$$t_1 \equiv \frac{x}{a}\cos 2\alpha + \frac{y}{b}\sin 2\alpha - 1, \quad t_2 \equiv \frac{x}{a}\cos 2\beta + \frac{y}{b}\sin 2\beta - 1;$$

$$r \equiv \frac{x}{a}\cos(\alpha+\beta) + \frac{y}{b}\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta),$$

und man findet leicht

$$t_1 t_2 - r^2 = -\sin^2(\alpha-\beta)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right\}, \text{ usw.}$$

Nach den Ergebnissen von 3) findet man für die Diagonalen

$$r\sin(\gamma-\delta) \pm s\sin(\alpha-\beta) = 0.$$

262.*) *Zieht man durch einen Punkt P_0 Parallelen zu den Achsen einer Ellipse, so ist jede der so entstehenden beiden Schnittsehnen zugleich Berührungssehne je eines Büschels doppelt berührender Kegelschnitte, dem je ein Kreis angehört. Diese beiden Kreise bestimmen ein Kreisbüschel, das den Punkt P_0 als Nullkreis enthält.*[5])

Sind nämlich $y = y_0$ und $x = x_0$ die Gleichungen der beiden Schnittsehnen, so haben die erwähnten Kegelschnittbüschel die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \lambda(y-y_0)^2 = 0 \quad \text{bez.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \mu(x-x_0)^2 = 0.$$

*) Den Inhalt der hier folgenden Nummern 262—266 verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn *K. Rohn* in Leipzig. Vgl. übrigens auch dessen Abhandlungen im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16 (1907), S. 359—377 und Bd. 22 (1913), S. 330—340.

Ihnen gehören die Kreise

$$(31)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1-\frac{c^2}{a^2b^2}(y-y_0)^2=0$$

bez.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\frac{c^2}{a^2b^2}(x-x_0)^2=0$$

an, wo $c^2=a^2-b^2$ ist; das durch diese Kreise bestimmte Büschel enthält den Nullkreis $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$.

Hieraus folgt leicht: *Ist Q einer der beiden Schnittpunkte der Ellipse mit der Geraden $y=y_0$ und R ein Schnittpunkt der Ellipse mit $x=x_0$, so treffen die in Q und R gezogenen Normalen der Kurve die y-Achse bez. x-Achse in Punkten, deren Verbindungslinie durch P_0 geht.*

Wählt man insbesondere $x_0=a$, $y_0=b$, so werden die Kreise (31) die den betreffenden Scheiteln der Ellipse zugehörigen *Krümmungskreise.*

263. *Berühren sich die Kegelschnitte $f(x, y)=0$ und $g(x,y)=0$ in zwei Punkten P_1, P_2, die Kegelschnitte $h(x,y)=0$ und $k(x,y)=0$ in zwei Punkten Q_1, Q_2 und gehören die vier Berührungspunkte einer und derselben Geraden $s=0$ an, so liegen die vier Schnittpunkte von f und h mit den vier Schnittpunkten von g und k auf einem Kegelschnitt; ebenso schneiden sich f und k sowie g und h auf einem und demselben zweiten Kegelschnitt.*

Nimmt man nämlich an, daß die absoluten Glieder in den Ausdrücken f, g, h, k und s gleich 1 seien, eine Annahme, die stets erlaubt ist, so finden Identitäten statt von der Form

$$(32)\qquad (1-\lambda)g\equiv f-\lambda s^2=0 \quad \text{und} \quad (1-\mu)k\equiv h-\mu s^2=0,$$

und hieraus folgt

$$(33)\qquad \frac{1-\lambda}{\lambda}g-\frac{1-\mu}{\mu}k\equiv\frac{1}{\lambda}f-\frac{1}{\mu}h,$$

d. h. der Kegelschnitt $\frac{1-\lambda}{\lambda}g-\frac{1-\mu}{\mu}k=0$ geht durch die Schnittpunkte von f und h, oder anders ausgedrückt: die Schnittpunkte von g und k liegen mit denen von f und h auf einem und demselben Kegelschnitt; usw.

B. 1) Es seien zwei Geraden gegeben, die gegen die große Achse einer Ellipse unter supplementären Winkeln geneigt sind.

Zieht man alsdann zur kleinen Achse der Ellipse eine Parallele, die diese Kurve in zwei Punkten P_1, P_2, das Geradenpaar in Q_1, Q_2 schneidet, so gibt es einen Kreis, der die Ellipse in P_1 und P_2 berührt und einen zweiten Kreis, der das Geradenpaar in Q_1, Q_2 berührt. Auch die vier Schnittpunkte von Ellipse und Geradenpaar liegen auf einem Kreis, und die so erhaltenen drei Kreise gehören einem und demselben Büschel an, d. h. ihre Mittelpunkte liegen auf einer Geraden.

Dies folgt sofort aus (32) und (33), wenn man $f = 0$ und $h = 0$ als Gleichungen der Ellipse und des Geradenpaares, $g = 0$ und $k = 0$ als Gleichungen der beiden zuerst erwähnten Kreise auffaßt; die Parallele zur kleinen Achse ist $s = 0$.

2) Die vier Schnittpunkte eines Kreises $h = 0$ mit einer Hyperbel $f = 0$ und die vier Schnittpunkte eines zu h konzentrischen Kreises $k = 0$ mit den Asymptoten der Hyperbel liegen auf einem Kegelschnitt.

Auch dies folgt aus (32) und (33), wenn $s = 0$ die unendlich ferne Gerade darstellt. (Vgl. auch Nr. 148.)

3) Zieht man zwei Geraden, die gegen die Hauptachse einer Hyperbel unter supplementären Winkeln geneigt sind, so liegen die vier Schnittpunkte des Geradenpaares mit der Hyperbel bez. mit deren Asymptoten auf zwei konzentrischen Kreisen.

Daß die Schnittpunkte des Geradenpaares und der Hyperbel auf einem Kreis liegen, folgt leicht aus einem Satze in Nr. 220.

264. *Alle Sehnen einer Ellipse $f(x, y) = 0$, die von einem festen Punkt $P_0(x_0 \mid y_0)$ unter rechtem Winkel erscheinen, umhüllen einen Kegelschnitt $\varphi(u, v) = 0$. Dieser hat P_0 zum Brennpunkt und die Polare von P_0 in bezug auf f zur Leitlinie.*

Die Gleichung der Ellipse $f(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ möge zunächst durch $x = \xi + x_0$, $y = \eta + y_0$ auf ein dem ursprünglichen Koordinatensystem paralleles System ξ, η bezogen werden, das seinen Anfangspunkt in P_0 hat. Die Gleichung der Ellipse wird alsdann

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{2x_0}{a^2}\xi + \frac{2y_0}{b^2}\eta + f(x_0, y_0) = 0. \tag{34}$$

Sind nun $u_1\xi + v_1\eta + 1 = 0$ und $u_2\xi + v_2\eta + 1 = 0$ die Gleichungen zweier Ellipsensehnen, so stellt

$$\begin{gathered}\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{2x_0}{a^2}\xi + \frac{2y_0}{b^2}\eta \\ + f(x_0, y_0) - \lambda(u_1\xi + v_1\eta + 1)(u_2\xi + v_2\eta + 1) = 0\end{gathered} \tag{35}$$

ein durch die Endpunkte der Ellipsensehnen gehendes Kegelschnittbüschel dar, und insbesondere erhält man ein durch die Endpunkte der Ellipsensehnen und durch P_0 gehendes Geradenpaar, wenn in der letzten Gleichung das absolute Glied und die linearen Glieder verschwinden, also wenn

$$(36)\qquad \lambda = f(x_0, y_0),\quad \frac{2x_0}{a^2} = \lambda(u_1 + u_2),\quad \frac{2y_0}{b^2} = \lambda(v_1 + v_2)$$

oder

$$(36\text{a})\qquad u_2 = \frac{2x_0}{a^2 f(x_0, y_0)} - u_1,\quad u_2 = \frac{2y_0}{b^2 f(x_0, y_0)} - v_1$$

ist. Das so erhaltene Geradenpaar schneidet sich außerdem unter rechtem Winkel, wenn die Koeffizienten von ξ^2 und η^2 einander entgegengesetzt gleich sind. Dies tritt ein für

$$\frac{1}{a^2} - \lambda u_1 u_2 + \frac{1}{b^2} - \lambda v_1 v_2 = 0$$

oder nach (36) und (36a) für

$$(37)\quad a^2 b^2 f(x_0, y_0)(u_1^2 + v_1^2) - 2b^2 x_0 u_1 - 2a^2 y_0 v_1 + a^2 + b^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung des gesuchten Kegelschnittes in Linienkoordinaten u_1, v_1. Sie zeigt (vgl. Nr. 196), daß der Punkt P_0 der eine Brennpunkt dieses Kegelschnittes ist. Durch die Transformation $u_1 = u : (x_0 u + y_0 v + 1)$, $v_1 = v : (x_0 u + y_0 v + 1)$ erhält man die Gleichung der Kurve (37) bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem (vgl. Nr. 78), nämlich

$$(38)\qquad \begin{aligned} \varphi(u, v) \equiv a^2 b^2 f(x_0, y_0)(u^2 + v^2) \\ + (x_0 u + y_0 v + 1)(c^2 x_0 u - c^2 y_0 v + a^2 + b^2) = 0. \end{aligned}$$

Wird der gegebene Kegelschnitt f von der ξ-Achse in A und B, von der η-Achse in C und D geschnitten (Fig. 6), so ist das Viereck $ACBDA$ diesem Kegelschnitt eingeschrieben, der Kurve φ umgeschrieben, denn seine Seiten werden von P_0 aus unter rechtem Winkel gesehen. Hieraus folgt, daß die Polaren von P_0 in bezug auf f und in bezug auf φ zusammenfallen; die zum Brennpunkt P_0 des Kegelschnitts φ gehörige Leitlinie ist daher in der Tat die Polare von P_0 in bezug auf f.

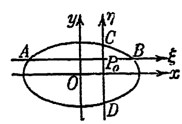


Fig. 6.

Liegt P_0 im Mittelpunkt von f, so berühren die von P_0 aus unter rechtem Winkel erscheinenden Sehnen den Kreis

$$u^2 + v^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2},$$

wie sofort aus (38) für $x_0 = y_0 = 0$ folgt.

Liegt P_0 auf dem Kegelschnitt f, ist also $f(x_0, y_0) = 0$, so geht (38) in die Gleichung eines Punktes

$$c^2 x_0 u - c^2 y_0 v + a^2 + b^2 = 0$$

über, der die Koordinaten hat $x_1 = \frac{c^2 x_0}{a^2 + b^2}$, $y_1 = -\frac{c^2 y_0}{a^2 + b^2}$.

265. *Zieht man an eine Ellipse aus zwei Punkten P_1, P_2 ihrer kleinen Achse die Tangentenpaare, so liegen deren vier Schnittpunkte auf einem Kreis, der durch die Brennpunkte der Ellipse geht. Dieser Kreis trifft die kleine Achse in den Mittelpunkten M', M'' zweier anderen Kreise, die die beiden Tangentenpaare berühren.*

Das von P_1 an die Ellipse gelegte Tangentenpaar sei durch die Gleichungen $u_1 x + v_1 y + 1 = 0$ und $-u_1 x + v_1 y + 1 = 0$ gegeben, in denen die Koeffizienten von x entgegengesetzt gleich sind, weil diese Geraden die x-Achse unter supplementären Winkeln schneiden. Das durch die vier Schnittpunkte der beiden Tangentenpaare bestimmte Kegelschnittbüschel hat die Gleichung

$$(39) \qquad (v_1 y + 1)^2 - u_1^2 x^2 - \lambda \{(v_2 y + 1)^2 - u_2^2 x^2\} = 0,$$

aus der hervorgeht, daß dem Wert $(u_1^2 + v_1^2) : (u_2^2 + v_2^2)$ des Parameters λ der Kreis

$$(40) \qquad \begin{aligned} &(u_2^2 + v_2^2)\{(v_1 y + 1)^2 - u_1^2 x^2\} \\ &- (u_1^2 + v_1^2)\{(v_2 y + 1)^2 - u_2^2 x^2\} = 0 \end{aligned}$$

entspricht.

Eliminiert man u_1 und u_2 aus (39) vermöge der Gleichungen $a^2 u_1^2 + b^2 v_1^2 = 1$, $a^2 u_2^2 + b^2 v_2^2 = 1$ (Nr. 167) und trägt man den angegebenen Wert von λ ein, so ergibt sich als Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - c^2 + 2y \frac{1 - c^2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 0, \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

und bei Einführung der Ordinaten $y_1 = -1 : v_1$, $y_2 = -1 : v_2$ der Punkte P_1, P_2 folgt

$$(41) \qquad x^2 + y^2 - c^2 - 2y \frac{y_1 y_2 - c^2}{y_1 + y_2} = 0.$$

Ein beliebiger Kreis mit dem Mittelpunkt $M'(o \mid y')$ hat in Linienkoordinaten die Gleichung (Nr. 105)

$$(y'v+1)^2 - \varrho'^2(u^2+v^2) = 0.$$

Er berührt die erwähnten beiden Tangentenpaare, falls $(y'v_1+1)^2 - \varrho'^2(u_1{}^2+v_1{}^2) = 0$ und $(y'v_2+1)^2 - \varrho'^2(u_2{}^2+v_2{}^2) = 0$ ist, und hieraus folgt

$$(42)\quad (y'v_1+1)^2(u_2{}^2+v_2{}^2) - (y'v_2+1)^2(u_1{}^2+v_1{}^2) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Punkt M' auf dem Kreis (40) liegt, und entsprechendes gilt von dem schon erwähnten Punkte M''.

266. *Werden einem Kegelschnitt $f(x, y) = 0$ zwei beliebige Dreiecke umgeschrieben, so liegen ihre sechs Ecken auf einem Kegelschnitt k.*[6])

Sind nämlich $s_i(x, y) = 0$ und $t_i(x, y) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die Gleichungen der Seiten der beiden Dreiecke und hat die Verbindungslinie der Berührungspunkte von $s_i = 0$ und $t_i = 0$ die Gleichung $g_i(x, y) = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, so bestehen nach passender Wahl eines Faktors $\varkappa_i$ Identitäten von der Form

$$(43)\quad f(x, y) \equiv s_i(x, y) \cdot t_i(x, y) + \varkappa_i g_i{}^2(x, y), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Aus diesen folgt z. B.

$$\varkappa_1 g_1{}^2(x, y) - \varkappa_2 g_2{}^2(x, y) \equiv s_2(x, y) \cdot t_2(x, y) - s_1(x, y) \cdot t_1(x, y),$$

so daß $\sqrt{\varkappa_1}\, g_1(x, y) \pm \sqrt{\varkappa_2}\, g_2(x, y) = 0$ ein durch den Schnittpunkt S_3 von s_1 und s_2, den Schnittpunkt T_3 von t_1 und t_2 sowie durch (s_1, t_2) und (s_2, t_1) gehendes Geradenpaar darstellt. Gibt man $\sqrt{\varkappa_1}$ das Pluszeichen, so ist die Gleichung der Geraden $S_3 T_3$ von der Form

$$\sqrt{\varkappa_1}\, g_1(x, y) + \varepsilon' \sqrt{\varkappa_2}\, g_2(x, y) = 0,$$

wobei ε' diejenige der beiden Zahlen ± 1 bedeutet, die man $\sqrt{\varkappa_2}$ als Faktor vorsetzen muß, um eben die Gleichung von $S_3 T_3$ zu erhalten. Bei entsprechender Bedeutung von ε'' ist

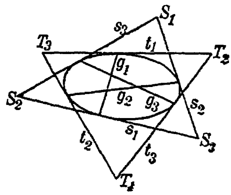


Fig. 7.

$$\varepsilon' \sqrt{\varkappa_2}\, g_2(x, y) + \varepsilon'' \sqrt{\varkappa_3}\, g_3(x, y) = 0$$

die Gleichung von $S_1 T_1$ (Fig. 7) und

$$\varepsilon'' \sqrt{\varkappa_3}\, g_3(x, y) + \sqrt{\varkappa_1}\, g_1(x, y) = 0$$

die Gleichung von $S_2 T_2$. Das durch die Punkte S_1, T_1, S_2, T_2

gehende Kegelschnittbüschel hat nun die Gleichung

$$(\varepsilon'\sqrt{\varkappa_2}g_2 + \varepsilon''\sqrt{\varkappa_3}g_3)(\varepsilon''\sqrt{\varkappa_3}g_3 + \sqrt{\varkappa_1}g_1) + \lambda s_3 t_3 = 0$$

oder

$$(44)\quad (\varepsilon'\sqrt{\varkappa_2}g_2+\varepsilon''\sqrt{\varkappa_3}g_3)(\varepsilon''\sqrt{\varkappa_3}g_3+\sqrt{\varkappa_1}g_1)+\lambda\{f(x,y)-\varkappa_3 g_3^2\},$$

dem Werte 1 des Parameters λ entspricht daher der Kegelschnitt

$$(45)\qquad f(x,y) + \varepsilon'\varepsilon''\sqrt{\varkappa_2}\sqrt{\varkappa_3}g_2 g_3 + \varepsilon''\sqrt{\varkappa_3}\sqrt{\varkappa_1}g_3 g_1 + \varepsilon'\sqrt{\varkappa_1}\sqrt{\varkappa_2}g_1 g_2 = 0.$$

Dies ist der gesuchte Kegelschnitt k, auf dem auch die Punkte S_3 und T_3 liegen, wie sich leicht ergibt, wenn man beachtet, daß ihre Koordinaten die Gleichungen $\sqrt{\varkappa_1}g_1 + \varepsilon'\sqrt{\varkappa_2}g_2 = 0$, $s_1 t_1 \equiv f(x,y) - \varkappa_1 g_1^2 = 0$ und $s_2 t_2 \equiv f(x,y) - \varkappa_2 g_2^2 = 0$ erfüllen.

Es folgt auch sofort, daß es unendlich viele Dreiecke gibt, die dem Kegelschnitt f umgeschrieben, dem Kegelschnitt k eingeschrieben sind. Denn wenn man das eine Dreieck als fest annimmt, das andere so ändert, daß zwei seiner Ecken auf k bleiben, so bleibt auch die dritte Ecke auf k.

Der Satz gestattet eine Erweiterung, die darin besteht, daß man jedes der Tangentenpaare s_i, t_i durch je einen die Kurve f doppelt berührenden Kegelschnitt χ_i ersetzt. Alsdann entstehen *Bogendreiecke*, deren Seiten durch Bogen der doppelt berührenden Kegelschnitte gebildet werden; die Ecken zweier solcher Dreiecke liegen wieder auf einem Kegelschnitt k.

Wählt man ferner für die Kurve χ_1 einen Kreis, der f doppelt berührt, für χ_2 eine vom Brennpunkt F_1 und eine von einem beliebigen Punkt P an f gelegte Tangente, für χ_3 die zweiten Tangenten, die man von F_1 und von P aus noch ziehen kann, so werden die früher erwähnten sechs Punkte durch P, F_1, die beiden imaginären Kreispunkte und zwei weitere Punkte A und B gebildet, die auf dem Kreis χ_1 und auf je einer der zwei von P aus an den Kegelschnitt f gezogenen Tangenten liegen (Fig. 8). Der durch A, B und P bestimmte Kreis k geht daher auch durch den

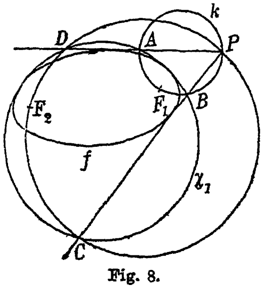


Fig. 8.

Brennpunkt F_1, und die Winkel PAF_1 und PBF_1 betragen zusammen zwei Rechte.

Hält man die Tangente DA fest, ändert aber auf ihr die Lage des Punktes P, so ändert sich auch die Tangente BC, an ihre Stelle tritt eine Gerade $PB'C'$, die den Kreis χ_1 in B' und C' schneidet, aber der Winkel $PB'F_1$ ist konstant, und zwar gleich $180^0 - \sphericalangle PAF_1$. Umgekehrt ist der den Kegelschnitt f doppelt berührende Kreis χ_1 der Ort für die Fußpunkte der Geraden, die vom Brennpunkt F_1 nach den Tangenten von f unter konstantem Winkel gezogen werden.

267. *Wenn drei Kegelschnitte in doppelter Berührung mit einem vierten Kegelschnitt sind, so gehen die Schnittsehnen der drei Paare, die sich auf einer Berührungssehne schneiden, viermal zu je dreien durch einen Punkt.*

Denn, sind die Gleichungen der Kegelschnitte von der Form

$$(46) \qquad f + s_1^2 = 0, \quad f + s_2^2 = 0, \quad f + s_3^2 = 0,$$

so sind die ihrer Schnittsehnen, zu dreien geordnet

$$\begin{aligned}
&s_1 - s_2 = 0, \quad s_2 - s_3 = 0, \quad s_3 - s_1 = 0;\\
&s_1 + s_2 = 0, \quad s_2 + s_3 = 0, \quad s_3 - s_1 = 0;\\
&s_1 + s_2 = 0, \quad s_2 - s_3 = 0, \quad s_{,} + s_1 = 0;\\
&s_1 - s_2 = 0, \quad s_2 + s_3 = 0, \quad s_3 + s_1 = 0.
\end{aligned}$$

Wie in Nr. 261 können besondere Fälle dieses Satzes gebildet werden, indem man voraussetzt, daß einer der Kegelschnitte (46) oder mehrere von ihnen zerfallen. So z. B. bezeichnet $f = 0$, wenn dieser Kegelschnitt in ein Geradenpaar ausartet, zwei gemeinschaftliche Tangenten der Kegelschnitte $f + s_2^2 = 0$, $f + s_3^2 = 0$; wenn dann $s_1 = 0$ eine durch den Schnittpunkt dieser Tangenten gehende Gerade ausdrückt, so zerfällt auch $f + s_1^2 = 0$ in ein Paar von Geraden, die durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten gehen. *Wenn man durch den Schnittpunkt von zwei gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte ein Paar von Geraden zieht, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem ersten und zweiten Kegelschnitt in Punkten einer der Schnittsehnen der Kegelschnitte. Insbesondere schneiden*

sich die Tangenten in den Schnittpunkten jener Geraden mit den Kegelschnitten in einer der Schnittsehnen.

268. **Satz von Brianchon.** Wenn die durch $f+s_1^2=0$, $f+s_2^2=0$, $f+s_3^2=0$ dargestellten Kegelschnitte sämtlich in Geradenpaare zerfallen, so bilden sie ein dem Kegelschnitt $f=0$ umgeschriebenes Sechsseit; die Schnittsehnen sind Diagonalen dieses Sechsseits, und man erhält den *Satz von Brianchon:*[7] *in jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechsseit schneiden sich die drei Verbindungsgeraden der Gegenecken in einem Punkte.* Wenn die Seiten des Sechsseits in irgend einer Reihenfolge durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet werden, so sind die Verbindungslinien der Schnittpunkte 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 die im Satze bezeichneten Diagonalen, deren Schnittpunkt der zu dieser Reihenfolge gehörige *Brianchonsche Punkt* heißt.

Durch Vertauschung der Reihenfolge der Seiten des Sechsseits lassen sich aber aus ihnen $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ d. i. 60 *verschiedene Brianchonsche Sechsseite* bilden, und für jedes derselben gilt der ausgesprochene Satz, für jedes gibt es einen Brianchonschen Punkt.

Der Beweis kann auch folgendermaßen (vgl. Nr. 261, 3) geführt werden. Sind

$$t_1t_4-s_1^2=0,\quad t_2t_5-s_2^2=0,\quad t_3t_6-s_3^2=0$$

äquivalente Formen der Gleichung des Kegelschnittes $f=0$, so stellen $s_1-s_2=0$, $s_2-s_3=0$, $s_3-s_1=0$ drei Diagonalen dar, die sich in einem Punkte schneiden. Da aber kein Kriterium dafür gegeben ist, ob die Gleichung $s_1=+s_2$ die Diagonale (12)(45) oder die Diagonale (15)(24) des Vierseits $t_1t_4t_2t_5$ darstellt, so beweist dieser Schluß nur, daß die Verbindungslinien der Punkte 12 und 45, 23 und 56 sich entweder in der Verbindungsgeraden von 34 und 61 oder von 13 und 46 begegnen. Wäre jedoch dies letzte der Fall, so würden die Dreiseite 1, 2, 3 und 4, 5, 6 perspektiv kollinear liegen (Nr. 67, 4), daher die Schnittpunkte von 1, 4; 2, 5; 3, 6 in einer Geraden enthalten sein; wenn wir also fünf von diesen Tangenten bestimmen, so müßte die sechste durch

einen festen Punkt gehen, statt einen Kegelschnitt zu umhüllen. Also ist nur die erste Folgerung zulässig.

269. **Der Satz von Brianchon bietet das Mittel,** *aus fünf gegebenen Tangenten eines Kegelschnittes alle seine Tangenten zu konstruieren.* Dabei dürfen keine drei der Tangenten durch einen Punkt gehen, da sonst die Kurve in ein Punktepaar ausartet.

Wenn wir nämlich auf einer von ihnen, etwa 1, einen Punkt P annehmen, so können wir die zweite Tangente 6 des Kegelschnittes von P aus mit Hilfe dieses Satzes bestimmen: die Verbindungslinien der Punktepaare 12, 45; 23, 56; 34, 61 schneiden sich in einem Punkte O; nach der Voraussetzung sind die Geraden 12, 45 und 34, 61 d. i. 34, P bekannt, somit auch ihr Schnittpunkt O; zieht man daher die Gerade O, 23, so schneidet diese die Tangente 5 in einem Punkte Q, der der Tangente 6 aus P ebenfalls angehört; PQ ist also diese Tangente 6. Man kann sagen: *Die Tangente* 6 *ist die Basis eines veränderlichen Dreiseits, dessen Basisecken sich auf den festen Geraden* 1 *und* 5 *bewegen, während sein Scheitel die Gerade* 12, 45 *beschreibt, und seine Seiten sich um die festen Punkte* 23 *und* 34 *drehen.*

Es fordert nur eine besondere Anwendung dieser Methode, um *aus fünf Tangenten* 1, 2, 3, 4, 5 *eines Kegelschnittes den Berührungspunkt T einer unter ihnen, z. B. von* 1, *zu ermitteln.*

Man läßt die sechste Tangente 6 mit 1 zusammenfallen, zieht alsdann die Gerade 12, 45 und schneidet sie mit 23, 56 oder 51 in O, zieht dann 34, O und erhält T als Schnittpunkt von 1 ($\equiv$ 6) mit 34, O. So sind also auch die *Punkte* des Kegelschnitts zu konstruieren und man erkennt, daß die Angabe einer Tangente *mit* ihrem Berührungspunkt der von *zwei* Tangenten äquivalent ist.

Weil die Konstruktion nur Schnittpunkte von Geraden und Verbindungsgeraden von Punkten benutzt, nennt man sie linear. *Aus fünf Tangenten ist eine Kurve zweiter Klasse durch lineare Konstruktion bestimmt.* Die Konstruktion nimmt nützliche besondere Formen an, wenn sich unter den Tan-

genten der Mittelpunktskurven eine Asymptote, bei der Parabel die unendlich ferne Gerade befindet.

B. 1) Man soll zu fünf Tangenten den Mittelpunkt des Kegelschnittes bestimmen.

Hierzu ist nur nötig, die zu einer der gegebenen parallele Tangente (P unendlich fern) und für diese beiden die Berührungspunkte zu konstruieren; ihre Verbindungslinie ist ein Durchmesser, sein Halbierungspunkt der Mittelpunkt.

2) Man konstruiere die Hyperbel aus einer Asymptote und drei Tangenten.

Da durch die Asymptote auch ihr Berührungspunkt gegeben ist, vertritt sie zwei Tangenten.

3) Welches ist die einfachste Konstruktion der Hyperbel aus den beiden Asymptoten und einer Tangente?

4) Man zeige als Sonderfall der Konstruktion, daß der zwischen den Asymptoten gelegene Abschnitt einer Tangente durch den Berührungspunkt halbiert wird (Nr. 174).

5) Man konstruiere eine Parabel aus vier Tangenten, insbesondere ihren Berührungspunkt mit einer derselben.

270. **Kegelschnittschar.** Die Brianchonsche Konstruktion zeigt deutlich, daß von den Kegelschnitten mit vier festen Tangenten nur einer eine gegebene Gerade der Ebene berührt. Wenn wir die Gleichung eines solchen Kegelschnittes in Linienkoordinaten schreiben, so muß sie also eine unbestimmte Konstante linear enthalten, da diese durch Einsetzung eines Wertepaares $u' \mid v'$ eindeutig bestimmt sein muß. Daher haben wir nach dem Dualitätsprinzip das Recht, die symbolischen Formeln auch nach Linienkoordinaten zu deuten (Nr. 82).

Bedeuten $\varphi(u, v) = 0$, $\chi(u, v) = 0$ die Tangentialgleichungen zweier Kegelschnitte, *so stellt die einen Parameter λ linear enthaltende Gleichung*

$$(47) \qquad \varphi(u, v) - \lambda\chi(u, v) = 0$$

*jeden Kegelschnitt dar, der die gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $\varphi = 0$, $\chi = 0$ berührt. Man nennt das System der einem Vierseit der Grundtangenten eingeschriebenen Kegelschnitte eine Kegelschnittschar. Büschel und Schar sind duale Begriffe.**) Wir kennen ein Beispiel schon in der Schar der konfokalen Kegelschnitte (Nr. 232).

---

*) Wir wollen diese Gegenüberstellung festhalten, obwohl häufig

Der Parameter kann wiederum auf dreifache Weise so bestimmt werden, daß die linke Seite $\varphi - \lambda\chi$ von (47) in lineare Faktoren $\sigma_1(u, v)$, $\sigma_2(u, v)$ zerfällt (Nr. 251). Dies geschieht aber, sobald eine fünfte Tangente gegeben ist, die durch eine Ecke des Vierseits geht. *Also sind in dem vollständigen Grundvierseit die drei Gegeneckenpaare zerfallende Kegelschnitte der Schar.* Eines derselben ist stets reell.

Daher kann die Gleichung einer Schar stets in der Form geschrieben werden (Nr. 256)

$$\varphi - \lambda\sigma_1\sigma_2 = 0, \tag{48}$$

wo $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ reelle Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangentenpaare darstellen. Die Tangentialgleichung eines einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnittes ist von der Form (Nr. 256):

$$\sigma_3\sigma_4 - \lambda\sigma_1\sigma_2 = 0. \tag{49}$$

Die Kegelschnitte $\varphi - \lambda\sigma_1\sigma_2 = 0$ berühren $\varphi = 0$, wenn entweder einer der Punkte $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ auf dem Kegelschnitt $\varphi = 0$ liegt oder die Verbindungsgerade von beiden denselben berührt (Nr. 257).

Die Kegelschnitte $\varphi = 0$ und $\varphi - \lambda\sigma^2 = 0$ berühren einander doppelt, so daß $\sigma = 0$ den Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten, den Berührungspol bezeichnet. Während im allgemeinen zwei Kegelschnitte ein Büschel und eine Schar als ganz verschiedene Systeme bestimmen, *bilden doppeltberührende Kegelschnitte gleichzeitig ein Büschel und eine Schar.* Sind insbesondere $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ die Berührungspunkte, $\sigma_1\sigma_2 = 0$ also ein zerfallender Kegelschnitt der Schar, so läßt sich diese auch in der Gleichungsform darstellen

$$\sigma_1\sigma_2 - \lambda\sigma^2 = 0. \tag{50}$$

Ferner liefert Nr. 267 den Satz: Wenn drei Kegelschnitte in doppelter Berührung mit einem vierten sind, so liegen die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangentenpaare viermal zu dreien in einer Geraden. Man erkennt schon, daß dies auf

---

auch jedes lineare System von Kurven als *eine Kurvenschar* bezeichnet wird, gleichgültig ob diese Kurven Orte von Punkten oder Hüllkurven von Geraden sind.

einen zum Brianchonschen dualen Satz führen muß, den wir in Nr. 275 auf anderem Wege entwickeln.

Namentlich aber ist die ganze Polarentheorie dual übertragbar. Denn nach der Definition des Teilverhältnisses in einer Punktreihe $u - \lambda u' \mid v - \lambda v'$ in Nr. 80 gibt die Einsetzung dieser Koordinaten in eine Gleichung zweiten Grades $\varphi = 0$ und die Bedingung, daß der Koeffizient von λ in dem Substitutionsergebnis verschwinde, die Beziehung (Nr. 135)

$$(51) \quad A_{11}u'u + A_{12}(u'v + v'u) + A_{22}v'v + A_{13}(u' + u) + A_{23}(v' + v) + A_{33} = 0.$$

Ersetzen wir also A_{11} usw. durch $A_{11} - \lambda A'_{11}$ usw., so sehen wir: *Die Pole einer Geraden in bezug auf die Kegelschnitte einer Schar bilden eine gerade Punktreihe.* Die einander so zugeordneten Geraden heißen doppelt konjugierte Polaren. Ein Sonderfall hiervon ist der Satz: *Der Ort der Mittelpunkte der einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ist eine Gerade*; nach Nr. 139 sind die Koordinaten der Mittelpunkte

$$\frac{A_{13} - \lambda A_{13}'}{A_{33} - \lambda A_{33}'} \,\Big|\, \frac{A_{23} - \lambda A_{23}'}{A_{33} - \lambda A_{33}'}.$$

Weil die drei Gegeneckenpaare des Grundvierseits Kegelschnitte der Schar sind, die die Mitten der von ihnen begrenzten Strecken zu Mittelpunkten haben, so geht die Mittelpunktsgerade durch diese.

Wie beim Kegelschnittbüschel der Schnittpunkt eines jeden der drei im Büschel enthaltenen Geradenpaare nach Nr. 253 eine Ecke des zugehörigen Poldreiecks ist, so *stellt jetzt jeder Träger der drei in der Schar befindlichen Punktepaare eine Seite des zugehörigen Poldreiseits dar.*

271. **Lineare Kegelschnittsysteme.** Die symbolische Bezeichnung führt über die Betrachtung des durch zwei Kegelschnitte bestimmten Systems (Büschel und Schar) hinaus. Besteht zwischen den Gleichungen von drei Kegelschnitten in Punktkoordinaten $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0$ keine identische, lineare Beziehung, so heißen diese *linear unabhängig.* Bezeichnen ferner $\lambda' = \lambda : \varkappa$, $\mu' = \mu : \varkappa$ zwei durchaus willkürliche Parameter, so bilden die Kegelschnitte, deren Gleichungen in der Form

$$\varkappa f + \lambda g + \mu h = 0$$

enthalten sind, ein System, das wir nach Analogie von Nr. 122 ein *Kegelschnittnetz* nennen. Unter den Kegelschnitten eines solchen Netzes befinden sich noch unendlich viele, die durch einen gegebenen Punkt gehen und zwar bilden diese ein Büschel. Denn durch Einsetzung der Koordinaten des Punktes gewinnen wir eine Gleichung, die $\mu : \varkappa$ linear durch $\lambda : \varkappa$ auszudrücken gestattet, dürfen also nur noch *einen* linearen Parameter als willkürlich betrachten (Nr. 249).

Da das Netz unendlich viele Büschel enthält, sagt man, es umfasse zweifach unendlich viele Kurven oder *das Netz ist ein lineares Kegelschnittsystem zweiter Stufe*, das Büschel ein solches *erster Stufe.* Die Kegelschnitte des Netzes hängen statt von fünf nur von zwei willkürlichen Konstanten ab; also müssen die fünf Konstanten eines jeden drei linearen, unabhängigen Bedingungen genügen, wie aus der Algebra der linearen Gleichungen bekannt ist. Man kann das drei gegebenen linearen Bedingungen genügende Netz dadurch bilden, daß man drei Koeffizientengruppen a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} bestimmt, die denselben genügen, denn dann befriedigen auch $\varkappa a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}$ dieselben. Somit bilden alle durch drei Punkte gehenden Kegelschnitte ein Netz, aber dies sind *nicht* mehr allgemeine Netze, da *drei* beliebig gewählte Kegelschnitte $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ keine Punkte gemein haben.

Setzen wir die Kurven als Tangentengebilde voraus, so gelten dieselben Betrachtungen dual. Sind $\varphi(u, v) = 0$, $\chi(u, v) = 0$, $\psi(u, v) = 0$ die Tangentialgleichungen von drei Kegelschnitten, die nicht derselben Schar angehören, so stellt auch

$$\varkappa\varphi + \lambda\chi + \mu\psi = 0 \tag{52}$$

ein lineares Kegelschnittsystem zweiter Stufe dar, das man als *Kegelschnittgewebe* bezeichnet. Die Kurven desselben genügen drei für die Koeffizienten A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} (Nr. 149) linearen Bedingungen, können in besonderen Systemen z. B. drei feste Geraden berühren. Solchen Systemen sind wir in der Lehre vom Kreise nicht begegnet, weil es nicht unendlich viele Kegelschnitte gibt, die durch zwei feste Punkte gehen und drei weiteren Bedingungen genügen.

Sind nun ferner $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$, $k = 0$ bez. $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$, $\omega = 0$ vier Kegelschnitte, die nicht demselben Netz bez. Gewebe angehören, so stellen die drei *unabhängige* Parameter enthaltenden Gleichungen

$$\varkappa f + \lambda g + \mu h + \nu k = 0, \tag{53}$$

bez.

$$\varkappa\varphi + \lambda\chi + \mu\psi + \nu\omega = 0 \tag{54}$$

lineare Systeme dritter Stufe dar, die unendlich viele Netze bez. Gewebe enthalten. Und endlich kann man genau so zu *Kegelschnittsystemen vierter Stufe* aufsteigen, die noch einer einzigen linearen Bedingung genügen und durch fünf Kurven bestimmt sind, die nicht einem System dritter Stufe angehören. Man muß die Systeme unterscheiden, je nachdem man die Kegelschnitte als Punkt- oder Tangentengebilde, in Punkt- oder Linienkoordinaten gegeben denkt, etwa *in punktuell-lineare und in tangentiell-lineare Systeme.*

Durch die Gleichungen von sechs ganz beliebigen Kegelschnitten läßt sich demnach die eines jeden vorgelegten Kegelschnittes linear darstellen, denn es sind dann fünf Konstanten verfügbar.

272. *Wenn drei Kegelschnitte dieselben zwei Punkte gemein haben, so gehen ihre drei Schnittsehnen, die keinen dieser Punkte enthalten, durch einen Punkt.*

Ist $f = 0$ die Gleichung des einen Kegelschnittes, $s = 0$ die Gleichung der allen gemeinsamen Sehne, so sind die Gleichungen der beiden andern Kegelschnitte von der Form $f + ss_1 = 0$, $f + ss_2 = 0$, die Gleichung ihrer Schnittsehnen ist daher $s(s_1 - s_2) = 0$; die Gerade $s_1 - s_2 = 0$ geht aber durch den Punkt $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Daher gilt der Satz für alle Kegelschnitte des durch die drei bestimmten besonderen Netzes $f + s(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) = 0$.

Der Satz ist für diese Kegelschnitte eine Erweiterung des Satzes über die Potenzlinien von drei Kreisen (Nr. 116), da diese die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene zur gemeinschaftlichen Sehne haben. Der Satz von Nr. 267 erscheint als fernere Erweiterung desselben: drei Kegelschnitte, die mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, haben

vier Potenzmittelpunkte, in deren jedem sich drei ihrer gemeinschaftlichen Sehnen schneiden. An die Stelle des sie alle doppelt berührenden Kegelschnittes treten im Falle der Kreise die zwei Punkte, die ihnen allen gemeinsam sind. Unser Satz kann wie in Nr. 116 so ausgesprochen werden: *Die Kegelschnitte eines Büschels bestimmen mit einem festen, durch zwei der Grundpunkte gehenden Kegelschnitte Schnittsehnen durch einen festen Punkt.*[8]) Man erkennt so, daß zahlreiche frühere Sätze besondere Formen allgemeinerer Sätze über Kegelschnitte durch zwei feste Punkte sind.

B. Durch die Voraussetzung, daß einer der drei Kegelschnitte in ein Geradenpaar OA, OB ausartet, entsteht der Satz: Wenn man durch zwei Schnittpunkte A, B von zwei Kegelschnitten Geraden zieht, die diese in den ferneren Punktepaaren P, p bez. Q, q schneiden, so schneiden sich die Sehnen PQ, pq in der zweiten Schnittsehne CD der Kegelschnitte (Fig. 9).

Der Satz gilt insbesondere noch, wenn A, B in einen Berührungspunkt der zwei Kegelschnitte zusammenrücken; er ist dann auch ein besonderer Fall eines in Nr. 267 gegebenen Satzes, weil einer der Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei sich berührenden Kegelschnitten in den Berührungspunkt fällt.

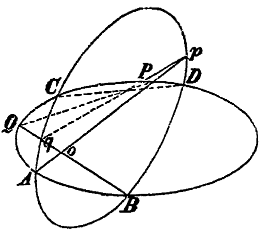


Fig. 9.

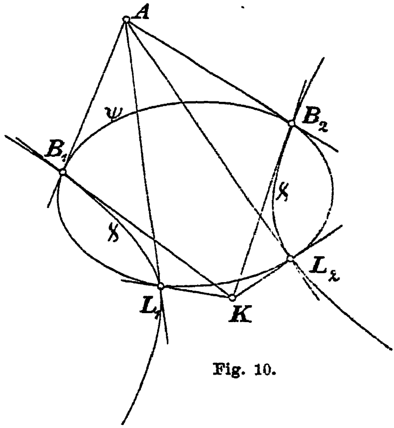


Fig. 10.

273.*) *Legt man an einen Kegelschnitt $\psi(u, v) = 0$ aus zwei Punkten A und K die Tangenten, die ihn in B_1, B_2 bez. in L_1, L_2 berühren mögen, so gibt es einen durch die vier Punkte*

*) Den Inhalt von 273 und 274 verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn K. Rohn in Leipzig. Vgl. auch dessen Abhandlung im Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver., Bd. 16 (1907), S. 371—375.

B_1, B_2, L_1, L_2 *gehenden Kegelschnitt* $\chi(u,v)=0$, *dessen in* B_1 *und* B_2 *gezogene Tangenten durch* K *gehen, während sich die in* L_1 *und* L_2 *gezogenen Tangenten in* A *schneiden.* (Fig. 10.)

Sind $A(u, v) = 0$, $K(u, v) = 0$, $B_1(u, v) = 0$ usw. die Gleichungen der Punkte A, K, B_1 usw., in denen die absoluten Glieder gleich $+1$ sind, ist also z. B. $B_1(u, v) \equiv \beta_1'u + \beta_1''v + 1$, so bestehen die zwei Identitäten

$$(1-\lambda)\psi(u, v) \equiv B_1(u, v) \cdot B_2(u, v) - \lambda A^2(u, v) = 0$$
$$(1-\mu)\psi(u, v) \equiv L_1(u, v) \cdot L_2(u, v) - \mu K^2(u, v) = 0,$$

und hieraus folgt

(55) $(1-\mu)B_1 \cdot B_2 + \mu(1-\lambda)K^2 \equiv (1-\lambda)L_1 \cdot L_2 + \lambda(1-\mu)A^2$.

Der Kegelschnitt

$$(1-\lambda\mu)\chi(u, v) \equiv (1-\mu)B_1 B_2 + \mu(1-\lambda)K^2 = 0$$

berührt nun die Geraden KB_1 und KB_2 in B_1 bez. B_2 (Nr. 270) und infolge der Identität (55) berührt er auch die Geraden AL_1 und AL_2 in L_1 und L_2.

274. *Sind* A_1, A_2; B_1, B_2; F_1, F_2 *drei Punktepaare von solcher Beschaffenheit, daß ein Kegelschnitt* ψ *mit den Tangenten* A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2 *die Punkte* F_1, F_2 *zu Brennpunkten hat, so gibt es auch einen Kegelschnitt* χ *der* A_1, A_2 *zu Brennpunkten hat und die Geraden* B_1F_1, B_1F_2, B_2F_1, B_2F_2 *berührt und ebenso einen Kegelschnitt mit den Brennpunkten* B_1, B_2 *und den Tangenten* A_1F_1, A_1F_2, A_2F_1, A_2F_2.[9]) Fig. 11.

Unter Anwendung der analogen Bezeichnungsweise wie in Nr. 273 ist (Nr. 270)

(56) $\qquad (1-\lambda)\psi(u, v) \equiv A_1 A_2 - \lambda B_1 B_2 = 0.$

Sind $F_1(u, v) \equiv \pi_1'u + \pi_1''v + 1 = 0$ und $F_2(u, v) \equiv \pi_2'u + \pi_2''v + 1 = 0$ die Gleichungen der Brennpunkte F_1, F_2, so ist auch

(57) $\qquad \psi(u, v) \equiv F_1 F_2 - \mu(u^2 + v^2) = 0,$

denn man kann F_1 und F_2 als Schnittpunkte der von den beiden imaginären Kreispunkten $u^2 + v^2 = 0$ an die Kurve $\psi(u, v) = 0$ gelegten Tangentenpaare auffassen (Nr. 181). Aus (56) und (57) folgt

$$A_1 A_2 + \mu(1-\lambda)(u^2 + v^2) \equiv (1-\lambda)F_1 F_2 + \lambda B_1 B_2 = 0,$$

und dieser Kegelschnitt hat A_1, A_2 zu Brennpunkten, die Geraden B_1F_1, B_1F_2, B_2F_1, B_2F_2 zu Tangenten.

Ferner ist

$$\lambda B_1 B_2 - \mu(1-\lambda)(u^2+v^2) \equiv A_1 A_2 - (1-\lambda) F_1 F_2 = 0, \text{ usw.}$$

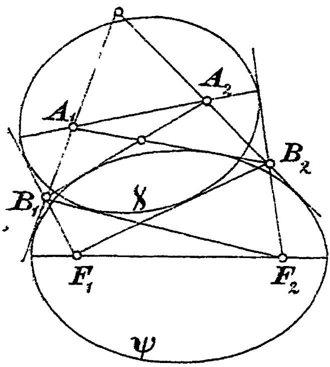


Fig 11.

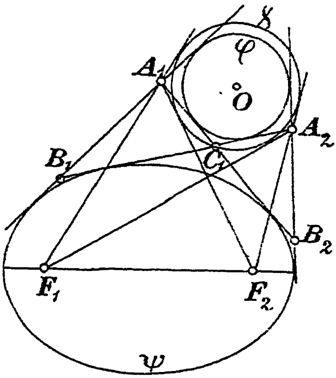


Fig. 12.

Einer Ellipse $\psi(u,v)=0$ und einem Kreis $\varphi(u,v)=0$ werde das gemeinsame Tangentenvierseit umgeschrieben, dessen Gegenecken mit A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 bezeichnet sein sollen. Sind F_1, F_2 die Brennpunkte von ψ und zieht man aus ihnen die Brennstrahlen nach A_1 und A_2, so berühren diese einen zu φ konzentrischen Kreis χ.[10] Fig. 12.

Zunächst hat man

$$(1-\lambda)\psi \equiv A_1 A_2 - \lambda B_1 B_2 = 0,$$
$$(1-\mu)\varphi \equiv A_1 A_2 - \mu B_1 B_2 = 0.$$

Ferner ist

$$\psi \equiv F_1 F_2 - \varrho(u^2+v^2) = 0,$$

und wenn $M(u,v)=0$ die Gleichung des Mittelpunktes des Kreises φ darstellt, hat man

$$\varphi \equiv M^2 - \sigma(u^2+v^2) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$A_1 A_2 - \lambda B_1 B_2 \equiv (1-\lambda) F_1 F_2 - \varrho(1-\lambda)(u^2+v^2),$$
$$A_1 A_2 - \mu B_1 B_2 \equiv (1-\mu) M^2 - \sigma(1-\mu)(u^2+v^2),$$

und durch Elimination von $B_1 B_2$ ergibt sich

$$(\mu-\lambda) A_1 A_2 - \mu(1-\lambda) F_1 F_2$$
$$\equiv \lambda(\mu-1) M^2 + \{\sigma\lambda(1-\mu) - \varrho\mu(1-\lambda)\}(u^2+v^2) = 0.$$

Diese Identität bez. Gleichung sagt aus, daß es einen Kreis

gibt, der die Geraden A_1F_1, A_1F_2, A_2F_1 und A_2F_2 berührt und M zum Mittelpunkt hat.

275. **Satz von Pascal:** [11]) *Die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks liegen in einer Geraden, der Pascalschen Geraden desselben.*

Wir bezeichnen die Ecken des Sechsecks durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 und wollen durch $s_{12} = 0$ die Gleichung der Verbindungsgeraden von 1 mit 2 ausdrücken, usw.; dann muß die Gleichung des Kegelschnittes, da er dem Viereck 1234 umgeschrieben ist, sich in der Form schreiben lassen

(58) $$s_{12}s_{34} - s_{23}s_{14} = 0 \text{ (Nr. 256)};$$

da er auch dem Viereck 4561 umgeschrieben ist, so muß dieselbe Gleichung in der Form auszudrücken sein

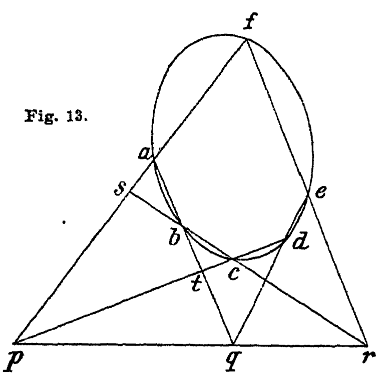
(59) $$s_{45}s_{61} - s_{56}s_{14} = 0.$$

Die Identität beider Ausdrucksformen gibt die Gleichung

(60) $$s_{12}s_{34} - s_{45}s_{61} \equiv s_{14}(s_{23} - s_{56}) = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung, die, gleich Null gesetzt, ihrer Form zufolge eine dem Viereck der Punkte 1; 4; 12, 45; 34, 61 umgeschriebene Kurve zweiter Ordnung darstellt, muß somit in zwei Faktoren zerlegbar sein, die nur die Diagonalen dieses Vierecks darstellen können. Nun ist $s_{14} = 0$ diejenige Diagonale, die die Ecken 1 und 4 verbindet, also muß $s_{23} - s_{56} = 0$ die andere Diagonale sein, die die Ecken 12, 45; 34, 61 miteinander verbindet. Da aber die Form ihrer Gleichung sie als eine durch den Punkt 23, 56 gehende Gerade kennzeichnet, so liegen notwendig die drei Punkte 12, 45; 23, 56; 34, 61 in einer Geraden. [12])

Fig. 13.



Vgl. Fig. 13, in der die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit a, b, c, d, e, f und die Schnittpunkte der Gegenseiten mit p, q, r bezeichnet sind.

B. 1) Wenn A, B, C drei Punkte einer Geraden und A', B', C' drei Punkte einer andern Geraden sind, so liegen die Schnittpunkte $BC' \mid B'C$, $CA' \mid C'A$, $AB' \mid A'B$ in einer Geraden. (Satz von Pappus.)[13])

Dieser Sonderfall des Pascalschen Satzes gilt auch dann noch, wenn die zweite Gerade unendlich fern ist, also die Linienpaare BC', $C'A$; CA', $A'B$; AB', $B'C$ parallel zu drei verschiedenen Geraden gezogen sind.

2) Wenn man vier Geraden auf alle Arten zu dreien kombiniert, so entstehen vier Dreiseite, deren Höhenschnittpunkte in einer Geraden liegen.[14])

Sind a, b, c, d die vier Geraden und a', b', c', d' die zu ihnen rechtwinkligen Geraden der Konstruktion, so ergibt sich der Beweis durch die Anwendung des Satzes von 1) auf die drei Schnittpunkte von a, b, c mit d und die drei unendlich entfernten Punkte von a', b', c'. Der Satz folgt auch aus dem Steinerschen Satze in Nr. 213, 1, denn die vier Höhenschnittpunkte müssen in der Leitlinie der Parabel liegen, die die vier Geraden zu Tangenten hat. Die Verbindungslinie der Mitten zwischen den Paaren der Gegenecken des Vierseits der vier Tangenten ist zur Achse dieser Parabel parallel, also auf der vorigen Geraden rechtwinklig.

3) Der angezogene Satz von Steiner ist selbst ein Sonderfall des Satzes von Brianchon; denn sind a, b, c drei Tangenten der Parabel, und bezeichnen a', b', c' drei zu ihnen rechtwinklige Tangenten, ist überdies g_∞ die unendlich ferne Gerade, so betrachten wir die sechs Tangenten $a, b, c, c', g_\infty, a'$ und sehen, daß sich die Geraden ab, $c'g_\infty$; bc, $a'g_\infty$; cc', aa' in einem Punkte schneiden; von ihnen sind aber die beiden ersten Höhen des betrachteten Dreiseits a, b, c, und die letzte ist die Leitlinie, in der sich jedes Paar rechtwinkliger Tangenten schneidet (Nr. 211).[15])

276. **Der Pascalsche Satz gestattet,** *aus fünf Punkten eines Kegelschnittes beliebig viele weitere Punkte desselben zu konstruieren.* Dabei sollen keine drei Punkte in einer Geraden liegen, da sonst die Gerade dieser drei Punkte und die Verbindungslinie der beiden übrigen einen in ein Geradenpaar ausgearteten Kegelschnitt bilden würden.

Wenn wir nämlich irgend eine Gerade g oder 16 durch einen, etwa den ersten der gegebenen Punkte 1, 2, 3, 4, 5 ziehen, so können wir den Punkt 6 bestimmen, in dem sie den Kegelschnitt ferner schneidet, und so beliebig viele Punkte des Kegelschnittes erhalten. Die Schnittpunkte von 12 und

45, 23 und 56, 34 und 61 liegen ja in derselben Geraden p, und nach der Voraussetzung sind die Punkte 12, 45 und 34, 61 (g), also auch die Gerade p bekannt; somit bestimmt die Verbindungslinie von 5 mit dem Schnittpunkt von p und 23 auf der Geraden g (16) den Punkt 6. Mit andern Worten: *Der Punkt* 6 *ist die Spitze eines veränderlichen Dreiecks, dessen Seiten bez. Basis durch feste Punkte* 1, 5 *bez.* 12, 45 *gehen, während sich seine Basisecken längs fester Geraden* 23, 34 *bewegen.* (Vgl. Nr. 49, 2, 3.)[16])

Diese Konstruktion liefert, wenn man zwei Nachbarpunkte zusammenfallen läßt, *die Tangente t in einem von fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnittes.* Nennt man z. B. 1 zugleich 6, so verbindet p die Punkte 12, 45 und 23, 56 (51) und im Schnittpunkt von p mit 34 erhält man einen Punkt der Tangente 16.

Aus fünf Punkten ist eine Kurve zweiter Ordnung durch lineare Konstruktion bestimmt und zwar zählt die Angabe eines Punktes nebst der in ihm berührenden Tangente für zwei Punkte (vgl. Nr. 269). Einfache Sonderfälle bietet die Benutzung der unendlich fernen Punkte.

Der Brianchonsche Punkt eines dem Kegelschnitte umgeschriebenen Sechsseits ist der Pol der Pascalschen Geraden des Sechsecks der Berührungspunkte. Denn, geben wir der Tangente und dem Berührungspunkt dieselbe Bezeichnung, nennen also Sechsseit wie Sechseck 123456, so ist die Verbindungsgerade der Tangentenschnittpunkte 12, 45 die Polare des Schnittpunktes der Verbindungsgeraden 12, 45 der Berührungspunkte, usw. (Nr. 135).

Dieser Satz könnte umgekehrt als eine bloße Folgerung aus der Polarentheorie dazu dienen, um aus dem Satze von Pascal den von Brianchon abzuleiten oder umgekehrt. Jedoch leistet dies schon das Dualitätsprinzip von Nr. 82. Nach allem früheren darf jeder rein beschreibende Satz, der von Punkten einer Kurve zweiter Ordnung handelt, unmittelbar auch für die Tangenten einer Kurve zweiter Klasse dual ausgesprochen werden (vgl. Nr. 270). Unser Satz gibt aber eine konstruktiv spezialisierte duale Beziehung, die uns erlaubt, die

weiteren Überlegungen an der Pascalschen Figur allein durchzuführen.

Ein sehr nützlicher Sonderfall des Satzes entsteht durch Zusammenfallen der Seiten- bez. Punktepaare 12, 34, 56: *In einem umgeschriebenen Dreieck schneiden sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Gegenecken in einem Punkte* O, *und die Schnittpunkte der Berührungssehnen mit den Gegenseiten liegen auf der Polare oder der Harmonikale* o (Nr. 67, 1) *von* O.

B. 1) Aus fünf Punkten 1, 2, 3, 4, 5 eines Kegelschnittes seinen Mittelpunkt zu bestimmen.

Man ziehe die Gerade 16 parallel zu 34 und bestimme den auf ihr gelegenen Punkt 6 des Kegelschnittes; dann sind 34 und 16 zwei parallele Sehnen, und die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte ist ein Durchmesser. Indem man ebenso auf 56′ parallel 23 den Punkt 6′ des Kegelschnittes bestimmt, findet man einen zweiten Durchmesser und damit den Mittelpunkt.

2) Man konstruiere die Hyperbel aus den Asymptotenrichtungen 1, 2 und drei Punkten 3, 4, 5.

3) Man konstruiere sie aus den Asymptoten und einem Punkte, insbesondere die Tangente in diesem.

4) Man konstruiere die Parabel aus der Achsenrichtung und drei Punkten und spreche hier wie in 2, 3 die Konstruktionsregeln als Sätze aus.

5) Zu vier Punkten A, B, C, D und der Tangente des einen, z. B. a in A, sind die Tangenten b, c, d in B, C, D zu konstruieren (vgl. Fig. 14).

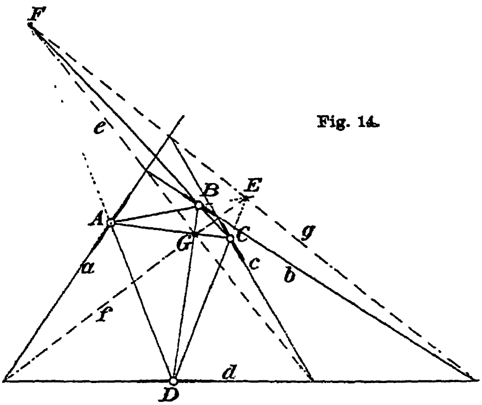


Fig. 14.

Indem man A als erste und zweite Ecke und resp. nacheinander B, C, D als vierte und fünfte denkt, die jedesmal übrigen aber als dritte und sechste, ergibt sich durch die wiederholte Anwendung des Pascalschen Satzes die Regel: Man bilde das Diagonaldreieck des Vierecks $ABCD$, also E oder AB, CD; F oder BC, AD; G oder CA, BD mit den Gegenseiten e, f, g. Dann

schneide man a mit diesen der Reihe nach und ziehe von dem Schnittpunkte die Gerade b nach B, d nach D und c nach C; so schneiden sich auch b und c auf der Geraden f, b und d auf g und c und d auf e. Dies ergibt den Satz: Das Diagonaldreieck des einem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks ist zugleich das Diagonaldreiseit des zugehörigen umgeschriebenen Vierseits.

Man sieht, daß die Konstruktionsfigur zugleich die der andern Aufgabe ist: Zu vier Tangenten a, b, c, d und dem Berührungspunkt einer von ihnen die Berührungspunkte der drei andern zu finden. Man bildet das Dreiseit e, f, g der Geraden ab, cd; bc, ad; ca, bd; die Verbindungslinien des gegebenen Berührungspunktes mit den Ecken E, F, G des Dreiseits treffen die drei andern Tangenten in ihren Berührungspunkten — die entsprechende Anwendung des Satzes von Brianchon.

6) Erzeugung der Kegelschnitte nach *C. Maclaurin*: Man bestimme den Ort der Spitze eines Dreiecks, dessen Seiten bez. durch drei feste Punkte gehen, während die Basisecken sich in zwei festen Geraden bewegen.[16])

Sind $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ die Gleichungen der Seiten des von den drei *festen* Punkten gebildeten Dreiecks, so können nach Nr. 67 die festen Geraden g, h in der Form

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0, \quad b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 = 0$$

ausgedrückt werden; und ist dann $s_1 - \mu s_2 = 0$ die Basis, so ist die Gerade, die den Punkt $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ mit dem Schnittpunkt der Basis mit g verbindet, durch $(a_1 \mu + a_2) s_2 + a_3 s_3 = 0$ dargestellt, und die Gerade, die den Punkt $s_1 = 0$, $s_3 = 0$ mit dem Schnittpunkt der Basis mit h verbindet, durch $(b_1 \mu + b_2) s_1 + b_3 \mu s_3 = 0$. Die Elimination von μ zwischen den beiden letzten Gleichungen gibt die Gleichung des gesuchten Ortes in der Form

$$a_1 b_2 s_1 s_2 - (a_2 s_2 + a_3 s_3)(b_1 s_1 + b_3 s_3) = 0,$$

d. h. derselbe ist ein Kegelschnitt, der durch die fünf Punkte

$$s_2 = 0,\ s_3 = 0; \quad s_3 = 0,\ s_1 = 0; \quad s_1 = 0,\ a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0;$$
$$s_2 = 0,\ b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 = 0 \quad \text{und} \quad g, h$$

hindurchgeht.

277. **Die vollständige Figur des Pascalschen Sechsecks.** Wie im Falle des Satzes von Brianchon können wir 60 verschiedene Pascalsche Sechsecke aus den nämlichen sechs Punkten erhalten, wenn wir die Ordnung ihrer Aufeinanderfolge ändern. Die entsprechenden Pascalschen Geraden bilden,

wie dort die entsprechenden Brianchon-Punkte, ein System mit zahlreichen interessanten Eigenschaften.

Da z. B. der Kegelschnitt von Nr. 275 auch dem Viereck 2356 umgeschrieben ist, so kann seine Gleichung auch in der Form $s_{25}s_{36} - s_{23}s_{56} = 0$ ausgedrückt werden, und ihre Identität mit der Form (58) in Nr. 275 gibt

$$s_{12}s_{34} - s_{25}s_{36} \equiv s_{23}(s_{14} - s_{56}), \tag{61}$$

woraus wir wie dort schließen, daß die Punkte 12, 36; 34, 25; 56, 14 in einer Geraden, nämlich der Geraden $s_{14} - s_{56} = 0$ liegen. In gleicher Weise lernen wir aus der Identität der zweiten und dritten Form der Gleichung unseres Kegelschnittes, daß die drei Punkte 45, 36; 61, 25; 23, 14 in einer Geraden $s_{23} - s_{14} = 0$ liegen. Nun schneiden sich aber die drei Geraden

$$s_{23} - s_{56} = 0, \quad s_{56} - s_{14} = 0, \quad s_{14} - s_{23} = 0 \tag{62}$$

in einem Punkt. Damit ist der Satz von *Steiner* bewiesen: *Die drei Pascalschen Geraden, die man für die Anordnung der Ecken in den bez. Folgen* 123456; 143652, 163254*) *erhält, schneiden sich in einem Punkte.* Da 234561 in derselben Weise behandelt nichts Neues gibt, *so liegt in jeder Pascalschen Geraden nur ein Steinerscher Punkt; es gibt zwanzig solcher Punkte.*

Ebenso erhält man für die Pascalschen Geraden von 123456, 154236, 156342 die folgenden Ergebnisse. Die Gleichung des Kegelschnittes hat, weil er den Vierecken 1245, 5436, 6321 bez. umgeschrieben ist, die identischen Formen

$$s_{15}s_{24} - s_{12}s_{45} = 0,$$
$$s_{56}s_{34} - s_{45}s_{36} = 0,$$
$$s_{16}s_{23} - s_{36}s_{12} = 0.$$

Also sind auch identisch

$$\left\{\begin{array}{l} s_{15}s_{24} - s_{34}s_{56} = s_{45}(s_{12} - s_{36}), \\ s_{34}s_{56} - s_{23}s_{16} = s_{36}(s_{45} - s_{12}), \\ s_{23}s_{16} - s_{15}s_{24} = s_{12}(s_{36} - s_{45}), \end{array}\right. \tag{63}$$

---

*) Die geradzahligen Ecken sind zyklisch vertauscht.

d. h.

15, 34; 24, 56; 12, 36;
34, 61; 56, 23; 45, 12;
23, 15; 16, 24; 36, 45

sind dreimal drei Punkte in je einer Geraden, den Pascalschen Geraden der Sechsecke 156342, 123456, 154236, und diese drei Geraden gehen durch einen Punkt — ein *Satz von Kirkman.* Da die zyklische Verschiebung die Gruppen

234561, 265341, 261453;
345612, 316452, 312564

und keine weiteren gibt, *so liegen in jeder Pascalschen Linie drei Kirkmansche Punkte, und die Anzahl dieser Punkte ist sechzig.*

Man kann den größten Teil aller Sätze, die über die Figur des vollständigen Sechsecks bekannt geworden sind, auch entwickeln, indem man die Grundlehren der Kombinatorik mit den elementaren Sätzen über perspektive Dreiecke verbindet (Nr. 67, 4).

Sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 die sechs Punkte des Kegelschnittes, die wir die Punkte P nennen wollen, so werden sie durch fünfzehn Geraden verbunden, die wir die Geraden l nennen werden. Jede derselben, z. B. 12, wird von den vierzehn anderen geschnitten und zwar durch vier dieser Geraden im Punkte 1, durch vier andere in 2, durch sechs andere in Punkten, die von 1 und 2 verschieden sind, z. B. in 12, 34; usw. Wir wollen die letztgenannten als die Punkte P' bezeichnen; ihre Anzahl ist fünfundvierzig, denn in jeder Geraden l liegen sechs Punkte P', und da zwei Geraden l durch jeden Punkt P' gehen, so ist die Zahl dieser Punkte die dreifache Zahl der l. Wenn wir die Seiten des Sechsecks in der Ordnung 123456 nehmen, so sagt Pascals Satz, daß diejenigen drei Punkte P' in einer Geraden liegen, die als 12, 45; 23, 56; 34, 61 erhalten werden. Wir können diese Gerade als die Pascalsche Gerade $\begin{Bmatrix} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 45 \cdot 61 \cdot 23 \end{Bmatrix}$ bezeichnen, um die drei Punkte bequem erkennen zu lassen, durch die sie geht.

Durch jeden Punkt P' gehen vier Pascalsche Geraden, nämlich z. B. durch (12, 45) die Geraden 123456, 126453, 123546, 126543; wir finden also die Zahl der Pascalschen Geraden, indem wir die Zahl der Punkte P' mit vier multiplizieren und durch drei dividieren, weil jede von ihnen drei Punkte P' enthält; sie ist also gleich sechzig, in der Tat die Zahl der verschiedenen möglichen Anordnungen von sechs Elementen, wenn man die zyklischen Vertauschungen und direkten Umkehrungen nicht berücksichtigt. Betrachten wir nun drei Dreiecke I, II, III mit den Seiten 12, 34, 56; 45, 61, 23; 36, 25, 14 bez., so liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten von I und II in einer Pascalschen Geraden, die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken schneiden sich also in einem Punkte. Eine dieser Linien verbindet die Ecke $12 \cdot 34$ des einen mit der Ecke $45 \cdot 61$, und auf dieser Verbindungslinie liegt auch der Punkt $36 \cdot 25$, man kann sie also durch $\begin{Bmatrix} 12 \cdot 45 \cdot 36 \\ 34 \cdot 61 \cdot 25 \end{Bmatrix}$ bezeichnen; diese Pascalsche Gerade und die beiden anderen der vorhin erwähnten Verbindungslinien oder Pascalschen Geraden, nämlich $\begin{Bmatrix} 34 \cdot 61 \cdot 25 \\ 56 \cdot 23 \cdot 14 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} 56 \cdot 23 \cdot 14 \\ 12 \cdot 45 \cdot 36 \end{Bmatrix}$, gehen durch einen und denselben Punkt, womit wieder *Steiners* Satz gefunden ist.

Wir werden den Schnittpunkt als den Punkt G und durch die Charakteristik $\begin{Bmatrix} 12 \cdot 45 \cdot 36 \\ 34 \cdot 61 \cdot 25 \\ 56 \cdot 23 \cdot 14 \end{Bmatrix}$ bezeichnen. Damit wird offenbar, daß in jeder Pascalschen Geraden nur ein einziger Punkt G liegt; denn, wenn die durch die beiden ersten Zeilen charakterisierte Pascalsche Gerade gegeben ist, erhält man die Charakteristik des bezüglichen Punktes G durch Untersetzen der in ihren Vertikalreihen nicht enthaltenen Buchstaben unter dieselben. Da aber in jedem Punkte G drei Pascalsche Geraden zusammentreffen, so ist die Zahl dieser Punkte gleich zwanzig. Wenn wir die Dreiecke II, III und I, III betrachten, so sind die Verbindungslinien entsprechender Ecken in beiden Fällen dieselben, und die drei

Achsen der Kollineation treffen sich somit in einem Punkte; derselbe ist aber offenbar der Punkt G von der Charakteristik $\begin{Bmatrix} 12\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 61\cdot 23 \\ 36\cdot 25\cdot 14 \end{Bmatrix}$. *L. O. Hesse* hat bemerkt, daß zwei solche Punkte G in bezug auf den Kegelschnitt harmonisch konjugiert sind, so daß die zwanzig Punkte G in zehn Paare geteilt werden. Die Pascalschen Geraden, die durch dieselben gehen, sind für den betrachteten Fall bez.

$$123654,\quad 163452,\quad 143256;$$

und

$$123456,\quad 163254,\quad 143652.$$

Wie man sieht, ergeben sich diese Gruppen von je drei Pascalschen Geraden, indem man bei 123456 die Zahlen 246 zyklisch vertauscht, und zwar im einen bez. im entgegengesetzten Sinne, während die Zahlen 135 an ihren Stellen bleiben.

B. Man zeige, daß die Schnittpunkte der sechs Paare abwechselnder Seiten eines Pascalschen Sechsecks in natürlicher Ordnung ein Brianchonsches Sechsseit bilden, und daß ebenso die Verbindungslinien der sechs Paare abwechselnder Ecken eines Brianchonschen Sechsseits in dieser Ordnung ein Pascalsches Sechseck bilden.

* 278. Betrachten wir nun die Dreiecke

$$\begin{array}{cccc}
12, & 34, & 56 & \mathrm{I} \\
\begin{Bmatrix} 12\cdot 35\cdot 46 \\ 45\cdot 26\cdot 13 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} 34\cdot 26\cdot 15 \\ 16\cdot 35\cdot 24 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} 56\cdot 24\cdot 13 \\ 23\cdot 15\cdot 46 \end{Bmatrix}, & \mathrm{IV} \\
\begin{Bmatrix} 12\cdot 35\cdot 46 \\ 36\cdot 24\cdot 15 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} 34\cdot 26\cdot 15 \\ 25\cdot 13\cdot 46 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} 56\cdot 24\cdot 13 \\ 14\cdot 35\cdot 26 \end{Bmatrix}, & \mathrm{V}
\end{array}$$

so sind die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten von I und IV drei Punkte derselben Pascalschen Geraden. Die Verbindungslinien entsprechender Ecken, die daher durch einen Punkt gehen, sind aber die drei Pascalschen Geraden

$$\begin{Bmatrix} 12\cdot 35\cdot 46 \\ 34\cdot 26\cdot 15 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} 34\cdot 26\cdot 15 \\ 56\cdot 13\cdot 24 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} 56\cdot 13\cdot 24 \\ 12\cdot 46\cdot 35 \end{Bmatrix};$$

wir können den Schnittpunkt bezeichnen als den Punkt H

von der Charakteristik $\left\{\begin{matrix} 12\cdot 35\cdot 46 \\ 34\cdot 26\cdot 15 \\ 56\cdot 13\cdot 24 \end{matrix}\right\}$. Sie weicht von der der Punkte G darin ab, daß nur eine der Vertikalreihen die sechs Ziffern ohne Auslassung oder Wiederholung enthält In jeder Pascalschen Geraden gibt es drei Punkte H, nämlich in $\left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \end{matrix}\right\}$ die folgenden:

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12}\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 36\cdot 24\cdot 15 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 12\cdot \overline{34}\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 13\cdot 25\cdot 46 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot \overline{56} \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 26\cdot 35\cdot 14 \end{matrix}\right\},$$

wo der Strich über der einen Spalte andeutet, daß in ihr die sechs Ziffern vorkommen. Daraus entspringt *Kirkmans* Erweiterung des Steinerschen Satzes: *Die Pascalschen Geraden schneiden sich zu dreien nicht nur in Steiners zwanzig Punkten G, sondern auch in sechzig anderen Punkten H.*

Wenn wir ebenso die Dreiecke I und V betrachten, so sind die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken dieselben wie für I und IV, und die entsprechenden Seiten schneiden sich daher in einer Geraden, offenbar einer Pascalschen Geraden. Endlich müssen sich die entsprechenden Seiten von IV und V in drei Punkten einer Geraden schneiden, d. h. die drei Punkte H von den Charakteristiken

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12}\cdot 35\cdot 46 \\ 45\cdot 26\cdot 13 \\ 36\cdot 15\cdot 24 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 15\cdot \overline{34}\cdot 26 \\ 24\cdot 16\cdot 35 \\ 13\cdot 25\cdot 46 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 13\cdot 24\cdot \overline{56} \\ 46\cdot 15\cdot 23 \\ 35\cdot 26\cdot 14 \end{matrix}\right\}$$

liegen in einer Geraden. Überdies muß die Achse von IV und V durch den Schnittpunkt der Achsen von I, IV und I, V gehen, d. h. durch den Punkt G, der aus den alle sechs Ziffern enthaltenden Spalten der vorigen Punkte H entsteht, nämlich

$$\left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 36\cdot 25\cdot 14 \end{matrix}\right\}.$$

Damit haben wir den *Cayley-Salmonschen Satz: Es gibt zwanzig Geraden g, deren jede einen Punkt G und drei Punkte H enthält.*

Ebenso kann man beweisen, *daß die zwanzig Geraden g zu vieren durch fünfzehn Punkte J gehen.* Die vier Geraden g nämlich, deren Punkte G in der vorigen Bezeichnung eine Vertikalreihe gemein haben, gehen durch denselben Punkt.

Betrachten wir ferner die Pascalschen Geraden, die sich in einem Punkte H schneiden, z. B.

$$\begin{Bmatrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 45 \cdot 26 \cdot 13 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 45 \cdot 26 \cdot 13 \\ 36 \cdot 15 \cdot 24 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{Bmatrix}.$$

Wir wählen auf diesen Geraden der Reihe nach die Punkte $P_1' = 46 \cdot 13$, $P_2' = 26 \cdot 15$, $P_3' = 24 \cdot 35$ und erhalten so ein Dreieck, dessen Seiten $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$, $P_3'P_1'$ durch

$$\begin{Bmatrix} 13 \cdot 26 \cdot 45 \\ 46 \cdot 15 \cdot 23 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 26 \cdot 35 \cdot 14 \\ 15 \cdot 24 \cdot 36 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 24 \cdot 13 \cdot 56 \\ 35 \cdot 46 \cdot 12 \end{Bmatrix}$$

charakterisiert sind. Auf jeder dieser Seiten nehmen wir einen Punkt H, indem wir unter jede der obigen Pascalschen Geraden die Zeile $16 \cdot 34 \cdot 25$ schreiben. Die Seiten H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 des so entstehenden Dreiecks $H_1H_2H_3$ sind der Reihe nach durch

$$\begin{Bmatrix} 13 \cdot 26 \cdot 45 \\ 25 \cdot 34 \cdot 16 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 25 \cdot 34 \cdot 16 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 46 \cdot 12 \cdot 35 \\ 25 \cdot 34 \cdot 16 \end{Bmatrix}$$

charakterisiert. Die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten der Dreiecke $P_1'P_2'P_3'$ und $H_1H_2H_3$, d. h. die drei Punkte G von den Charakteristiken

$$\begin{Bmatrix} 25 \cdot 34 \cdot 16 \\ 13 \cdot 26 \cdot 45 \\ 46 \cdot 15 \cdot 23 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 25 \cdot 34 \cdot 16 \\ 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 14 \cdot 26 \cdot 35 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 25 \cdot 34 \cdot 16 \\ 46 \cdot 12 \cdot 35 \\ 13 \cdot 56 \cdot 24 \end{Bmatrix}$$

liegen mit dem vierten, der gleichfalls die Zeile $25 \cdot 34 \cdot 16$ enthält $\begin{Bmatrix} 25 \cdot 34 \cdot 16 \\ 36 \cdot 12 \cdot 45 \\ 14 \cdot 56 \cdot 23 \end{Bmatrix}$ (vgl. S. 47), in einer Geraden. Da man fünfzehn verschiedene Produkte von der Form $25 \cdot 34 \cdot 16$ bilden kann, so folgt aus dem Vorhergehenden der Satz von *Steiner: Die Punkte G liegen zu vieren in fünfzehn Geraden j.*

Hesse hat eine gewisse Dualität zwischen den erhaltenen Sätzen hervorgehoben. Den 60 Kirkmanschen Punkten H entsprechen die 60 Pascalschen Geraden h in folgender Art: Es

gibt 20 Steinersche Punkte G, durch deren jeden drei Pascalsche Geraden h und eine Gerade g gehen; und es gibt 20 Geraden g, deren jede drei Kirkmansche Punkte H und einen Steinerschen Punkt G enthält. Und so wie die 20 Geraden g zu vieren durch 15 Punkte J gehen, so liegen die 20 Punkte G zu vieren in 15 Geraden j. Diese Dualität ist zuletzt durch zahlreiche neue Ergebnisse von *Veronese* näher bestimmt und vervollständigt worden.[17])

Um zu zeigen, welcher Punkt H der Pascalschen Geraden entspricht, die der Ordnung 123456 angehört, betrachten wir die beiden eingeschriebenen Dreiecke 135, 246 und bemerken, wie wir bald (Nr. 287, 7) sehen werden, daß ihre Seiten einen und denselben Kegelschnitt berühren.*) Das durch die Geraden 35, 46, 15, 26, 13, 24 gebildete Sechsseit ist daher ein Brianchonsches. Aber seine Diagonalen sind die drei Pascalschen Geraden, die sich in dem Punkte H schneiden von der Charakteristik

$$\begin{Bmatrix} 35 \cdot 26 \cdot 14 \\ 46 \cdot 13 \cdot 25 \\ 15 \cdot 24 \cdot 36 \end{Bmatrix}.$$

Und da bei Festhaltung der abwechselnden Seiten 35, 15, 13 durch zyklische Permutation der übrigen drei Brianchonsche Punkte erhalten werden, die nach dem zu dem Steinerschen dualen Satze in einer Geraden liegen müssen, so ist bewiesen, daß drei Punkte H in einer Geraden g liegen.

*) Der dual entsprechende Satz wurde schon in Nr. 266 bewiesen.

Fünfzehntes Kapitel.*)

Projektive Eigenschaften der Kegelschnitte.

279. In den Gleichungsformen des letzten Kapitels können wir die auftretenden linearen Funktionen als mit Konstanten multiplizierte Abstände deuten, wie schon im IV. Kapitel geschehen ist.

So führt die Gleichung $s_3 s_4 - \mu s_1 s_2 = 0$ (Nr. 256) zu dem wichtigen Satz: *Das Produkt der Abstände eines Punktes des Kegelschnittes von zwei Gegenseiten eines Sehnenvierecks steht zu dem Produkte seiner Abstände von den beiden andern Gegenseiten in konstantem Verhältnis.*

Und $s_1 s_2 - \lambda s^2 = 0$ (Nr. 258) ergibt den Sonderfall: Das Produkt der Abstände eines Punktes des Kegelschnittes von zwei festen Tangenten steht zu dem Quadrat seines Abstandes von ihrer Berührungssehne in konstantem Verhältnis. Für den Kreis wurde dies schon in Nr. 111 ausgesprochen.

Ferner können wir jeden Kegelschnitt in der Gleichungsform $f - \mu s_1 s_2 = 0$ darstellen (Nr. 256), wo $f = 0$ insbesondere die Gleichung eines Kreises ist. Unter dieser Voraussetzung bedeutet f die mit einer Konstanten multiplizierte Potenz eines Punktes in bezug auf den Kreis (Nr. 109). *Das Quadrat der von einem Punkt des Kegelschnittes an einen festen Kreis gehenden Tangenten steht zu dem Produkt seiner Abstände von zwei Gegenseiten des Vierecks der Schnittpunkte in konstantem Verhältnis.* Nimmt man $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ als beliebige Sehnen eines gegebenen Kreises $f = 0$, so kann man hiernach einen Kegelschnitt als Ort erzeugen. Für den Fall eines unendlich kleinen Kreises hat man insbesondere: *Der Ort eines Punktes,*

*) Das weitere Studium setzt die Durcharbeitung der früheren mit dem Stern bezeichneten Abschnitte voraus.

für den das Quadrat seiner Entfernung von einem festen Punkt zu dem Produkt seiner Abstände von zwei festen Geraden in konstantem Verhältnis steht, ist ein Kegelschnitt.

Dasselbe gilt auch noch, wenn die festen Geraden zusammenfallen, also für die Gleichung $f - \mu s^2 = 0$: *Die Tangente aus einem Punkt eines Kegelschnittes an einen doppeltberührenden Kreis steht zu seinem Abstand von der Berührungssehne in konstantem Verhältnis.* Endlich erkennen wir hierin im besonderen Fall die Fundamentaleigenschaft des Brennpunktes und der Leitlinie (Nr. 183), so daß wir den Brennpunkt als einen unendlich kleinen Kreis ansehen müssen, der den Kegelschnitt in zwei imaginären Punkten der Leitlinie berührt (Nr. 181).

Die Verallgemeinerungen für den Fall, daß $f = 0$ einen Kegelschnitt bedeutet, folgen aus Nr. 150 für konstantes ϑ: Das Ergebnis der Substitution der Koordinaten eines Punktes in das Polynom der Gleichung einer Kurve ist dem Produkt der Abschnitte proportional, die die Kurve auf einer Geraden von gegebener Richtung durch den Punkt abschneidet — gültig übrigens für Kurven beliebiger Ordnung.

Endlich können wir diese Deutung auch auf die Gleichungsformen von Nr. 270 in Linienkoordinaten ausdehnen. Bedenken wir, daß eine lineare Funktion σ von $u \mid v$ den mit $\sqrt{u^2 + v^2}$ multiplizierten Abstand des Punktes $\sigma = 0$ von der Geraden $u \mid v$ bedeutet, so drückt $\sigma_3 \sigma_4 - \lambda \sigma_1 \sigma_2 = 0$ den Satz aus: *Das Produkt der Abstände einer Tangente des Kegelschnittes von zwei Gegenecken eines Tangentenvierseits steht zu dem Produkt seiner Abstände von den beiden anderen Gegenecken in konstantem Verhältnis,* usw.

B. 1) Aus $f - \lambda s^2 = 0$, $g - \mu s^2 = 0$ folgt für $f = 0$, $g = 0$ als Kreise mit $\mu f - \lambda g = 0$: Die Schnittpunkte solcher Kegelschnitte liegen in einem Kreise, der von der Berührungssehne nicht abhängt und fest bleibt, so lange $\lambda : \mu$ konstant ist.

2) Wenn zwei Kegelschnitte einander doppelt berühren, so steht für jeden Punkt des einen das Quadrat seines Abstandes von der Berührungssehne beider in konstantem Verhältnis zu dem Rechteck der Abschnitte, die der andere auf dem den erwähnten Abstand messenden Lote bestimmt.

3) Wenn eine Gerade von gegebener Richtung zwei Kegelschnitte in den Punkten P, Q; P', Q' schneidet, und Punkte O auf ihr so bestimmt werden, daß die Rechtecke $OP \cdot OQ$ und $OP' \cdot OQ'$ stets in konstantem Verhältnis sind, so ist der Ort der Punkte O ein Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte hindurchgeht.

4) Der Durchmesser des Kreises, der dem von zwei Tangenten eines Mittelpunktskegelschnittes und ihrer Berührungssehne gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, ist $= b'b'' : p$ für b', b'' als die den Tangenten parallelen Halbmesser und p als den senkrechten Abstand der Berührungssehne vom Mittelpunkt.[18])

Wir setzen die Gleichung $f(x, y) = 0$ des Kegelschnittes als durch eine solche Konstante dividiert voraus, daß bei Einführung der Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kurve die Funktion $f(x, y)$ der Einheit gleich wird (Nr. 150). Sind dann t', t'' die Längen der Tangenten, und ist f' das Ergebnis der Substitution der Koordinaten ihres Schnittpunktes, so gelten die Proportionen

$$t'^2 : b'^2 = f' : 1, \qquad t''^2 : b''^2 = f' : 1.$$

Ist aber h die senkrechte Entfernung der Berührungssehne von der Spitze des Dreiecks, so gilt auch die Proportion $h : p = f' : 1$; denn nach der Form von k in Nr. 140 ist das Ergebnis der Substitution der Koordinaten des Mittelpunktes in die Gleichung der Polare eines Punktes auch das Ergebnis ihrer Substitution in die Gleichung der Kurve. Daher ist $t't'' : h = b'b'' : p$. Nach der Elementargeometrie gibt hier die linke Seite den Durchmesser des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises, und der Satz ist bewiesen.

5) Aus der Formel des vorigen Beisp. geht der Ausdruck von Nr. 218, 2 für den Radius des Krümmungskreises hervor, indem man die beiden Tangenten zusammenfallen läßt (Nr. 244).

Man erhält ihn auch mit Hilfe des folgenden Satzes[19]): Sind n, n' die Längen von zwei sich schneidenden Normalen, p, p' die Abstände der zugehörigen Tangenten vom Mittelpunkt und ist b' der der Verbindungslinie beider Kurvenpunkte parallele Halbmesser, so gilt die Beziehung

$$np + n'p' = 2b'^2.$$

Denn für f' als das Ergebnis der Substitution der Koordinaten des Mittelpunktes der Sehne in die Gleichung des Kegelschnittes, h, h' als die Abstände dieses Mittelpunktes von den beiden Tangenten und 2β als die Länge der Sehne folgt, wie im letzten Beisp., $\beta^2 = b'^2 f'$, $h = pf'$, $h' = p'f'$, und man sieht leicht, daß

$$nh + n'h' = 2\beta^2$$

ist. Damit ist aber die angegebene Beziehung bewiesen.

6) Trägt man die Koordinaten u_1, v_1 einer Geraden $u_1 x + v_1 y + 1 = 0$ in die in Nr. 105 abgeleitete Gleichung

$$\varrho^2(u^2 + v^2) - (\alpha u + \beta v + 1)^2 = 0$$

eines Kreises in Linienkoordinaten ein, so ist das Ergebnis dieser Substitution gleich dem Produkt aus $u_1^2 + v_1^2$ und dem Quadrat der halben Sehne, die die Gerade im Kreis bestimmt. Dies ist zu beweisen. Ferner mache man sich die folgende Deutung der Gleichung $\varphi(u, v) - \lambda\chi(u, v) = 0$ für $\varphi(u, v) = 0$, $\chi(u, v) = 0$ als Gleichungen von Kreisen klar: Die Hüllkurve einer Geraden, in der zwei gegebene Kreise Sehnen von konstantem Verhältnis bestimmen, ist ein Kegelschnitt, der die gemeinsamen Tangenten beider Kreise berührt.

280. **Doppelverhältnis von vier Elementen eines Kegelschnittes.** Bezeichnen, wie in Nr. 69, s_1, s_2, s_3, s_4 die Abstände eines Punktes T von den vier Seiten $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$ eines Vierecks $ACBD$, so ist

$$s_1 \cdot AC = TA \cdot TC \sin ATC, \quad s_2 \cdot BC = TB \cdot TC \sin BTC, \text{ usw.}$$

Bilden wir nach Nr. 84 das Doppelverhältnis der vier von T ausgehenden Strahlen, so ist

$$(1) \qquad \frac{\sin ATC}{\sin BTC} : \frac{\sin ATD}{\sin BTD} = \frac{s_1 s_3}{s_2 s_4} \cdot \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Dasselbe ist von der Lage von T nicht abhängig, so lange $s_1 s_3 : s_2 s_4 = \varkappa$ einen konstanten Wert behält. Daher gilt nach Nr. 279 der Fundamentalsatz:

Das Doppelverhältnis eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen einen veränderlichen Punkt des Kegelschnittes mit vier festen Punkten desselben in gegebener Reihenfolge verbinden, hat konstanten Wert, und umgekehrt: *Der Ort eines Punktes, dessen Verbindungsgeraden mit vier festen Punkten in bestimmter Reihenfolge ein Doppelverhältnis von konstantem Wert ergeben, ist eine durch diese Punkte gehende Kurve zweiter Ordnung.*

In der Bezeichnungsweise von Nr. 83 und 84 können wir die Gleichheit der Doppelverhältnisse schreiben

$$(2) \qquad (T \cdot ABCD) = \varkappa \cdot (ABCD).$$

Der Klammerausdruck der rechten Seite ist aus den Seitenlängen des Vierecks $ABCD$ ganz so gebildet, als ob diese in einer Geraden ein Doppelverhältnis bestimmten. Der Faktor $\varkappa$ charakterisiert einen bestimmten Kegelschnitt des dem Vier-

eck umgeschriebenen Büschels. Daher nennt man *die linke Seite das Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kegelschnittes* und bezeichnet dasselbe etwa mit $\{ABCD\}$. Es ist darunter also das Doppelverhältnis des die vier Punkte aus irgend einem fünften Punkte der Kurve projizierenden Strahlenbüschels zu verstehen. Der Kegelschnitt ist durch vier Punkte und den Wert ihres Doppelverhältnisses bestimmt.

Betrachten wir ferner die Tangenten a, b, c, d, t in den Punkten A, B, C, D, T. Sind A', B', C', D' die Schnittpunkte der letzten Tangente mit den vier ersten und sind $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ die Abstände der Ecken ac, bc, bd, ad von der Tangente t, so liefert die Trigonometrie

$$\sigma_1 \sin ac = A'C' \cdot \sin at \cdot \sin ct, \quad \sigma_2 \sin bc = B'C' \cdot \sin bt \cdot \sin ct, \text{ usw.}$$

Das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte ist

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2 \sigma_4} \cdot \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}. \tag{3}$$

Nun sagt $\sigma_1 \sigma_3 = \varkappa \sigma_2 \sigma_4$ nach Nr. 270 mit Rücksicht auf Nr. 81 aus, daß t einen Kegelschnitt berührt. Also haben wir den dual entsprechenden Hauptsatz:

Das Doppelverhältnis einer Punktreihe, deren Punkte in einer beweglichen Tangente des Kegelschnittes von vier festen Tangenten ausgeschnitten werden, hat konstanten Wert und umgekehrt.

Schreiben wir wiederum in früherer Art

$$(t \cdot abcd) = \varkappa (abcd), \tag{4}$$

indem wir das Sinusdoppelverhältnis der Winkel der vier Tangenten bilden, als ob sie durch einen gemeinsamen Scheitel gingen. Hiernach kann man wieder das Doppelverhältnis der von vier Tangenten in einer fünften ausgeschnittenen Punktreihe $(t \cdot abcd)$ als *das Doppelverhältnis* $\{abcd\}$ *der vier Tangenten des Kegelschnittes* auffassen.

281. **Projektive Erzeugung der Kegelschnitte.** Die vorigen Fundamentalsätze stehen so recht im beherrschenden Mittelpunkt der Theorie der Kegelschnitte. Sie knüpfen unmittelbar an das an, was in Nr. 86 von den projektiven Strahlenbüscheln und Punktreihen gesagt wurde, und man

tritt mit ihnen in den Zusammenhang der allgemeinen Gedankenentwickelung des V. Kap. wieder ein. Denn sie lassen sich so aussprechen:

Der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen von zwei projektiven Strahlenbüscheln in allgemeiner Lage ist ein Kegelschnitt, der auch durch die Scheitel (Träger) der beiden Büschel hindurchgeht.

Die Hüllkurve der Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte von zwei projektiven geraden Punktreihen in allgemeiner Lage ist ein Kegelschnitt, der auch die Träger der beiden Reihen berührt.

Direkt werden beide Sätze folgendermaßen bewiesen:

Sind

(5) $s_1 - k s_2 = 0,\ s_1' - k s_2' = 0$

die Gleichungen der beweglichen Strahlen beider Büschel, so wird die Gleichung des bezeichneten Ortes durch Elimination von k zwischen den vorigen Gleichungen gefunden, also in der Form $s_1 s_2' - s_1' s_2 = 0$. Diese Gleichung ist vom zweiten Grade und enthält sechs Glieder, daher fünf unbestimmte Koeffizienten; sie kann somit durch die Bedingung, daß die dargestellte Kurve fünf Punkte enthalte, zur Gleichung jeder beliebigen Kurve zweiter Ordnung gemacht werden.

Geometrisch bestimmen fünf Punkte zwei projektive Büschel, da drei von ihnen, mit den beiden übrigen verbunden, drei Paare von entsprechenden Strahlen beider Büschel liefern (Nr. 86). Der erzeugte Kegelschnitt geht auch durch die

Sind

$\sigma_1 - \varkappa \sigma_2 = 0,\ \sigma_1' - \varkappa \sigma_2' = 0$

die Gleichungen der beweglichen Punkte beider Reihen, so wird die Gleichung der bezeichneten Hüllkurve durch Elimination von $\varkappa$ zwischen den vorigen Gleichungen gefunden, d. h. als $\sigma_1 \sigma_2' - \sigma_1' \sigma_2 = 0$. Diese Gleichung ist vom zweiten Grade und enthält sechs Glieder, daher fünf unbestimmte Koeffizienten; sie kann somit durch die Bedingung, daß die dargestellte Kurve fünf Geraden berühre, zur Gleichung jeder beliebigen Kurve zweiter Klasse gemacht werden.

Geometrisch bestimmen fünf Geraden zwei projektive Reihen, da drei von ihnen, mit den beiden übrigen geschnitten, drei Paare von entsprechenden Punkten beider Reihen liefern (Nr. 86). Der Kegelschnitt berührt auch die Träger beider

Scheitelpunkte beider Büschel hindurch, da seine Gleichung durch die Koordinaten des Schnittpunktes von $s_1 = 0$ mit $s_2 = 0$ sowie von $s_1' = 0$ mit $s_2' = 0$ erfüllt wird. Die Verbindungslinie der Scheitel ist für jedes der beiden Büschel derjenige Strahl, der der Tangente des Kegelschnittes im Scheitel des andern Büschels entspricht. Daraus entspringen lineare Konstruktionen zur Bestimmung dieser Tangenten.

Derselbe Kegelschnitt wird erzeugt durch projektive Büschel, die in irgend zwei seiner Punkte ihre Scheitel haben. Sind deren Gleichungen nämlich

$$(s_1 - ms_2) - k(s_1' - ms_2') = 0,$$
$$(s_1 - ns_2) - k(s_1' - ns_2') = 0,$$

so ist die Gleichung der Kurve

$$0 = \begin{vmatrix} s_1 - ms_2 & s_1' - ms_2' \\ s_1 - ns_2 & s_1' - ns_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & -n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_1' & s_2' \end{vmatrix},$$

also dieselbe wie zuvor.

Reihen, da seine Gleichung durch die Koordinaten der Verbindungslinie des Punktes $\sigma_1 = 0$ mit $\sigma_2 = 0$ und von $\sigma_1' = 0$ mit $\sigma_2' = 0$ erfüllt wird. Der Schnittpunkt der Träger ist für jede der beiden Reihen derjenige Punkt in ihr, der dem Berührungspunkt des Kegelschnittes mit dem Träger der andern Reihe entspricht. Daraus entspringen lineare Konstruktionen zur Bestimmung dieser Berührungspunkte.

Derselbe Kegelschnitt wird erzeugt durch projektive Reihen, die irgend zwei seiner Tangenten zu Trägern haben. Sind deren Gleichungen nämlich

$$(\sigma_1 - \mu\sigma_2) - \varkappa(\sigma_1' - \mu\sigma_2') = 0,$$
$$(\sigma_1 - \nu\sigma_2) - \varkappa(\sigma_1' - \nu\sigma_2') = 0,$$

so ist die Gleichung der Kurve

$$0 = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \mu\sigma_2 & \sigma_1' - \mu\sigma_2' \\ \sigma_1 - \nu\sigma_2 & \sigma_1' - \nu\sigma_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ 1 & -\nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1' & \sigma_2' \end{vmatrix},$$

also dieselbe wie zuvor.

282. **Zerfallende Kurven zweiter Ordnung oder Klasse.** Wir haben mehrfach gesehen, daß die Ortsgleichung zweiten Grades in Punktkoordinaten bei der Einführung von Linienkoordinaten wieder vom zweiten Grade ist (Nr. 149), d. h.: *Im allgemeinen ist eine Kurve zweiter Ordnung von der zweiten Klasse.*

Aber dieses Gesetz hat zwei Ausnahmefälle, die wir auch schon berührt haben (Nr. 62): *Es gibt einen Ort zweiter Ord-*

nung, der nicht von der zweiten Klasse ist, und eine Hüllkurve zweiter Klasse, die nicht von der zweiten Ordnung ist.

Wenn nämlich die beiden erzeugenden projektiven Büschel einen Strahl entsprechend gemein haben, z. B. $s_1 \equiv s_1'$, so sind sie perspektiv (Nr. 86). Die Gleichungen der beweglichen Strahlen der Büschel nehmen die Form an

$$s_1 - k s_2 = 0, \quad s_1 - k s_2' = 0,$$

und die Elimination von k liefert für den Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen die Gleichung

$$s_1 (s_2 - s_2') = 0.$$

Der Ort ist ein Geradenpaar, bestehend aus dem gemeinsamen Strahl und der Perspektivachse der Büschel, auf der sich alle übrigen entsprechenden Strahlenpaare derselben schneiden.

Es gibt keine Gleichung in Linienkoordinaten, die diese beiden Geraden definiert.

Wenn nämlich die beiden erzeugenden projektiven Reihen einen Punkt entsprechend gemein haben, z. B. $\sigma_1 \equiv \sigma_1'$, so sind sie perspektiv (Nr. 86). Die Gleichungen der beweglichen Punkte der Reihen nehmen die Form an

$$\sigma_1 - \varkappa \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 - \varkappa \sigma_2' = 0,$$

und die Elimination von $\varkappa$ liefert für die Hüllkurve der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte die Gleichung

$$\sigma_1 (\sigma_2 - \sigma_2') = 0.$$

Die Hüllkurve ist ein Punktepaar, bestehend aus dem gemeinsamen Punkt und dem Perspektivzentrum der Reihen, nach dem die Verbindungsgeraden aller übrigen entsprechenden Punktepaare gehen.

Es gibt keine Gleichung in Punktkoordinaten, die diese beiden Punkte definiert.

283. **Konstruktion des Kegelschnittes aus projektiven Elementargebilden.**

Zwei projektive Strahlenbüschel mit verschiedenen Scheiteln T, T' sind durch die Tripel entsprechender Strahlen a, b, c; a', b', c' bestimmt.

Will man also irgend einen Punkt des durch zwei solche Büschel nach Nr. 281 bestimmten Kegelschnittes konstruieren,

Zwei projektive Punktreihen mit verschiedenen Trägern t, t' sind durch die Tripel entsprechender Punkte A, B, C; A', B', C' bestimmt.

Will man also irgend eine Tangente des durch zwei solche Punktreihen nach Nr. 281 bestimmten Kegelschnittes kon-

so hat man nur zu irgend einem Strahl d des einen Büschels den entsprechenden d' des anderen zu konstruieren, der Schnittpunkt von d mit d' ist ein Punkt des Kegelschnittes.

Bevor gezeigt wird, wie man d' konstruiert, wenn d gegeben ist, beweisen wir folgenden Satz:

Werden in zwei projektiven Büscheln von Geraden $a, b, c\ldots$ und $a', b', c'\ldots$, denen die Scheitel T bez. T' zugehören, entsprechende Strahlen wechselweise zum Durchschnitt gebracht, so gehen die Verbindungslinien zusammengehöriger Punktepaare, z. B.

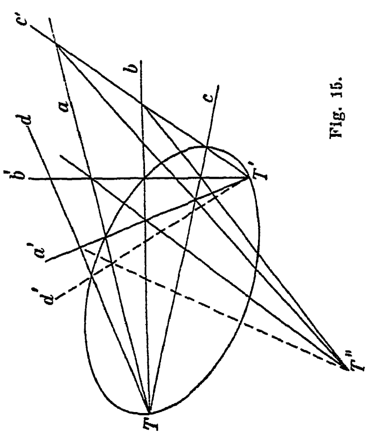


Fig. 15.

von ab' mit $a'b$, von ac' mit $a'c$, von bc' mit $b'c$, usw., durch

struieren, so hat man nur zu irgend einem Punkt D der einen Punktreihe den entsprechenden D' der anderen zu konstruieren, die Verbindungslinie von D mit D' ist eine Tangente des Kegelschnittes.

Bevor gezeigt wird, wie man D' konstruiert, wenn D gegeben ist, beweisen wir folgenden Satz:

Werden in zwei projektiven Punktreihen $A, B, C, \ldots$ und $A', B', C', \ldots$, denen die Träger t bez. t' zugehören, entsprechende Punkte wechselweise durch Geraden verbunden, so schneiden sich zusammengehörige Geradenpaare, z. B. AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$, usw.,

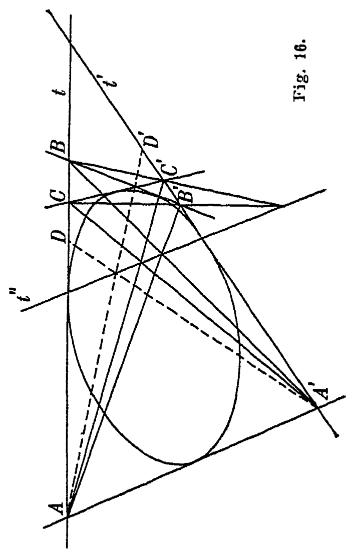


Fig. 16.

nen und denselben Punkt T'' Fig. 15).

Nach Voraussetzung ist näm- ch die durch die Punkte aa', b', ac', ... gebildete Reihe zu er Punktreihe $a'a$, ab', $a'c$, ... rojektiv; da aber der Punkt aa' *iden* Reihen angehört, sind iese (Nr. 86) in perspektiver age, die Verbindungslinien itsprechender Punkte dieser eihen, also von ab' mit $a'b$, on ac' mit $a'c$, ... schneiden ch daher in einem und dem- lben Punkte, dem Perspektiv- entrum T''.

Will man nun den einem trahl d des durch T gelegten üschels entsprechenden Strahl ′ des Büschels T' konstruieren, ɔ hat man nur den Punkt da' ɔder db' oder dc') mit dem erspektivzentrum T'' zu ver- inden. Wird alsdann der chnittpunkt dieser Geraden nd des Strahles a (oder b der c) mit T' verbunden, so ıt diese Verbindungslinie der esuchte Strahl d'.

Je nachdem die Verbin- ungslinie TT' als Strahl o des üschels T oder als Strahl p' des üschels T' angesehen wird, ist er ihm entsprechende Strahl ′ bez. p des anderen Büschels ie Verbindungslinie von T' ıit T'' bez. von T mit T''.

in Punkten einer und derselben Geraden t'' (Fig. 16).

Nach Voraussetzung ist nämlich das durch die Strahlen AA', AB', AC', ... gebildete Büschel zu dem Büschel $A'A$, $A'B$, $A'C$, ... projektiv; da aber der Strahl AA' *beiden* Büscheln angehört, sind diese (Nr. 86) in perspektiver Lage, die Strahlen AB', AC' ... schneiden daher die entsprechenden Strahlen $A'B$, $A'C$, ... in Punkten einer und derselben Geraden, der Perspektivachse t''.

Will man nun den einem Punkt D der auf dem Träger t liegenden Reihe entsprechenden Punkt D' des Trägers t' konstruieren, so hat man nur die Gerade DA' (oder DB' oder DC') zu ziehen und den Schnittpunkt dieser Geraden und der Perspektivachse t'' mit A (oder B oder C) zu verbinden. Diese Verbindungslinie schneidet den Träger t' im gesuchten Punkte D'.

Je nachdem der Schnittpunkt der beiden Träger t und t' als Punkt O der Reihe t oder als Punkt P' der Reihe t' angesehen wird, ist der ihm entsprechende Punkt O' bez. P der anderen Reihe der Schnittpunkt von t' mit t'' bez. von t mit t''.

Das Perspektivzentrum T'' ist der Berührungspol von T und T', d. h. der Pol des Scheitelstrahles TT'. Der Schnittpunkt dd' durchläuft einen Kegelschnitt.

Die Perspektivachse t'' ist die Berührungssehne von t und t', d. h. die Polare des Punktes tt'. Die Verbindungsgerade DD' umhüllt einen Kegelschnitt.

Diese projektiven Konstruktionen enthalten unmittelbar einfache Beweise des Pascalschen und des Brianchonschen Satzes.

Sind A, B, C, D, E, F sechs Punkte des Kegelschnittes und nehmen wir A und E als Scheitel von Strahlenbüscheln, so ist $(E \,.\, CDFB) = (A \,.\, CDFB)$, also, wenn man die Reihen der Schnittpunkte der Strahlen mit den Geraden BC, DC betrachtet,
$(CRMB) = (CDNS)$, (Nr. 84).
Diese Büschel sind perspektiv, weil ihr Schnittpunkt sich selbst entspricht; also gehen die Geraden DRE, MN und BSA durch einen Punkt L oder L liegt in MN (Fig. 17).

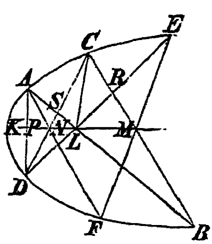


Fig. 17.

Sind a, b, c, d, e, f sechs Tangenten des Kegelschnittes und nehmen wir a und e als Träger von Punktreihen, so ist $(e \,.\, c\,d\,f\,b) = (a \,.\, c\,d\,f\,b)$, also, wenn man die Büschel der Verbindungslinien der Punkte mit den Punkten bc, dc betrachtet,
$(crmb) = (cdns)$, (Nr. 84).
Diese Büschel sind perspektiv, weil der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht; also liegen die Punkte dre, mn und bsa*) in einer Geraden l oder l geht durch mn (Fig. 18).

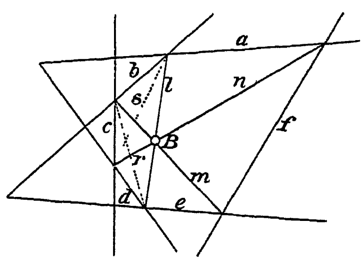


Fig. 18.

*) Hier bedeutet dre den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Geraden d, r, e, und entsprechendes gilt von bsa.

B. Für zerfallende Kegelschnitte bestehen die Sätze von Pascal und Brianchon getrennt fort, nämlich der erste für das Geradenpaar, der zweite für das Punktepaar.

284. **Gattung des Erzeugnisses.** Betrachten wir nur Büschel mit reellen Scheiteln, so sind die in den Asymptotenrichtungen gezogenen Strahlen zugleich mit diesen reell. *Daher ist das Erzeugnis eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die projektiven Büschel zwei Paare, ein oder kein Paar paralleler homologer Strahlen enthalten.*

Um dies zu untersuchen, hat man nur durch Parallelverschiebung des einen Büschels bis zur konzentrischen Lage mit dem andern die Doppelstrahlen dieser vereinigten projektiven Büschel zu ermitteln, also diejenigen beiden Strahlen, die mit den ihnen entsprechenden zusammenfallen. Da diese direkt die Asymptotenrichtungen haben, so ist der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, wenn die Doppelstrahlen reell und zueinander rechtwinklig sind, und ein Kreis, wenn diese die absolute Richtung haben. *Somit erzeugen kongruente Büschel eine gleichseitige Hyperbel oder einen Kreis* (vgl. Nr. 100), *je nachdem sie ungleichen oder gleichen Drehungssinn haben.*

Zur analytischen Prüfung hat man nur die zu den gegebenen parallelen Büschel am Nullpunkt der Koordinaten einzuführen, d. h. in s_1, s_2, s_1', s_2' die konstanten Glieder gleich Null zu setzen.

Um die Gattung des durch projektive Reihen in reellen Trägern erzeugten Kegelschnittes zu bestimmen, geht man von der Bemerkung aus, daß nur bei Mittelpunktskegelschnitten umgeschriebene Parallelogramme möglich sind, und daß dann die Berührungspunkte ihrer Seiten außerhalb oder innerhalb der Ecken liegen, je nachdem die Kurve eine Hyperbel oder eine Ellipse ist. Nun sind, zwei benachbarte Seiten als Träger gedacht, die Berührungspunkte die homologen Punkte des Schnittpunktes, die andern Ecken die homologen der Richtungen, d. h. die Gegenpunkte der Reihen (Nr. 93). *Somit ist das Erzeugnis eine Hyperbel oder eine Ellipse, je nachdem die Perspektivachse der Reihen beide Strecken von ihren Gegenpunkten bis zum Schnittpunkt der Träger äußer-*

lich oder innerlich teilt. Für parallele Träger reicht dies Kriterium jedoch nicht, weil in diesen die Gegenpunkte selbst die Berührungspunkte sind. Man übersieht leicht, daß es in diesem Fall nur darauf ankommt, ob die projektiven Reihen von gleichem oder entgegengesetztem Sinn sind.

Eine Parabel entsteht, wenn eine Tangente unendlich fern liegt, wenn also die Richtungen irgend zweier Tangenten homolog sind in den projektiven Punktreihen auf ihnen. Gemäß Nr. 93 sind diese dann ähnlich, *also ist das Erzeugnis ähnlicher Punktreihen stets eine Parabel.*

B. Wenn in den festen Geraden $u_1 \mid v_1$, $u_2 \mid v_2$ zwei projektive Reihen gegeben sind, so bestimme man analytisch die Hüllkurve der Verbindungsgeraden $u \mid v$ ihrer homologen Punktepaare.

Denken wir uns die Verbindungslinien eines Paares homologer Punkte mit dem Nullpunkt durch $y = m_1 x$, $y = m_2 x$ ausgedrückt, so muß, weil das Strahlenbüschel über der Reihe in $u_1 \mid v_1$ zu dem Büschel über der Reihe in $u_2 \mid v_2$ projektiv ist, nach Nr. 93 eine Beziehung von der Form $am_1 m_2 + bm_1 + cm_2 + d = 0$ stattfinden, wo die Koeffizienten a, b, c, d etwa durch drei Paare homologer Punkte zu bestimmen sind.

Wenn wir aus den für den Punkt $x \mid y$ der ersten oder zweiten Reihe gleichzeitig geltenden Gleichungen

$$ux + vy + 1 = 0, \quad u_1 x + v_1 y + 1 = 0, \quad m_1 x - y = 0,$$

bez. $$ux + vy + 1 = 0, \quad u_2 x + v_2 y + 1 = 0, \quad m_2 x - y = 0$$

die Koordinaten x, y eliminieren, so erhalten wir Bestimmungsgleichungen für m_1, m_2, aus denen folgt:

$$m_1 = (u - u_1) : (v_1 - v), \quad m_2 = (u - u_2) : (v_2 - v).$$

Die Einsetzung dieser Werte in die Gleichung der Projektivität gibt

$$a(u - u_1)(u - u_2) + b(u - u_1)(v_2 - v) + c(u - u_2)(v_1 - v) \\ + d(v_1 - v)(v_2 - v) = 0 \quad \text{oder}$$

$$au^2 + dv^2 - (b + c)uv - \{a(u_1 + u_2) - bv_2 - cv_1\}u \\ - \{d\{v_1 + v_2\} - bu_1 - cu_2\}v + au_1 u_2 - bu_1 v_2 - cu_2 v_1 + dv_1 v_2 = 0.$$

Die Hüllkurve ist ein Kegelschnitt, der die festen Geraden berührt, weil $u = u_1$, $v = v_1$ und $u = u_2$, $v = v_2$ der Gleichung genügen; insbesondere ist sie eine Parabel, wenn man hat

$$u_1(au_2 - bv_2) = v_1(cu_2 - dv_2).$$

Mit $a = d = 1$, $b = -c$ geht unsere Gleichung über in

$$u^2 + v^2 - \{u_1 + u_2 - b(v_2 - v_1)\}u - \{v_1 + v_2 - b(u_1 - u_2)\}v \\ + u_1 u_2 + v_1 v_2 - b(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0,$$

K, K', so folgt aus der Voraussetzung die Beziehung $(HG'EF) = (GH'EF)$. Wird diese nach Nr. 83 ausführlich angeschrieben, so ergibt sich sofort $(HGEF) = (G'H'EF)$ und hieraus $(C.ABEF) = (D.ABEF)$. In derselben Art ergibt sich der Beweis für die übrigen fünf Fälle, in denen beiden Gruppen zwei Punkte gemeinsam angehören. Für die acht Fälle, in denen diese drei gemeinsame Punkte enthalten, folgt aber der Satz hieraus ohne weiteren Beweis.

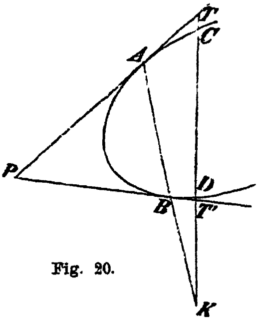


Fig. 20.

2) Wenn von sechs Geraden irgend vier mit den beiden übrigen Geraden Punktreihen mit gleichem Doppelverhältnis bestimmen, so tun es jede vier mit den übrigen zwei.

Der Beweis entspricht dem Vorigen genau nach dem Prinzip der Dualität.

3) $$(A . ACBD) = (B . ACBD).$$

Da wir unter AA, BB die Tangenten in A, B verstehen müssen, so geben diese Doppelverhältnisse, durch die Abschnitte der Geraden CD gemessen, $(TCKD) = (KCT'D)$. Vgl. Fig. 20. *Wenn also eine Sehne CD zwei Tangenten in T, T' und ihre Berührungssehne AB in K schneidet, so ist immer*

$$KD . TK . CT' = CK . KT' . TD.$$

Natürlich ist bei Aufstellung der Doppelverhältnisse sorgfältig darauf zu achten, daß die entsprechenden Strahlen und die zugehörigen Punkte der Reihen in gleicher Ordnung folgen.

4) Wenn T *und* T' zusammenfallen, so wird $KD . CT = - CK . TD$; d. h. jede durch den Schnittpunkt von zwei Tangenten gehende Sehne wird von der Berührungssehne harmonisch geteilt (Nr. 135).

5) Ist T' unendlich entfernt oder CD parallel PT', so erhält man $\overline{TK}^2 = TC . TD$.

6) Ist einer von den vier Punkten des Kegelschnittes unendlich entfernt, so ist $(O . ABC\infty)$ konstant, wenn O einen fünften Punkt des Kegelschnitts bezeichnet. Mißt man dann dieses Doppelverhältnis auf der Geraden $C\infty$, und schneiden OA, OB diese in A', B', so reduziert sich das Doppelverhältnis auf $A'C : B'C$. Wenn also zwei feste Punkte A, B einer Hyperbel (Parabel) mit einem veränderlichen Punkt O derselben Kurve verbunden werden, und die Verbindungslinien eine feste, die Kurve in C schneidende Parallele zu einer Asymptote (einem Durchmesser) in Punkten A', B'

schneiden, so ist das Verhältnis $A'C : B'C$ der von diesen bis zur Kurve gemessenen Abschnitte konstant.

7) Wenn man dasselbe Doppelverhältnis auf einer anderen Parallelen mißt, so erfährt man, daß die Verbindungsgeraden von drei festen Punkten einer Hyperbel oder Parabel mit einem veränderlichen Punkt derselben von einer festen Parallelen zu einer Asymptote oder einem Durchmesser in Punkten A, B, C so geschnitten werden, daß $AB : AC$ konstant ist.

8) Setzen wir in 6) voraus, daß die Geraden, die A, B mit einem vierten Punkt O' der Kurve verbinden, den Strahl $C\infty$ in A'', B'' schneiden, so ist $A'B' : A''B'' = A'C : A''C$; lassen wir nun auch noch den Punkt C so in unendliche Entfernung rücken, daß die Gerade $C\infty$ eine Asymptote wird, so wird das Verhältnis $A'B' : A''B''$ der Einheit gleich, und wir erhalten den Satz Nr. 174, 2.

9) $$(A\,.\,ABC\infty) = (B\,.\,ABC\infty).$$

Werden diese Doppelverhältnisse auf der Geraden $C\infty$ gemessen, und schneidet diese die Tangenten von A und B in a bez. b, die Berührungssehne AB in K, so ist $aC : KC = KC : bC$. Vgl. Fig. 21. *Wenn also eine Parallele zu einer Asymptote einer Hyperbel oder zum Durchmesser einer Parabel zwei Tangenten und ihre Berührungssehne schneidet, so ist der auf dieser Parallelen gemessene Abschnitt zwischen Kurve und Berührungssehne das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten von der Kurve zu den Tangenten.* Oder umgekehrt: Wenn eine Gerade ab von fester Richtung die Seiten eines Dreiecks in Punkten abK schneidet, und ein Punkt C in ihr so bestimmt wird, daß $\overline{CK}^2 = Ca\,.\,Cb$ ist, so ist der Ort von C eine Parabel, wenn ab der Halbierungslinie der Dreiecksbasis AB parallel ist (Nr. 204); sonst immer eine Hyperbel, deren eine Asymptote zu ab parallel ist.

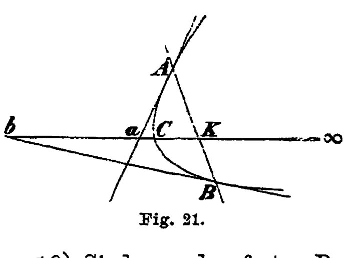


Fig. 21.

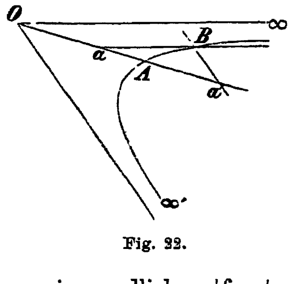


Fig. 22.

10) Sind von den festen Punkten zwei unendlich entfernt, so hat man z. B. $(\infty\,.\,AB\infty\infty') = (\infty'.\,AB\infty\infty')$ und die Geraden $\infty\infty$, $\infty'\infty'$ sind die beiden Asymptoten, $\infty\infty'$ aber ist die unendlich ferne Gerade selbst. Mißt man diese Doppelverhältnisse auf dem Durchmesser OA (Fig. 22), und wird dieser von den Parallelen zu

den Asymptoten $B\infty$, $B\infty'$ in a, a' geschnitten, so ist $AO:aO = a'O:AO$, d. h. *Parallelen zu den Asymptoten, die durch einen beliebigen Punkt B einer Hyperbel gezogen werden, bestimmen in einem Halbmesser vom Mittelpunkt aus gemessene Abschnitte, die diesen selbst zur mittleren geometrischen Proportionale haben.*

Wenn daher umgekehrt durch einen festen Punkt O eine Gerade gezogen wird, die zwei festen vom Punkt B ausgehenden Strahlen in den Punkten a, a' begegnet, so ist der Ort eines Punktes A auf ihr, dessen Abstand von O das geometrische Mittel zwischen Oa, Oa' ist, eine Hyperbel, die O zum Mittelpunkt hat; ihre Asymptoten sind den festen Strahlen Ba, Ba' parallel.

11) $(\infty \,.\, AB\,\infty\,\infty') = (\infty' .\, AB\,\infty\,\infty')$.

Werden die Abschnitte in den Asymptoten gemessen, so erhält man (O ist wieder der Mittelpunkt) $aO:bO = b'O:a'O$, oder: das aus den Asymptotenparallelen eines Kurvenpunktes gebildete Parallelogramm hat konstanten Inhalt (Nr. 164).

286. Zu den Beispielen der vorigen Nr., die sich auf das Doppelverhältnis von vier Punkten beziehen, fügen wir besondere Fälle des Satzes vom Doppelverhältnis von vier Tangenten.

B. 1) Im Fall der Parabel liegt eine der Tangenten in unendlicher Entfernung: *Drei feste Tangenten einer Parabel schneiden jede vierte Tangente derselben in Punkten A, B, C so, daß* $(A\,\infty\,BC)$ $= AB : AC$ *konstant ist* (Nr. 285, 7). Fällt die veränderliche Tangente der Reihe nach mit jeder der gegebenen Tangenten zusammen, so erhalten wir (vgl. Fig. 23) den Satz

$$pQ : QR = RP : Pq = Qr : rP.$$

2) *Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für die Kegelschnitte.* Schneiden die in den Punkten P, P' eines Kegelschnittes gezogenen Normalen desselben eine Achse in N_1 und N_1', die andere in N_2 und N_2', so findet nach Nr. 177 die Beziehung statt $PN_1 : PN_2 = P'N_1' : P'N_2'$. Aus der vorigen Eigenschaft der Parabel folgt daher: *Zwei Normalen eines Kegelschnittes, die die zugehörigen Kurvenpunkte verbindende Sehne und die beiden Achsen der Kurve sind fünf Tangenten einer Parabel.*[22]) Daraus entspringen konstruktive Lösungen mancher Aufgaben. Ist der Kegelschnitt insbesondere eine Parabel, so sind zwei Normalen, die Sehne ihrer Fußpunkte und die Achse der Parabel Tangenten einer anderen Parabel, die die Achse der ersten zur Scheiteltangente hat.

Läßt man dann die Punkte P, P' zusammenfallen, *so bilden die Achsen des Kegelschnittes, die Tangente und Normale in P Tangenten derselben Parabel, und* (Nr. 218) *ihr Berührungspunkt in*

der Normale ist der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt P. Jede Art der Anordnung, in der man die Normale als ein Paar Nachbarseiten und die Achsen, die Tangente und die unendlich ferne Gerade als die vier übrigen Seiten eines Brianchonschen Sechsseits bezeichnen kann, führt auf eine bequeme Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes.

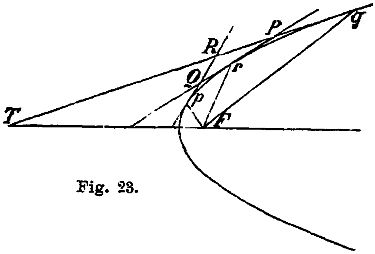


Fig. 23.

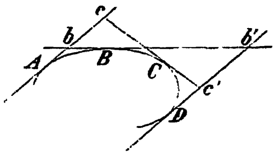


Fig. 24.

3) Für P als einen Punkt der Parabel, N und T als die Schnittpunkte seiner Normale und Tangente mit ihrer Achse ergeben sich folgende Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes K: 1) Man ziehe PO und NO bez. parallel zur Achse und Tangente; OK normal zur Achse. 2) Man ziehe PQ und TQ normal zur Achse und zur Tangente, QK parallel zur Achse. 3) Man ziehe TR und NR normal zur Tangente und zur Achse, RK parallel zur Tangente.[22])

4) Wenn wir zwei von den vier festen Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel parallel annehmen (Fig. 24) und die veränderliche Tangente nacheinander mit beiden zusammenfallen lassen, so wird im ersten Fall das Doppelverhältnis $= Ab : Ac$ und im zweiten $= Dc' : Db'$; daher ist das Rechteck $Ab \,.\, Db'$ konstant.

Aus dem Gesetz vom Doppelverhältnis von vier Punkten leitet man ab, daß die Geraden, die die Punkte A, D mit einem beliebigen Punkt O der Kurve verbinden, die parallelen Tangenten in Punkten b, b' schneiden, für die das Rechteck $Ab \,.\, Db'$ gleichfalls konstant ist.

287. Wir geben ferner eine Reihe von Aufgaben, die mit Hilfe der Eigenschaften der projektiven Büschel und Reihen am Kegelschnitt gelöst werden.

B. 1) Beweis für *Maclaurins* Erzeugungsweise der Kegelschnitte: *Ein Kegelschnitt wird als der Ort der freien Ecke V eines Dreiecks gefunden, dessen Seiten sich um die festen Punkte A, B, C drehen, während zwei seiner Ecken sich in den festen Geraden Oa, Ob* (Fig. 25) *bewegen* (vgl. Nr. 49, 2).

Wenn vier solche Dreiecke abV, $a'b'V'$, $a''b''V''$, $a'''b'''V'''$ verzeichnet sind, so ergibt sich aus der Identität der Büschel

$(C.aa'a''a''')$ und $(C.bb'b''b''')$ die Beziehung $(aa'a''a''')=(bb'b''b''$
daher auch

$$(A.VV'V''V''')=(B.VV'V''V''').$$

Also liegen die Punkte A, B, V, V', V'', V''' in demselben Kege schnitt, oder der Ort von V''' ist stets der durch die Punkte A, 1 V, V', V'' gehende Kegelschnitt. In Worten: Die Strahlenbüsch aus A und B sind zueinander projektiv, weil sie beide zu de Strahlenbüschel aus C perspektiv sind; daher ist der Ort der Schnit punkte entsprechender Strahlen ein durch A und B gehender Kege schnitt.

2) Der Maclaurinschen Erzeugungsweise der Kegelschnitte en spricht dual die folgende: Bewegen sich die Ecken eines verände lichen Dreiseits auf drei festen Geraden, während sich zwei sein Seiten um feste Punkte drehen, so umhüllt die dritte Seite eine Kegelschnitt.

3) *Chasles*[23]) hat darauf hingewiesen, daß der Beweis i 1) noch anwendbar ist, wenn die Seite ab, statt durch einen feste Punkt C zu gehen, einen Kegelschnitt berührt, der die Geraden Oa, O zu Tangenten hat, denn dann schneiden irgend vier Lagen der Sei ab diese Tangenten Oa, Ob so, daß $(aa'a''a''')=(bb'b''b''')$ i (Nr. 280), und die Fortsetzung des vorigen Beweises bleibt bestehe

4) *Newtons Erzeugungsweise der Kegelschnitte:* Zwei Wink von konstanter Größe drehen sich um ihre festen Scheitel P und Q und der Schnittpunkt des einen Paares ihrer Schenkel durchläu eine Gerade AA'; dann ist der Ort des Schnittpunktes V ihr andern Schenkel ein Kegelschnitt, der durch die beiden Punkte und Q hindurchgeht (Fig. 26).

Denn sind wieder vier Lagen der ersten Schenkel der si drehenden Winkel gegeben, so ist

$$(P.AA'A''A''')=(Q.AA'A''A''');$$

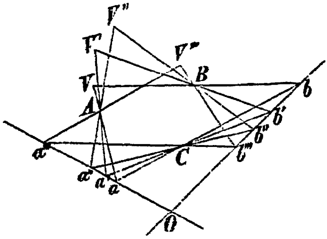


Fig. 25.

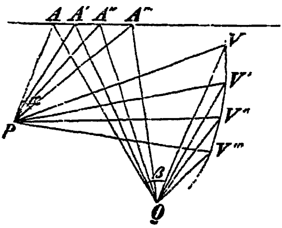


Fig. 26.

weil aber die Winkel in dem je vom ersten Schenkel beschriebene Büschel mit den entsprechenden Winkeln des Büschels der zweite Schenkel nach Größe und Sinn übereinstimmen, so ist $(P.VV'V''V''$

$= (Q \,.\, VV'V''V''')$, und der Ort von V''' ist wie vorher ein durch P, Q, V, V', V'' gehender Kegelschnitt.

5) *Chasles* hat auch diese Methode dadurch erweitert, daß er den Punkt A statt in einer Geraden in einem durch die Punkte P und Q gehenden Kegelschnitt bewegt denkt; denn auch dann ist immer $(P \,.\, AA'A''A''')$ $= (Q \,.\, AA'A''A''')$.

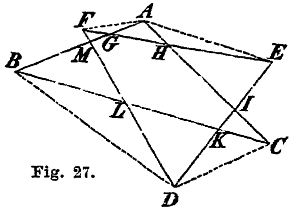


Fig. 27.

6) Der Beweis bleibt auch noch derselbe, wenn statt der Unveränderlichkeit der Winkel APV, AQV festgesetzt wäre, daß diese in festen Geraden konstante Abschnitte bestimmen; denn auch dann gilt die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(P \,.\, AA'A''A''') = (Q \,.\, VV'V''V''')$, weil beide Büschel in einer festen Geraden Abschnitte von derselben Länge bestimmen. Wenn also die Basis eines Dreiecks und der von den Seiten desselben in irgend einer festen Geraden bestimmte Abschnitt gegeben sind, so ist der Ort der Spitze ein Kegelschnitt.

7) *Die Ecken von zwei demselben Kegelschnitt umgeschriebenen Dreiecken ABC, DEF sind sechs Punkte eines Kegelschnittes.* (Vgl. Nr. 266 und Fig. 27.)

Denn die Geraden AB, AC, DE, DF bestimmen nach Nr. 280 in den beiden andern BC und EF Punktreihen von gleichem Doppelverhältnis

$$(BCKL) = (GHEF);$$

also

$$(D \,.\, BCEF) = (A \,.\, BCEF),$$

was den Satz beweist.

Ebenso beweist man den Satz: *Die Seiten von zwei demselben Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecken sind sechs Tangenten eines Kegelschnittes.*

Die Aufsuchung und den Beweis anderer den vorher entwickelten Eigenschaften dual entsprechender Sätze überlassen wir dem Leser.

8) *Das Doppelverhältnis von vier Durchmessern eines Kegelschnittes ist dem der bez. konjugierten Durchmesser gleich.*

Die konjugierten Durchmesser bilden nach ihrem vertauschbaren Entsprechen zwei projektive Büschel in Involution aus dem Mittelpunkt, oder die Richtungen der Paare konjugierter Durchmesser bestimmen in der unendlich fernen Geraden zwei projektive Reihen in Involution. Denn das Doppelverhältnis von vier aus einem Punkt der Kurve gezogenen Sehnen ist dem Doppelverhältnis ihrer Supplementarsehnen gleich (Nr. 172).

9) Mittelpunktsort der einem gegebenen Viereck umgeschriebenen Kegelschnitte. (Vgl. Nr. 255, 1.)

Denkt man Durchmesser eines dieser Kegelschnitte nach den Mittelpunkten der Seiten des Vierecks gezogen, so ist ihr Doppelverhältnis dem ihrer bez. konjugierten gleich und daher konstant, weil diese den zugehörigen Seiten des Vierecks parallel sind. Der fragliche Ort ist daher ein durch die Mittelpunkte der gegebenen Seiten gehender Kegelschnitt. Da aber das betrachtete System drei Kegelschnitte enthält, die in Geradenpaare ausarten, nämlich die Gegenseitenpaare und das Diagonalenpaar des Vierecks, so sind die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare und der Diagonalen gleichfalls Punkte des Ortes.

288. **Projektivität und Involution auf dem Kegelschnitt.** Mit der Erweiterung des Begriffes eines Doppelverhältnisses von den Elementargebilden auf Gebilde zweiten Grades ist auch eine analoge Übertragung des Projektivitätsbegriffes geboten. Man bezeichnet mitunter den Kegelschnitt als *Punktreihe zweiter Ordnung oder als Strahlenbüschel zweiter Klasse.*

Man nennt Punkt- oder Tangentensysteme desselben Kegelschnittes projektiv, wenn bei eindeutiger Zuordnung die homologen Doppelverhältnisse von vier homologen Punkten oder Tangenten gleich sind. Dies fällt unter die Definition der allgemeinen Kollineation (Nr. 92), denn projektiv sind dann auch die erzeugenden Strahlenbüschel an Punkten des Kegelschnittes, die zu jenen Punktsystemen perspektiv sind, oder die erzeugenden Punktreihen in Tangenten des Kegelschnittes, die zu jenen Tangentensystemen perspektiv sind. Diese Systeme an der Kurve haben wiederum zwei reelle, imaginäre oder vereinte Doppelpunkte.

Sind nämlich A, B, C drei Punkte des einen und A', B', C' die entsprechenden Punkte des anderen Systems — also sechs Punkte eines Kegelschnittes — so zeigt die Bemerkung, daß für irgend ein neues Paar X, $X'(A'.ABCX) = (A.A'B'C'X')$ sein muß und daß die Punkte $A'B$, AB' und $A'C$, AC' die Perspektivachse p dieser Büschel bestimmen, sofort die Konstruktion von X' aus X oder umgekehrt, weil sich $A'X$, AX' auf derselben Geraden schneiden müssen. Weil die Gerade von $A'B$, AB' nach $A'C$, AC' die Pascalsche Gerade des dem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks $AB'CA'BC'$ ist, so enthält sie auch den Punkt BC', $B'C$

(Genauigkeitsprobe). Zugleich sind die Schnittpunkte der Geraden p mit dem Kegelschnitt die sich selbst entsprechenden oder Doppelpunkte der beiden projektiven Reihen auf ihm. Durch drei Paare entsprechender Punkte des Kegelschnittes sind also diese projektiven Reihen bestimmt; sie sind es aber auch durch den Kegelschnitt, der sie trägt, ihre Pascalsche Gerade p und ein Paar A, A'. Ist p Tangente des Kegelschnittes, so hat die durch A, A' auf ihm bestimmte Projektivität vereinigte Doppelpunkte.

Und dual: Sind a, b, c und a', b', c' zwei Gruppen entsprechender Tangenten eines Kegelschnittes, so folgt aus

$$(a'.\,abcx) = (a\,.\,a'b'c'x')$$

das Perspektivzentrum P dieser Reihen in a' und a als Schnitt der Geraden $a'b$, ab' und $a'c$, ac'; und weil $ab'ca'bc'$ ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Sechsseit ist, so geht auch die Gerade bc', $b'c$ durch denselben Punkt. Zur Tangente x erhält man die entsprechende x' durch die Bemerkung, daß $a'x$, ax' auf einerlei Strahl durch P liegen müssen. Drei Paare entsprechender Tangenten des Kegelschnittes bestimmen also diese projektiven Tangentensysteme; sie sind aber auch durch den Kegelschnitt, ein Paar von Tangenten desselben a, a' und den Brianchonpunkt P bestimmt. Gehen durch P an den Kegelschnitt zwei reelle Tangenten, so sind sie die Doppelstrahlen der Systeme; für P als Punkt der Kurve fallen sie in einen zusammen.

Die projektiven Systeme bilden eine *Punkt- oder Tangenteninvolution am Kegelschnitt*, sobald sich zwei und damit alle homologen Elemente vertauschbar entsprechen (Nr. 94). Wenn sich das Paar A, A' vertauschbar entspricht, so haben wir für die Projektivität der drei Paare AA'; BB'; CC' die Beziehungen

$$(AA'B'C) = (A'ABC') = (AA'C'B);$$

die Projektion der ersten Gruppe aus B und die der dritten aus C gibt perspektive Büschel mit AA' als Perspektivachse, auf der sich auch die Geraden BB' und CC' schneiden müssen. Die involutorischen Punktsysteme auf einem Kegelschnitt liegen also perspektiv, die Verbindungsgeraden ihrer

Paare AA', BB', CC' usw. gehen durch einen Punkt P, den man den Pol der Involution nennen mag. Dieser Pol und der Kegelschnitt bestimmen die Involution, ebenso wie zwei Paare ihrer Punkte A, A' und B, B' auf dem Kegelschnitt; jede Gerade durch den Pol, die den Kegelschnitt schneidet, liefert ein neues Paar; gehen vom Pol zwei reelle Tangenten, so sind ihre Berührungspunkte mit dem Kegelschnitt die Doppelpunkte der Involution. Fällt der Pol auf die Peripherie, so ist die Involution parabolisch (Nr. 18).

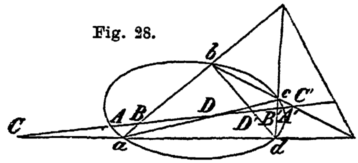
Und dual für die Involution von Tangenten von den Beziehungen $(aa'b'c) = (a'abc') = (aa'c'b)$ aus. Die involutorischen Tangentensysteme an einem Kegelschnitt liegen perspektiv, die Schnittpunkte ihrer Paare liegen in einer Geraden p, ihrer Polare. Eine solche Involution ist durch zwei Tangentenpaare eines Kegelschnittes oder durch diesen und ihre Polare bestimmt. Die Tangenten in den Schnittpunkten mit der Polare sind ihre Doppelstrahlen; wenn die Polare den Kegelschnitt berührt, so ist die Involution parabolisch. Vereinigt man beide Figuren, bilden also die Tangenten a, a'; b, b in den Punkten A, A'; B, B' einer Punktinvolution die Tangenteninvolution, so sind P und p Pol und Polare in bezug auf den Kegelschnitt. Es liegt P auf AA', BB' und ab, $a'b$ sowie auf ab', $a'b$, und p enthält aa', bb' und AB, $A'B'$ sowie AB', $A'B$ (Nr. 136). In Fig. 14, S. 43 ist für C als A und D als B' der Punkt G der Pol und die Gerade g die Polare und sie enthält alle diese Beziehungen; aber sie enthält sie auch für die Involutionen mit E, e resp. F, f als Pol und Polare. Diese Bemerkungen liefern sehr praktische Konstruktionen der Involutionen überhaupt, indem man leicht *Involutionen an einem Hilfskreise* einführt, die zu den gegebenen perspektiv sind. Die Benutzung des Hilfskreises gibt auch den Konstruktionen mit imaginären Elementen ihre praktische Form.

Andrerseits erkennt man, *daß der Kegelschnitt auf sich selbst zentrisch kollinear involutorisch bezogen ist, wenn man einen beliebigen Punkt als Pol wählt und diesen als Zentrum seine Polare als Achse der Kollineation nimmt.*

289. *Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden eine beliebige Gerade in Punktepaaren einer Involution.*[24])

Sind a, b, c, d die Grundpunkte des Büschels und A, A' die Schnittpunkte eines seiner Kegelschnitte mit der Geraden, so ist (Fig. 28)

Fig. 28.



(6) $$(a\,.\,AdbA') = (c\,.\,AdbA'),$$
und, in der Transversale AA' gemessen,

(7) $$(ACBA') = (AB'C'A') = (A'C'B'A).$$
Die Punktepaare A, A' gehören somit zu der Involution, die durch die Paare B, B'; C, C' bestimmt ist, in denen die Transversale zwei Gegenseitenpaare des durch die Grundpunkte bestimmten Vierecks schneidet. *Die Doppelpunkte der Involution sind die Berührungspunkte der Geraden mit denjenigen zwei Kurven des Büschels, die die Gerade zur Tangente haben. Zwei* solche Kurven gibt es im Büschel, denn die zu $f - \lambda g = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten ist in λ vom zweiten Grade (vgl. Nr. 149 und 353). Denkt man das Büschel durch zwei Kegelschnitte $f = 0$, $g = 0$ bestimmt, deren allgemeine Gleichungen wie in Nr. 249 geschrieben sein mögen und nimmt man die Achse der x als die schneidende Gerade, so daß die Substitution $y = 0$ die Paare der Schnittpunkte mit $f = 0$ und $g = 0$ liefert:

(8) $$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0, \quad b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33} = 0,$$
so ist das System der Schnittpunktpaare mit den Kegelschnitten des Büschels $f - \lambda g = 0$ ausgedrückt durch
$$(a_{11} - \lambda b_{11})x^2 + 2(a_{13} - \lambda b_{13})x + a_{33} - \lambda b_{33} = 0,$$
die Involution aus den zwei vorstehenden Paaren. (Vgl. Nr. 323 und Nr. 331.) So schneiden auch Kreise eines Büschels jede Gerade in Punktepaaren einer Involution, die Potenzlinie bestimmt den Mittelpunkt der Involution, die zwei Kreise des Systems, die die Gerade berühren, geben die Doppelpunkte an.

Nach dem Prinzip der Dualität entspricht dem vorigen Hauptsatz der andere: *Die von einem beliebigen Punkt P an die Kegelschnitte einer Schar gelegten Tangentenpaare bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen aus den in P gezogenen*

Tangenten der zwei durch P gehenden Kurven der Schar bestehen. Die drei Punktepaare der Schar liefern die Konstruktion der Involution mit Hilfe des vollständigen Vierseits. Diese Konstruktionen aus Viereck und Vierseit liefern zu einem durch fünf Punkte bez. fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt neue Punkte auf den Strahlen durch einen derselben bez. neue Tangenten aus den Punkten einer der gegebenen.

B. 1) Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so schneidet eine Transversale diesen und zwei Seiten des Dreiecks, die dritte Seite und die Tangente des Kegelschnittes in der gegenüberliegenden Ecke in sechs Punkten einer Involution.

Denn die Tangente bildet mit dem Dreieck ein eingeschriebenes Viereck.

2) Jede Transversale schneidet einen Kegelschnitt und zwei feste Tangenten desselben in zwei Punktepaaren, die eine Involution bestimmen; diese hat in der Berührungssehne jener festen Tangenten einen Doppelpunkt.

Denn die Berührungssehne bildet als ein Paar von Gegenseiten mit den Tangenten ein eingeschriebenes Viereck.

Man bildet leicht die dual entsprechenden Sätze.

3) In jeder Transversale werden von einer Hyperbel und ihren Asymptoten Abschnitte bestimmt, die denselben Mittelpunkt haben. — Denn einer der Doppelpunkte ist unendlich fern.

4) Wenn zwei Kegelschnitte demselben Viereck umgeschrieben sind, so sind die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente zu ihren Schnittpunkten mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks harmonisch konjugiert. Denn sie sind die Doppelpunkte der Involution, die diese bestimmen.

5) Wenn drei Kegelschnitte demselben Viereck umgeschrieben sind, so wird eine gemeinschaftliche Tangente von zweien unter ihnen durch den dritten harmonisch geteilt.

6) Wenn man durch den Schnittpunkt der Schnittsehnen von zwei Kegelschnitten eine Tangente an den einen derselben legt, so wird diese durch den andern harmonisch geteilt.

Denn jener Punkt ist ein Doppelpunkt, usw. Darum halbiert der Berührungspunkt einer zur Potenzlinie zweier Kreise parallelen Tangente die in ihr gelegene Sehne, und in allen Sehnen des einen von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten, die Tangenten des andern sind, gibt der Berührungspunkt die Mitte an. (Nr. 226, 2.)

7) Wenn zwei Kegelschnitte miteinander in doppelter Be-

rührung sind (oder wenn sie eine Berührung dritter Ordnung miteinander haben), wird jede Tangente des einen in ihren Schnittpunkten mit dem andern und in dem Schnittpunkt mit der Berührührungssehne beider Kegelschnitte harmonisch geteilt.

Denn die gemeinschaftlichen Sehnen fallen zusammen, usw. Die Anwendung auf konzentrische Kreise, überhaupt auf ähnliche konzentrische und ähnlich gelegene Kegelschnitte ist offenbar.

8) Man soll einen Kegelschnitt durch vier Punkte A, B, C, D konstruieren, der eine gegebene Gerade berührt.

Der Berührungspunkt ist ein Doppelpunkt der Involution, die in der Geraden durch die Schnittpunkte mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks $ABCD$ bestimmt ist; die Aufgabe hat daher zwei Lösungen.

9) Wenn eine Parallele zu einer Asymptote einen Kegelschnitt in C und die Seiten eines eingeschriebenen Vierecks in den Punkten a, b, c, d schneidet, so ist $Ca . Cc = Cb . Cd$; denn C ist der Mittelpunkt des involutorischen Systems.

10) Man behandle 3) u. f. von Nr. 285 als Fälle der Involution.

In 3) ist K ein Doppelpunkt, in 4) ebenso T, in 5) ist T der Mittelpunkt, usw.

11) Zu einem System von Kegelschnitten durch dieselben vier Punkte gibt es auf jeder beliebigen Geraden zwei reelle oder imaginäre Punkte, die in bezug auf alle seine Kegelschnitte harmonische Pole sind.

Es sind die Doppelpunkte der durch dieselben bestimmten Involution. In Nr. 301, 1 werden sie durch einen der Geraden entsprechenden Kegelschnitt bestimmt.

Wenn ein System von Kegelschnitten vier feste Geraden berührt, so gehen durch jeden Punkt zwei reelle oder imaginäre Strahlen, die in bezug auf alle diese Kegelschnitte konjugierte oder harmonische Polaren sind.

12) Unter den Kegelschnitten, die durch vier feste Punkte gehen, gibt es zwei (reelle oder imaginäre), die die unendlich ferne Gerade berühren (Parabeln); jede Kurve des Büschels hat ein reelles oder imaginäres Paar konjugierter Durchmesser, das den Achsen dieser Parabeln parallel ist.

Man denke die Transversale des Satzes der vorigen Aufgabe unendlich entfernt.

13) Man bestimme unter den durch vier feste Punkte gehenden Kegelschnitten denjenigen, der eine gegebene Strecke EF harmonisch teilt, insbesondere den von gegebenen Achsenrichtungen.

14) Der Ort des Pols einer Geraden in bezug auf die durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt, der durch

die Schnittpunkte der Diagonalen und der Gegenseitenpaare des Vierecks geht. (Nr. 255, 1.)

Denn die in bezug auf die Kegelschnitte genommenen Polaren zweier Punkte P und Q bilden je ein Strahlenbüschel; die Strahlen dieser beiden Büschel entsprechen sich eindeutig, d. h. projektiv, der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist daher ein Kegelschnitt. Diese Schnittpunkte sind aber die Pole der Geraden PQ in bezug auf die Kegelschnitte des Systems oder die Scheitel der Polarenbüschel für den in der Geraden PQ fortbewegten Pol.

15) Das Büschel der Polaren des Punktes P in bezug auf vier demselben Viereck umgeschriebene Kegelschnitte hat ein von der Lage von P unabhängiges Doppelverhältnis (Nr. 250). Die Reihen der Berührungspunkte, die in den gemeinsamen Tangenten von vier demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten durch diese gebildet werden, haben dasselbe Doppelverhältnis.

Man kann infolge dieser Eigenschaften von dem *Doppelverhältnis von vier Kegelschnitten eines Büschels oder einer Schar* sprechen.

Sechzehntes Kapitel.

Besondere homogene Gleichungsformen zweiten Grades.

290. **Sich selbst duale Gleichungsformen.** Die für die Theorie der Kegelschnitte grundlegende Einführung der projektiven Büschel und Reihen knüpfte sich an die dualen Gleichungsformen $s_1 s_2' - s_2 s_1' = 0$ und $\sigma_1 \sigma_2' - \sigma_2 \sigma_1' = 0$, entwickelte sich aber weiter durch die bloße Anwendung des Begriffes des Doppelverhältnisses.

Die beste analytische Ausdrucksform wird erst erreicht, wenn man *die linearen Funktionen selbst als trimetrische oder projektive Koordinaten* (Dreieckskoordinaten) einführt. Dies weist auf solche Gleichungsformen hin, die nur drei lineare Symbole enthalten. Die einfachsten sind $s_1 s_3 - s_2^2 = 0$, bez. $\sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2^2 = 0$, wo $s_1 = 0$, $s_3 = 0$ zwei Tangenten und $s_2 = 0$ die Polare ihres Schnittpunktes, bez. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = 0$ zwei Punkte und $\sigma_2 = 0$ den Pol ihrer Verbindungsgeraden (Nr. 270) darstellen.

Als erzeugende projektive Büschel bez. Reihen bieten sich unmittelbar $k s_1 - s_2 = 0$, $s_3 - k s_2 = 0$ bez. $\varkappa \sigma_1 - \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 - \varkappa \sigma_2 = 0$, so daß als homologe Elemente erscheinen s_1, s_2; s_2, s_3 bez. σ_1, σ_2; σ_2, σ_3, während s_2 bez. σ_2 die gemeinsamen Elemente sind.

Nehmen wir nun $\sigma_2 = 0$ als den Pol von $s_2 = 0$, so ist das Dreiseit $s_1 s_2 s_3 = 0$ mit dem Dreieck $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 0$ identisch. *Diese Gleichungen sind sich also selbst dual*, gehören daher in ganz derselben Weise der Untersuchung der Kegelschnitte als Ordnungs- oder Klassenkurven an.

Dieselbe Eigenschaft werden wir der Gleichungsform $l_1 s_1^2 + l_2 s_2^2 + l_3 s_3^2 = 0$ (Nr. 260) zuerkennen (Nr. 299). Die

übrigen symbolischen Gleichungen entsprechen einander z dual, aber sie sind *nicht* im vorhin erwähnten Sinne se dual, denn das Viereck und das Vierseit in den zuerst wähnten Gleichungsformen können für denselben Kegelsch nicht identisch sein.

Wir bedienen uns zu den weiteren Untersuchungen mogener Koordinaten. Zunächst nehmen wir für Punktkoo naten das Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$ als das von den be Tangenten $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und ihrer Berührungssehne x_2 gebildete Dreieck, für Linienkoordinaten das Dreieck der bei Berührungspunkte $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ der Kurve und des Sch punktes $u_2 = 0$ ihrer Tangenten. Dann ist die Gleichung e Kegelschnittes in projektiven Punkt- bez. Linienkoordin

(1) $$x_1 x_3 = x_2{}^2, \quad u_1 u_3 = u_2{}^2,$$

falls der Punkt bez. die Gerade von den Koordinaten I demselben angehören, oder falls eine Konstante implizite dacht wird.

Ebenso ist die Gleichung eines Kegelschnittes, bezo auf ein Polardreieck als Fundamentaldreieck, in Punkt- Linienkoordinaten.

(2) $$a_{11} x_1{}^2 + a_{22} x_2{}^2 + a_{33} x_3{}^2 = 0 \text{ bez. } A_{11} u_1{}^2 + A_{22} u_2{}^2 + A_{33} u_3{}^2 =$$

Im allgemeinen beschränken wir uns auf die Behandlung Gleichungen in Punktkoordinaten, da das Dualitätspri die Wiederholung einer solchen in Linienkoordinaten ü flüssig macht.

291. **Parameterdarstellung.** Für $x_1 x_3 = x_2{}^2$ als Gleich des Kegelschnittes folgt aus der Beziehung $\mu x_1 = x_2$ du Einsetzen in die Gleichung der Kurve gleichmäßig $x_3 =$ und $x_3 = \mu^2 x_1$. Also schneidet die vom Punkte $x_1 = x_2$ ausgehende Gerade $\mu x_1 = x_2$ den Kegelschnitt in einem zwe Punkte, dessen Verbindungsgeraden mit den beiden and Fundamentalpunkten durch die Gleichungen $\mu x_2 = x_3$ $x_3 = \mu^2 x_1$ dargestellt sind. *Die Koordinaten eines Kur punktes sind also Potenzen eines Parameters proportional,*

(3) $$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \mu : \mu^2.\text{*)}$$

*) Durch die Einsetzung der Potenzen in $x_1 x_3 = x_2{}^2$ wird Gleichung identisch erfüllt.

Wir können daher den Kurvenpunkt als den Punkt μ bezeichnen, und die Anwendung unseres Koordinatensystems bietet alle Vorteile der Rechnung mit einer *einzigen* Veränderlichen dar.

Die Verbindungslinie von zwei Punkten μ, μ' der Kurve ist durch $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu')x_2 + x_3 = 0$ dargestellt, da sie durch jede der Voraussetzungen $\mu x_1 = x_2$, $\mu x_2 = x_3$, $\mu' x_1 = x_2$, $\mu' x_2 = x_3$ erfüllt wird. Dem Zusammenfallen der Punkte μ und μ' entspricht die *Gleichung der Tangente im Punkte* μ, nämlich

$$\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0. \tag{4}$$

Also sind die Koordinaten u_i der Tangente durch denselben Parameter ähnlich ausgedrückt wie die x_i, nämlich

$$u_1 : u_2 : u_3 = \mu^2 : -2\mu : 1. \tag{5}$$

Hieraus erkennt man, daß die Tangenten durch die Beziehung $4u_1 u_3 - u_2^2 = 0$ verbunden sind, d. h. dies ist die Tangentialgleichung des Kegelschnittes $x_1 x_3 = x_2^2$. In der Tat ist sie also von derselben Form, aber nicht etwa $u_1 u_3 = u_2^2$ selbst.

B. 1) Die Gerade $\mu\mu'$ trifft $A_1 A_3$ in dem durch $\mu\mu' x_1 + x_3 = 0$ ausgedrückten Punkte; nach ihm gehen auch die Geraden, die die Schnittpunkte $A_1\mu$, $A_2 A_3$; $A_1\mu'$, $A_2 A_3$ mit den Schnittpunkten $A_3\mu'$, $A_1 A_2$; $A_3\mu$, $A_1 A_2$ bez. verbinden (Fig. 29). So auch für zusammenfallende μ, μ'.

2) Die Gleichung der Parabel, die die Seiten $A_1 A_2$, $A_3 A_2$ in den Punkten A_1, A_3 bez. berührt, wird in Dreieckskoordinaten aus $\lambda x_1 x_3 = x_2^2$ durch die Bedingung der Berührung mit der unendlich fernen Geraden $\Sigma l_i x_i = 0$ bestimmt, also durch $4 l_1 l_3 = \lambda l_2^2$; die Gleichung ist $l_2^2 x_2^2 = 4 l_1 l_3 x_1 x_3$. Hier sind l_1, l_2, l_3 den Längen der Seiten des Koordinatendreiecks oder den Sinus der gegenüberliegenden Winkel proportional (Nr. 75).

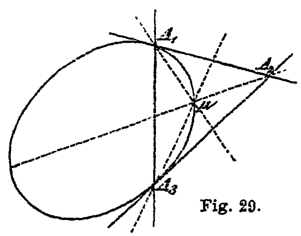


Fig. 29.

3) Wenn die Tangente μ den Kegelschnitt umhüllt, so wird ein denselben in A_1, A_3 doppelt berührender Kegelschnitt durch den Punkt Q erzeugt, in dem sich nach S. 43 die Verbindungslinien der Ecken des umgeschriebenen Dreiecks mit den Berührungspunkten der Gegenseiten schneiden. Die Harmonikale von Q in bezug auf das Dreieck (Nr. 67, 1) umhüllt ebenfalls einen Kegelschnitt, der den gegebenen in A_1 und A_3 doppelt berührt.

4) Man bestimme den Pol der Verbindungslinie der Punkte μ, μ' der Kurve.

Seine Koordinaten x_1', x_2', x_3' genügen den beiden Gleichungen

$$\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0, \quad \mu'^2 x_1' - 2\mu' x_2' + x_3' = 0;$$

aus ihnen folgt

$$\frac{x_1'}{2(\mu - \mu')} = \frac{x_2'}{\mu^2 - \mu'^2} = \frac{x_3'}{2\mu\mu'(\mu - \mu')} \quad \text{oder} \quad \frac{x_1'}{2} = \frac{x_2'}{\mu + \mu'} = \frac{x_3'}{2\mu\mu'}.$$

292. **Hüllkurven.** *Umgekehrt berührt eine Gerade, deren Gleichung einen Parameter μ im zweiten Grade enthält, einen Kegelschnitt.* In der Tat kann man die in x_1, x_2, x_3 lineare Gleichung nach μ ordnen und die Koeffizienten so bezeichnen, daß die Form entsteht $\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0$. Diese stellt aber nach dem Vorigen stets eine Tangente des Kegelschnittes $x_1' x_3' = x_2'^2$ dar.

Allgemein stellt die Gleichung einer Geraden, falls sie einen Parameter algebraisch enthält und man dieser unbestimmten Größe alle möglichen Werte gibt, eine einfach unendliche Reihe von verschiedenen Geraden dar, die alle eine gewisse algebraische Kurve berühren. Man nennt diese die *Hüllkurve des Geradensystems.* Ihre Gleichung ist bereits für einzelne einfache Fälle ermittelt worden. Die nähere Untersuchung des Problems ist aber von Wichtigkeit, weil sie das *Mittel zum Übergang von der Darstellung einer Kurve in Punktkoordinaten zur Darstellung derselben Kurve in Linienkoordinaten liefert.*

Wir erläutern die allgemeine Methode zur Bestimmung der Gleichung einer solchen Hüllkurve dadurch, daß wir den Satz dieses Paragraphen unabhängig von Nr. 291 beweisen. Der Schnittpunkt der den Werten μ und $\mu + k$ entsprechenden Geraden ist durch die Gleichungen bestimmt

$$\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0, \quad 2(\mu x_1 - x_2) + k x_1 = 0.$$

Von diesen geht die zweite aus der ersten hervor, indem man $\mu + k$ für μ setzt, dann die infolge der ersten verschwindenden Glieder beseitigt und den Rest durch k dividiert. Je kleiner k ist, desto mehr nähert sich die zweite Gerade dem Zusammenfallen mit der ersten, und für den Grenzübergang $k = 0$ finden wir, daß der Schnittpunkt der

ersten Geraden mit einer unendlich nahe benachbarten, d. h. mit der nächstfolgenden Geraden des Systems durch die Gleichungen bestimmt ist

$$\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0, \quad \mu x_1 - x_2 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen

$$\mu x_1 - x_2 = 0, \quad \mu x_2 - x_3 = 0.$$

Da nun jeder Punkt der Kurve als der Schnittpunkt von zwei aufeinander folgenden Tangenten derselben angesehen werden darf (Nr. 79), so ist der Punkt, den eine Kurve des Systems mit der Hüllkurve gemein hat, eben der, in dem sie auch die nächstfolgende Tangente der Hüllkurve schneidet. Die beiden letzten Gleichungen bestimmen also den Punkt dieser Kurve, der die Gerade $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$ zur Tangente hat; die Elimination von μ zwischen diesen Gleichungen gibt die Gleichung des Ortes aller Punkte der Hüllkurve in der Form $x_1 x_3 = x_2^2$.

Analoge Gründe beweisen, daß für $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ als Gleichungen von Kurven, die durch

$$(6) \qquad \mu^2 X_1 - 2\mu X_2 + X_3 = 0$$

dargestellte Kurve stets die Kurve $X_1 X_3 = X_2^2$ berührt.

Zu denselben Ergebnissen führt auch folgendes Verfahren: *Die Gerade $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$ ist Tangente einer Kurve zweiter Klasse* (Nr. 105 und 147), *da durch jeden Punkt x_i' nur zwei Geraden des Systems hindurchgehen*, nämlich diejenigen, die den aus $\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0$ bestimmten Werten von μ entsprechen. Diese beiden Werte von μ fallen aber zusammen, oder der betrachtete Punkt ist der Schnittpunkt von zwei aufeinander folgenden Tangenten, wenn seine Koordinaten der Gleichung $x_1 x_3 = x_2^2$ genügen.

Und allgemein wird die Gleichung einer Kurve n^{ter} Klasse gefunden, indem man die Bedingung ausdrückt, unter der die *Parametergleichung* der Tangente, die in μ vom n^{ten} Grade ist, ein Paar gleiche Wurzeln hat.

B. 1) Die Eckpunkte eines Dreiecks ABC bewegen sich in drei festen Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, während seine Seiten CA, CB durch die beiden festen Punkte x_i' bez. x_i'' gehen; man soll die Hüllkurve der dritten Seite bestimmen.

Wenn $x_1 + \mu x_2 = 0$ die Gerade ist, die den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ mit dem längs der Geraden $x_3 = 0$ sich bewegenden Eckpunkt C des Dreiecks verbindet, so sind die Gleichungen der durch die festen Punkte A bez. B gehenden Seiten:

$$x_3'(x_1 + \mu x_2) = (x_1' + \mu x_2')x_3, \quad x_3''(x_1 + \mu x_2) = (x_1'' + \mu x_2'')x_3.$$

Die Gleichung der Basis ist

$$(x_1' + \mu x_2')x_3'' x_1 + (x_1'' + \mu x_2'')\mu x_3' x_2 - (x_1' + \mu x_2')(x_1'' + \mu x_2'')x_3 = 0;$$

denn die dieser Gleichung entsprechende Gerade geht sowohl durch den Schnittpunkt der ersten Geraden mit $x_1 = 0$, als auch durch den der zweiten mit $x_2 = 0$. Indem man nach Potenzen von μ ordnet, findet man die Gleichung der Hüllkurve

$$\begin{aligned}(x_1 x_2' x_3'' + x_2 x_3' x_1'' - x_3 x_1' x_2'' - x_3 x_1'' x_2')^2 \\ = 4 x_1' x_2'' (x_1 x_3'' - x_1'' x_3)(x_2 x_3' - x_2' x_3).\end{aligned}$$

Man kann dieselbe Aufgabe auch auf Grund der nach Potenzen von a geordneten Gleichung von Nr. 52, 3 lösen.

2) Der Form der Kegelschnittsgleichung $u_1 u_3 = k^2 u_2^2$ entspricht $\mu^2 u_1 + 2\mu k u_2 + u_3 = 0$ als Gleichung des Berührungspunktes der Tangente μ, die die Koordinaten hat $u_1 : u_2 : u_3 = k : (-\mu) : \mu^2 k$.

3) Wenn in irgend einem Koordinatensystem x_i', x_i'' die Koordinaten von zwei Punkten P', P'' eines Kegelschnittes und x_i''' die Koordinaten des Pols ihrer Sehne sind, so können die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve in der Form

$$\mu^2 x_1' + 2\mu k x_1''' + x_1'', \quad \mu^2 x_2' + 2\mu k x_2''' + x_2'', \quad \mu^2 x_3' + 2\mu k x_3''' + x_3''$$

geschrieben werden; seine Tangente teilt die Tangenten von P' und P'' nach den Verhältnissen $\mu : k$, $\mu k : 1$. Für $k = 1$ ist die Kurve nach Nr. 284 eine Parabel.

4) Man soll den Ort eines Punktes (die Hüllkurve einer Geraden) bestimmen, der (die) den zwischen zwei festen Tangenten eines Kegelschnittes gelegenen Abschnitt einer veränderlichen Tangente desselben (den von zwei festen Punkten eines Kegelschnittes an einem veränderlichen Punkte desselben bestimmten Winkel) nach gegebenem Verhältnis (Sinusverhältnis) $m : n$ teilt.

Für $u_1 u_3 = k^2 u_2^2$ als Gleichung des gegebenen Kegelschnittes ist die Gleichung des Teilpunktes

$$\mu^2(m u_2 + n u_1)k + \mu\{n u_1 + m u_3 + (m+n)k^2 u_2\} + (n u_2 + m u_3)k = 0;$$

sein Ort ist also dargestellt durch

$$4k^2(n u_1 + m u_2)(n u_2 + m u_3) = \{n u_1 + m u_3 + (m + n)k^2 u_2\}^2.$$

5) Man soll die Hüllkurve der Geraden $\frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu'} = 1$ darstellen, wenn die unbestimmten Größen μ, μ' in der Gleichung derselben durch die Beziehung $\mu + \mu' = C$ verbunden sind; A, B und C sind lineare Funktionen von x und y.

Indem man für μ' den Wert $C - \mu$ einsetzt und die Brüche beseitigt, findet man als Gleichung der Hüllkurve

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC - 2BC = 0,$$

oder

$$\pm\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} = 0.$$

Wenn z. B. der Winkel an der Spitze und die Summe der ihn einschließenden Seiten eines Dreiecks gegeben sind, so ist die Gleichung der Basis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{für} \quad a + b = c;$$

die Hüllkurve ist also

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = 0,$$

d. h. eine die Seiten $x = 0$, $y = 0$ berührende Parabel.

Oder wenn von einer Ellipse die Lage zweier konjugierter Durchmesser und die Summe ihrer Quadrate gegeben sind, wenn also $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ und $a'^2 + b'^2 = c^2$ sind, so ist die Hüllkurve dieser Ellipse durch $x \pm y \pm c = 0$ dargestellt, und die Ellipse berührt daher stets vier feste Geraden.

293. Um *die Gleichung der Polare eines Punktes* x_i' bezüglich der Kurve (1) zu bestimmen, denken wir die Koordinaten des Punktes als der Gleichung der durch ihn gehenden Tangente genügend; nehmen also an

$$\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0.$$

Nun ist nach (3) im Berührungspunkte $\mu^2 = x_3 : x_1$, $\mu = x_2 : x_1$, daher befriedigen die Koordinaten des Berührungspunktes die Beziehung

$$x_3' x_1 - 2x_2' x_2 + x_1' x_3 = 0. \tag{7}$$

Dies ist die Gleichung der Polare. Wäre der Punkt als Schnittpunkt der Geraden $ax_1 = x_2$, $bx_2 = x_3$ gegeben, so wäre die Gleichung seiner Polare $abx_1 - 2ax_2 + x_3 = 0$.

Liegt der Pol in der Polare, so genügen die x_i' der Gleichung derselben, und man erhält als Bedingung der Lage auf der Kurve die Gleichung $x_1' x_3' = x_2'^2$ wieder.

B. 1) Wenn man den vorher implizite gedachten Koeffizienten in die betrachtete Kegelschnittsgleichung explizite einführt, so ist sie $x_1 x_3 = k^2 x_2^2$. Die Schnittpunkte der Geraden $x_3 = \lambda^2 x_1$ mit dem Kegelschnitt sind $k^2 x_2^2 = \lambda^2 x_1^2$, oder $k x_2 = \pm \lambda x_1$; man erkennt darin die harmonische Teilung der durch den Pol gehenden Sehne in der Polare wieder. Dem Punkte $+\lambda$ entspricht jetzt die Gruppe von Formeln

$$\lambda x_1 = k x_2, \quad x_3 = \lambda k x_2, \quad \text{oder} \quad x_1 : x_2 : x_3 = k : \lambda : \lambda^2 k.$$

Die Gleichung der Sehne zwischen den Punkten λ, λ' wird

$$\lambda\lambda' x_1 - (\lambda + \lambda') k x_2 + x_3 = 0,$$

daher die der Tangente in λ ebenso $\lambda^2 x_1 - 2\lambda k x_2 + x_3 = 0$. Die Koordinaten des Pols der Sehne λ, λ' sind bestimmt durch

$$\frac{x_1'}{2} = \frac{k x_2'}{\lambda + \lambda'} = \frac{x_3'}{2\lambda\lambda'}.$$

Läßt man jene Sehne mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, so erhält man für die trimetrischen Normalkoordinaten des Mittelpunktes $x_1' : x_2' : x_3' = 2k^2 l_3 : -l_2 : 2k^2 l_1$, wo l_1, l_2, l_3 die Längen der Seiten des Koordinatendreiecks bedeuten.

2) Wenn drei Kegelschnitte von den bez. Seitenpaaren eines Dreiecks in den Endpunkten der jedesmaligen dritten Seite berührt werden und durch einen Punkt gehen, so schneiden die Tangenten derselben in diesem Punkte die Dreiecksseiten, die ihnen bez. als Berührungssehnen entsprechen, in drei Punkten einer Geraden.

294. Die Sehne, die zwei Punkte $\mu \operatorname{tg} \varphi$ und $\mu : \operatorname{tg} \varphi$ verbindet, wo φ einen beliebigen konstanten Winkel bezeichnet, berührt stets einen Kegelschnitt, der mit dem Kegelschnitt $x_1 x_3 = x_2^2$ eine doppelte Berührung hat.

Denn die Gleichung der Sehne ist (Nr. 293)

$$\mu^2 x_1 - \mu x_2 (\operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi) + x_3 = 0, \tag{8}$$

und diese ist wegen $\operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi = 2 : \sin 2\varphi$ die Gleichung einer Tangente des Kegelschnittes $x_1 x_3 \sin^2 2\varphi = x_2^2$ im Punkte μ desselben.

Man erkennt ebenso, daß der Ort des Schnittpunktes der Tangenten in den Punkten $\mu \operatorname{tg} \varphi$, $\mu : \operatorname{tg} \varphi$ der Kegelschnitt $x_1 x_3 = x_2^2 \sin^2 2\varphi$ ist.

B. 1) Die Basis eines Dreiecks berührt einen gegebenen Kegelschnitt, während sich ihre Endpunkte in zwei festen Tangenten desselben bewegen und die beiden anderen Seiten durch feste Punkte P', P'' gehen: der Ort der Spitze ist ein Kegelschnitt durch P', P'' (Nr. 287, 3).

Sind $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ die festen Tangenten und ist $x_1 x_3 = x_2^2$ der Kegelschnitt, so sind $0 \mid 1 \mid 2\mu$ die Koordinaten des Schnittpunktes von $x_1 = 0$ mit der Tangente $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$, und die Gleichung der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem festen Punkte x_i' ist $x_3' x_1 - x_1' x_3 = 2\mu(x_2' x_1 - x_1' x_2)$. Ebenso ist die Gleichung der Verbindungslinie des festen Punktes x_i'' mit dem Punkte $2 \mid \mu \mid 0$, in dem $x_3 = 0$ die Tangente in μ schneidet, $2(x_3'' x_2 - x_2'' x_3) = \mu(x_3'' x_1 - x_1'' x_3)$. Die Elimination von μ zwischen beiden Gleichungen gibt als den Ausdruck für den Ort des Scheitels

$$(x_3' x_1 - x_1' x_3)(x_3'' x_1 - x_1'' x_3) = 4(x_2' x_1 - x_1' x_2)(x_3'' x_2 - x_2'' x_3).$$

2) Wenn in 1) die Basisecken in irgend einem Kegelschnitt liegen, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat und die gegebenen festen Punkte enthält, so ist immer noch der Ort der Spitze ein Kegelschnitt.

Sind $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$, $x_1 x_3 \sin^2 2\varphi - x_2^2 = 0$ die Gleichungen der Kegelschnitte, so schneidet eine Tangente in μ des zweiten den ersten in Punkten $\mu \operatorname{tg} \varphi$ und $\mu \cot \varphi$; wenn die auf dem ersten Kegelschnitt liegenden festen Punkte μ', μ'' sind, so sind die Gleichungen der Seiten des Dreiecks

$$\mu\mu' x_1 \operatorname{tg}\varphi - (\mu' + \mu \operatorname{tg}\varphi) x_2 + x_3 = 0,$$
$$\mu\mu'' x_1 \cot\varphi - (\mu'' + \mu \cot\varphi) x_2 + x_3 = 0$$

und die Elimination von μ liefert die Gleichung des Ortes

$$(x_3 - \mu' x_2)(\mu'' x_1 - x_2) = \operatorname{tg}^2\varphi (x_3 - \mu'' x_2)(\mu' x_1 - x_2).$$

295. Für die Anwendungen ist es nützlich, zu bemerken, daß die Elimination von x_2 zwischen den Gleichungen der Tangenten in den Punkten μ, μ' für die Verbindungslinie des Schnittpunktes dieser Tangenten mit dem Eckpunkt A_2 des Fundamentaldreiecks die Gleichung $\mu\mu' x_1 - x_3 = 0$ liefert. Wenn also das Produkt a zweier Werte von μ gegeben ist, so liegt der Schnittpunkt der zugehörigen Tangenten in der festen Geraden $a x_1 = x_3$. Substituiert man in demselben Falle a für $\mu\mu'$ in die Gleichung der Sehne zwischen zwei Punkten, so erkennt man, daß diese Sehne durch den Schnittpunkt der Seite $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks mit der Geraden $a x_1 + x_3 = 0$ hindurchgeht. *Ferner liegen die Punkte* $+\mu$ *und* $-\mu$ *in einer durch* A_2 *gehenden Geraden*, denn die Verbindungslinie von A_2 mit μ hat die Gleichung $\mu^2 x_1 = x_3$.

B. 1) Ein Dreieck ABC bleibt einem festen Kegelschnitt umgeschrieben, während sich zwei seiner Ecken, A und B, in festen

Geraden bewegen; der Ort der dritten Ecke C ist ein Kegelschnitt, der jenen in der Polare des Schnittpunktes der festen Geraden doppelt berührt.

Wir wählen die beiden Tangenten des Kegelschnittes aus dem Schnittpunkt der festen Geraden und ihre Berührungssehne als Fundamentallinien und setzen die Gleichungen der festen Geraden in der Form $ax_1 - x_3 = 0$, $bx_1 - x_3 = 0$ voraus, die Gleichung des Kegelschnittes aber als $x_1 x_3 = x_2^2$. Für zwei sich in $ax_1 - x_3 = 0$ schneidende Tangenten dieser Kurve ist das Produkt der μ gleich a; wenn also die Dreiecksseite AB im Punkte μ berührt, so berühren die beiden anderen AC und BC in den Punkten $a:\mu$ bez. $b:\mu$, und es sind $a^2 x_1 - 2a\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0$, $b^2 x_1 - 2b\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0$ ihre Gleichungen. Die Elimination von μ zwischen diesen Gleichungen ergibt für den Ort des Scheitels:

$$(a+b)^2 x_1 x_3 = 4ab x_2^2.$$

2) Die Hüllkurve der Grundlinie AB eines Dreiecks ABC, das einem festen Kegelschnitt eingeschrieben ist, und dessen beide Scheitelseiten durch zwei feste Punkte gehen, ist ein Kegelschnitt, der jenen in der Verbindungslinie der festen Punkte doppelt berührt.

Wir wählen die Verbindungslinie der festen Punkte als Seite $x_2 = 0$ des Koordinatendreiecks, die Gleichung des festen Kegelschnittes sei $x_1 x_3 = x_2^2$, die Gleichungen der Geraden, die die festen Punkte mit dem Punkt $x_1 = x_3 = 0$ verbinden, seien $ax_1 + x_3 = 0$, $bx_1 + x_3 = 0$. Nun entsprechen den Endpunkten A, C einer durch $ax_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ gehenden Sehne AC Werte von μ, deren Produkt gleich a ist; wenn also der Parameter μ dem Scheitel C entspricht, so gehören zu den Enden A und B der Basis die Parameter $a:\mu$ und $b:\mu$, und die Gleichung der Basis ist $abx_1 - (a+b)\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0$. Diese berührt daher (Nr. 292) stets den Kegelschnitt $4abx_1 x_3 = (a+b)^2 x_2^2$.

296. *Das Doppelverhältnis von vier Tangenten eines Kegelschnittes ist dem Doppelverhältnis ihrer Berührungspunkte gleich,* nämlich

$$(9) \qquad (\mu \cdot \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) = \{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4\} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}.$$

Zunächst ist dies der Ausdruck des Doppelverhältnisses der vier Strahlen, die die gegebenen Punkte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ mit einem beliebigen fünften μ verbinden. Denn nach Nr. 291 sind $\mu_i(\mu x_1 - x_2) + (x_3 - \mu x_2) = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, die Gleichungen dieser Strahlen, wo die μ_i den Teilverhältnissen proportional sind (Nr. 85).

Ferner stimmt das Doppelverhältnis der Punktreihe, die in der Tangente μ von den Tangenten $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ausgeschnitten wird, überein mit dem Doppelverhältnis des zu ihr perspektiven Strahlenbüschels aus A_2. Die Gleichungen dieser Strahlen sind aber (Nr. 295)

$$\mu_1 \mu x_1 = x_3, \quad \mu_2 \mu x_1 = x_3, \quad \mu_3 \mu x_1 = x_3, \quad \mu_4 \mu x_1 = x_3;$$

also ist das Büschel zu dem über den Berührungspunkten aus dem Punkte μ beschriebenen Büschel projektiv oder doppelverhältnisgleich (Nr. 86).

Der Parameterausdruck (9) des Doppelverhältnisses hat nun nach Nr. 93 die Eigenschaft, dann und nur dann unveränderten Wert zu behalten, wenn man jeden Parameter μ durch eine lineare gebrochene Funktion je eines neuen Parameters μ' ersetzt. Demnach gehören die Parameterwerte

$$\mu' \text{ und } \mu = -\frac{c\mu' + d}{a\mu' + b} \quad (\mu' = -\infty \cdots + \infty)$$

zu homologen Elementen in projektiven Punkt- oder Tangentensystemen an dem gegebenen Kegelschnitt (Nr. 288). *In dieser Parameterdarstellung definiert also die allgemeine bilineare Gleichung* $a\mu\mu' + b\mu + c\mu' + d = 0$ *die Projektivität, die symmetrische Gleichung* $a\mu\mu' + b(\mu + \mu') + d = 0$ *die Involution auch in Punktreihen zweiter Ordnung und Strahlenbüscheln zweiter Klasse.* Offenbar gilt das erste selbst dann, wenn die homologen Parameter in verschiedenen Kegelschnitten gedeutet werden.

B. 1) Wenn vier Strahlen durch einen Punkt A_2 gezogen werden, so ist das Doppelverhältnis von vieren ihrer Schnittpunkte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ mit dem Kegelschnitt dem Doppelverhältnis der übrigen gleich.

Denn deren Parameter sind dann $-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3, -\mu_4$.

2) Die Seiten eines Dreiecks drehen sich um feste Punkte A, B, C, während die Endpunkte a, b der um C sich drehenden Seite auf einem die Punkte A und B enthaltenden Kegelschnitt fortrücken; der Ort der freien Ecke V ist ein Kegelschnitt durch A und B.

Denn für vier Lagen des beweglichen Dreiecks ist nach 1) $(aa'a''a''') = (bb'b''b''')$, oder $(A \cdot aa'a''a''') = (B \cdot bb'b''b''')$, daher auch

$$(A \cdot VV'V''V''') = (B \cdot VV'V''V''').$$

3) *Haben zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung miteinander, so ist das Doppelverhältnis von vier Punkten, in denen vier Tangenten des einen den andern schneiden, dem Doppelverhältnis ihrer vier andern Schnittpunkte und dem der vier Berührungspunkte gleich.*[25])

Denn der Ausdruck für das Doppelverhältnis bleibt ungeändert, wenn man jedes μ entweder mit $\operatorname{tg}\varphi$ oder mit $\cot\varphi$ multipliziert (Nr. 294).

297. *Das Erzeugnis projektiver Punkt- oder Tangentensysteme eines Kegelschnittes ist ein doppelt berührender Kegelschnitt.* Man kann den Satz auch so aussprechen: Sind drei Punktepaare (Tangentenpaare) A, A'; B, B'; C, C' eines Kegelschnittes gegeben, so umhüllt die Verbindungsgerade (durchläuft der Schnittpunkt) DD' einen Kegelschnitt, der den gegebenen in den Doppelelementen berührt, falls $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$ gemacht wird.*)

Aus der bilinearen Beziehung

$$a\mu\mu' + b\mu + c\mu' + d = 0, \tag{10}$$

deren Koeffizienten von den Parametern der gegebenen Elemente abhängen, und der Gleichung $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu')x_2 + x_3 = 0$ der Sehne (Nr. 291), eliminiert man μ' und erhält

$$\mu^2(bx_1 + ax_2) + \mu\{dx_1 + (c-b)x_2 - ax_3\} - (dx_2 + cx_3) = 0.$$

Diese Gerade berührt aber (Nr. 292) immer den Kegelschnitt

$$4(bx_1 + ax_2)(dx_2 + cx_3) + \{dx_1 + (c-b)x_2 - ax_3\}^2 = 0$$

oder in leichter Umformung

$$4(bc - ad)(x_1x_3 - x_2^2) + \{dx_1 + (b+c)x_2 + ax_3\}^2 = 0.$$

Derselbe hat, wie seine Gleichung zeigt (Nr. 258), mit $x_1x_3 - x_2^2 = 0$ eine doppelte Berührung in der Sehne $dx_1 + (b+c)x_2 + ax_3 = 0$, die in der Tat die durch $a\mu^2 + (b+c)\mu + d = 0$ definierten Doppelpunkte der projektiven Reihen ausschneidet.

Diese Gerade liefert aber auch das Mittel zur Konstruktion homologer Punkte der projektiven Reihen, nach dem

---

*) Umgekehrt bilden die beiden Tangenten, die von Punkten eines ersten Kegelschnittes an einen zweiten gelegt werden, an diesem nur dann projektive Büschel zweiter Ordnung, wenn sich die Kegelschnitte doppelt berühren.

Satze: *Die Schnittpunkte der kreuzweisen Verbindungsgeraden* AB', $A'B$ *zweier Paare homologer Punkte liegen in der Verbindungsgeraden* p *der Doppelpunkte* D_1, D_2; *und ebenso: Die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte* ab', $a'b$ *zweier Paare homologer Tangenten gehen durch den Schnittpunkt* P *der Doppelstrahlen* d_1, d_2. Denn die Differenz der Gleichungen der Sehnen μ_1, μ_2' und μ_2, μ_1' ergibt nach Einsetzen der Werte von μ_2', μ_1' aus der Projektivitätsgleichung (10) und nach Streichung des Faktors $\mu_2 - \mu_1$ die Gleichung der Berührungssehne p. Daher ist p einfach die Pascalsche Gerade bez. P der Brianchonsche Punkt des aus irgend drei homologen Elementenpaaren in der Reihenfolge $AB'CA'BC'$ gebildeten Sechsecks bez. Sechsseits. In Fig. 17 (S. 62) können als homologe Tripel genommen werden ACE und DFB; K ist ein Doppelpunkt, d. h. $\{KACE\} = \{KDFB\}$, denn es ist auch

$$(KPNL) = (D \cdot KACE) = (A \cdot KDFB).$$

Im Falle der Involution dagegen bilden die Verbindungsgeraden homologer Punkte ein Strahlenbüschel, die Schnittpunkte homologer Tangenten eine Punktreihe (Nr. 288). Denn bei $b = c$ wird die bilineare Gleichung (10) zu einer linearen Beziehung zwischen $\mu\mu'$ und $\mu + \mu'$, den Koeffizienten der Gleichung der Sehne $\mu\mu'$ (Nr. 52). Man erkennt den Punkt $0 \mid 0 \mid 1$ als den Scheitel des Büschels, dessen Strahlen nun die Involution $\mu + \mu' = 0$ ausschneiden ($a = d = 0$). *Also gibt es auf dem Kegelschnitt keine anderen Involutionen, als zentrische Kollineationen des Kegelschnittes mit sich selbst.* Alsdann ist klar, daß sich die Sehnen μ_1, μ_2 und $-\mu_1$, $-\mu_2$ auf der Berührungssehne $x_2 = 0$ als Kollineationsachse schneiden.

B. 1) In Nr 296, 2 kann die Basis des Dreiecks, statt durch einen festen Punkt C zu gehen, als Tangente eines Kegelschnittes vorausgesetzt werden, der mit dem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat.

2) Wenn sich ein Winkel von konstanter Größe um seinen Scheitel S dreht, so bestimmt er in einem durch S gehenden Kegelschnitt k eine Sehne, deren Hüllkurve ein Kegelschnitt ist, der k doppelt berührt; die imaginären Berührungspunkte sind von der Größe des Winkels unabhängig.

3) Sind zwei Kegelschnitte k, k' ähnlich, konzentrisch und ähn-

lich gelegen, so haben die Tangentenpaare aus den Punkten des einen k an den andern die Richtungen der Strahlen von zwei konzentrischen projektiven Büscheln, deren Doppelstrahlen den Asymptoten beider Kegelschnitte parallel sind (Nr. 259).

4) Wenn ein Vieleck, dessen Seiten alle bis auf eine durch feste Punkte gehen, einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so ist die Hüllkurve der freien Seite ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

Gibt man nämlich dem Vieleck, dessen Ecken der Reihe nach A, B, C, usw. seien, vier verschiedene Lagen, so ist

$$\{AA'A''A'''\} = \{BB'B''B'''\} = \{CC'C''C'''\} = \cdots,$$

und das Problem ist damit auf das Problem des Textes zurückgeführt, liefert also auch dasselbe Ergebnis.

5) Wenn man die entsprechenden Punkte von zwei projektiven Systemen auf demselben Kegelschnitt mit zwei beliebigen festen Punkten P, P' des nämlichen Kegelschnittes verbindet, so ist der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen ein durch P, P' gehender Kegelschnitt.

6) Man konstruiere entsprechende Elemente und die Doppelstrahlen zweier konzentrischer Strahlenbüschel, die durch drei Paare entsprechender Strahlen gegeben sind. Auch die duale Aufgabe löse man.

Durch den gemeinsamen Mittelpunkt O der beiden Büschel legt man irgend einen Kreis, der von den Paaren entsprechender Strahlen außer in O noch in A, A' bez. B, B' bez. C, C' getroffen wird (Fig. 30). Schneiden sich die Geraden AB' und $A'B$ in K, AC' und $A'C$ in L und trifft die Gerade KL den Kreis in den Punkten S_1 und S_2, so sind OS_1 und OS_2 die Doppelstrahlen der beiden konzentrischen Strahlenbüschel. Trifft KL den Kreis nicht in reellen Punkten, so sind die Doppelstrahlen imaginär. — Bei der Konstruktion des einem Strahl OD entsprechenden Strahles OD' beachte man, daß sich $A'D$ und AD' in einem Punkte der Geraden KL schneiden müssen.

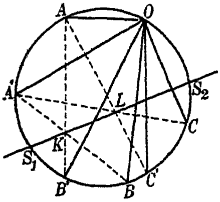


Fig. 30.

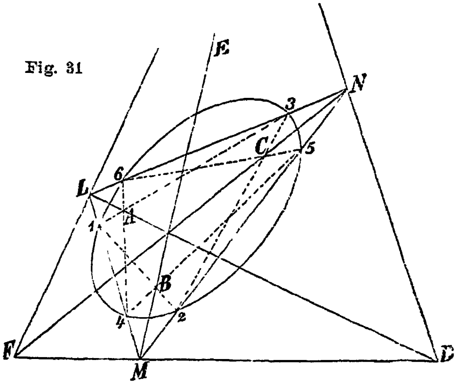
7) Man bestimme die Schnittpunkte einer Geraden mit dem durch fünf Punkte A, B, C, D, E gegebenen Kegelschnitt.

Wenn man die Punkte A, B mit den drei Punkten C, D, E verbindet, so erhält man drei Paare entsprechender Strahlen von zwei projektiven Büscheln. Dieselben bestimmen in der Geraden zwei projektive Reihen, deren Doppelpunkte die gesuchten Punkte sind. Man konstruiert sie nach der vorigen Aufgabe.

8) Man konstruiere die von einem gegebenen Punkte ausgehenden Tangenten eines durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnittes.

9) Man bestimme die Asymptotenrichtungen für einen durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt.

Fig. 31



298. **Schließungsprobleme.** Unter den Anwendungen der vorhergehenden Projektivitätsbetrachtungen haben die sog. Schließungsprobleme Interesse. Bei ihnen wird verlangt, einem Kegelschnitt geschlossene Vielecke ein- oder umzuschreiben, deren Seiten oder Ecken noch weiteren Bedingungen genügen.

Man soll einem Kegelschnitt ein Vieleck einschreiben, dessen Seiten in bestimmter Reihenfolge durch feste Punkte der Ebene gehen.[26]) Diese Punkte seien $P_1, P_2, \ldots P_n$. Wählen wir willkürlich einen Punkt A des Kegelschnittes als Ecke des Vielecks und bilden einen gebrochenen Linienzug $AA_1A_2\ldots$ so, daß AA_1 durch P_1, A_1A_2 durch P_2 usw. gehen, so fällt im allgemeinen der zweite Schnittpunkt A' von P_nA_{n-1} nicht mit A zusammen. Führen wir aber diese Konstruktion viermal aus, so ist nach Nr. 296 $\{ABCD\} = \{A_1B_1C_1D_1\} = \cdots \{A'B'C'D'\}$, und das Vieleck ist geschlossen, sobald D' auf D fällt. Man erhält also D als einen der Doppelpunkte projektiver Reihen, die durch homologe Tripel A, B, C; A', B', C' bestimmt sind. *Das Problem hat daher im allgemeinen zwei Lösungen.*

Eine analytische Lösung für den *Fall des eingeschriebenen Dreiecks mit den Drehpunkten A, B, C* liefert folgende Betrachtung. Seien 123 und 456 (Fig. 31) die beiden Lösungen, also BC die Pascalsche Gerade von 123456. Dann ist im Viereck 13461 die Diagonale AL die Polare des auf BC gelegenen Punktes 34, 61, also sind A und L konjugierte Pole, auch geht AL durch den Pol D von BC. Daher sind 1 und 4,

2 und 5, 3 und 6 die Schnittpunkte des Kegelschnitts mit den Seiten LM bez. MN bez. NL eines Dreiecks LMN. Seine Ecken werden erhalten, indem man zunächst das Dreieck DEF bildet, dessen Seiten die Polaren der Punkte A, B, C sind; die Verbindungsgeraden AD, BE, CF der entsprechenden Ecken (Nr. 113) schneiden die Gegenseiten des Dreiecks DEF in L, M, N. Die Gleichung von MN ergibt sich daher folgendermaßen: Die Verbindungslinie der festen Punkte B, C werde als Seite $x_2 = 0$ des Koordinatendreiecks gewählt, die Gleichung des Kegelschnittes sei $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$; die Geraden, die die Punkte B und C mit $x_1 = x_3 = 0$ verbinden, seien $ax_1 + x_3 = 0$ bez. $bx_1 + x_3 = 0$. Endlich sei A der Schnittpunkt von $cx_1 - x_2 = 0$ mit $dx_2 - x_3 = 0$. Die Verhältnisse der Koordinaten der festen Punkte A, B, C sind also $1 : c : cd$, bez. $1 : 0 : -a$ bez. $1 : 0 : -b$. Die Polaren EF, FD, DE von A, B, C haben die Gleichungen

$$cdx_1 - 2cx_2 + x_3 = 0, \quad ax_1 - x_3 = 0, \quad bx_1 - x_3 = 0$$

und die Geraden AD, BE, CF die Gleichungen $cdx_1 - x_3 = 0$

$$2c(a+b)x_2 = (b+cd)(ax_1 + x_3),$$
$$2c(a+b)x_2 = (a+cd)(bx_1 + x_3).$$

Für die Verbindungsgerade des Schnittpunktes M von BE mit FD und des Schnittpunktes N von CF mit DE ergibt sich alsdann:

$$c(a+b)x_2 - abx_1 - cdx_3 = 0.$$

Diese Gleichung wird identisch Null, die Konstruktion versagt, wenn ABC mit DEF zusammenfällt, d. h. wenn ABC ein Polardreieck des Kegelschnittes ist. *Es gibt dann unendlich viele Dreiecke der verlangten Art.*

B. 1) Liegen die Drehpunkte eines Vielecks von ungerader Seitenzahl, z. B. eines Dreiecks, auf einer Geraden g, so ist die projektive Zuordnung auf dem Kegelschnitt involutorisch.

Denn die Schnittpunkte G, G' von g sind vertauschbar als Endpunkte des ganz in g enthaltenen Linienzuges.

2) Liegen die Drehpunkte eines Vielecks von gerader Seitenzahl in einer Geraden g, so gibt es im allgemeinen keine Vielecke der gewünschten Art; ist aber *eines* vorhanden, so gibt es gleich unendlich viele, indem alsdann *jeder* Punkt des Kegelschnittes als eine Ecke gewählt werden kann.

Denn G und G' sind nun die Doppelpunkte, da sie als Ecken des in g enthaltenen Linienzuges anzusehen sind.

3) *Man soll einem Kegelschnitt ein Vieleck einschreiben, von dessen Seiten jede einen Kegelschnitt berührt, der mit dem gegebenen doppelte Berührung hat.* Der Beweis des Textes gilt auch für das allgemeinere Problem.

4) Man konstruiere zu drei gegebenen Tangenten einen Kegelschnitt, der einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berührt (Nr. 297).

299. *Die Normalform der homogenen Gleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf ein Polardreieck als Fundamentaldreieck,*

$$(11)\qquad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma a_{ii}x_i^2 = 0$$

gewährt wiederum den Vorzug, einen Punkt der Kurve von einem einzigen Parameter abhängig zu machen. Denn, unter der Annahme, daß $a_{11} = a_1^2$, $a_{22} = a_2^2$, $a_{33} = -a_3^2$ sei, können wir wie in Nr. 159 setzen

$$(12)\qquad a_1x_1 : a_2x_2 : a_3x_3 = \cos\varphi : \sin\varphi : 1.$$

Dann lautet die Gleichung der Sehne durch die Punkte φ, φ'

$$a_1x_1\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') + a_2x_2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') = a_3x_3\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi'),$$

und die der Tangente vom Berührungspunkte φ

$$(13)\qquad a_1x_1\cos\varphi + a_2x_2\sin\varphi = a_3x_3.$$

Daher ist die Gleichung der Tangente in x_i' allgemein

$$(14)\qquad a_{11}x_1'x_1 + a_{22}x_2'x_2 + a_{33}x_3'x_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma a_{ii}x_i'x_i = 0,$$

und ebenso lautet die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes x_i' (Nr. 134). Umgekehrt lehrt die Vergleichung von (14) mit der allgemeinen Gleichung der Geraden, daß der Pol der Geraden $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ die Koordinaten $u_1 : a_{11} \mid u_2 : a_{22} \mid u_3 : a_{33}$ hat.

Da der Pol einer Tangente ihr Berührungspunkt ist, so ist *die Tangentialgleichung des Kegelschnittes,* wiederum in Normalform

$$(15)\qquad a_{22}a_{33}u_1^2 + a_{33}a_{11}u_2^2 + a_{11}a_{22}u_3^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\frac{1}{a_{ii}}u_i^2 = 0.$$

Sobald also $u_1 \mid u_2 \mid u_3$ die Kurve berührt, sind auch die vier Geraden $u_1 \mid \pm u_2 \mid \pm u_3$ Tangenten derselben; geradeso wie stets gleichzeitig vier Punkte $x_1' \mid \pm x_2' \mid \pm x_3'$ die Berührungspunkte sind. *Daher bilden die Diagonalen eines Tangenten-*

vierseits die Seiten eines Polardreiecks, dessen Ecken die . gonalpunkte des Vierecks der Berührungspunkte sind und gekehrt (vgl. Nr. 66 und 261, 3).

Die Gleichung (11) erhält man als Gleichung einer I kurve nach der Methode von Nr. 292, wenn man zunä in (12) und (13) statt φ einen algebraischen Parameter führt. Setzt man

$$(16)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \mu,\quad \cos\varphi = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2},\quad \sin\varphi = \frac{2\mu}{1+\mu^2}$$

oder $$a_1x_1 : a_2x_2 : a_3x_3 = (1-\mu^2) : 2\mu : (1+\mu^2),$$

so läßt sich die Gleichung der Tangente schreiben

$$(17)\qquad \mu^2(a_3x_3 + a_1x_1) - 2\mu a_2x_2 + (a_3x_3 - a_1x_1) = 0;$$

ihre gleich Null gesetzte Diskriminante ergibt

$$(18)\qquad (a_3x_3 - a_1x_1)(a_3x_3 + a_1x_1) = a_2^2x_2^2.$$

Zugleich erkennt man den Zusammenhang der Nor form $x_1'^2 + x_3'^2 = x_2'^2$ mit der früheren $x_1x_3 = x_2^2$ vern der Substitution $x_1 : x_2 : x_3 = (x_1' + ix_3') : x_2' : (x_1' - ix_3')$. also $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ konjugiert imaginäre Tangenten, so nieren $x_1' = 0$, $x_3' = 0$ konjugiert harmonische Polaren, mit $x_2 = x_2' = 0$ ein reelles Polardreieck bilden. Reelle ordinatenverhältnisse $x_1 : x_2$, $x_3 : x_2$ liefern also konju imaginäre $x_1' : x_2'$, $x_3' : x_2'$ für einen reellen Punkt und gekehrt. Aber immer kann $x_1x_3 = x_1'^2 + x_3'^2$ gesetzt wei so daß alle Kegelschnittsgleichungen der Form (1) in Nr. gleichzeitig durch (11) reell vertreten werden.

B. 1) Soll die Normalgleichung (11) einen Kreis darste so muß nach Nr. 110 die Gerade, die den Mittelpunkt M des Kr mit einem Eckpunkt des Fundamentaldreiecks verbindet, au Gegenseite des Polardreiecks rechtwinklig sein, d. h. M ist Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks (Nr. 113). Der Mittelpunkt (11) hat als Pol der unendlich fernen Geraden $l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3$ (vgl. Nr. 71 und 75) die Koordinaten $l_i : a_{ii}$, $(i = 1, 2, 3)$, Verbindungslinie mit $x_2 = x_3 = 0$ wird daher $a_{22}l_3x_2 - a_{33}l_2x_3$ und diese Gerade bildet mit $x_1 = 0$ einen rechten Winkel, $a_{22} : a_{33} = l_2 \cos A_2 : l_3 \cos A_3$ ist (vgl. Nr. 65, 3). Soll die chung (11) einen Kreis darstellen, so muß also a_{ii} zu $l_i \cos A_i$ portional sein; die Gleichung des Kreises in bezug auf ein P dreieck ist also bei trimetrischen Normalkoordinaten

$$\Sigma x_i^2 l_i \cos A_i = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma x_i^2 \sin 2 A_i = 0;$$

dieser Kreis ist somit nur für ein stumpfwinkliges Dreieck reell.

2) Die Ecken von zwei Polardreiecken ABC, abc des nämlichen Kegelschnittes liegen auf einem Kegelschnitt.

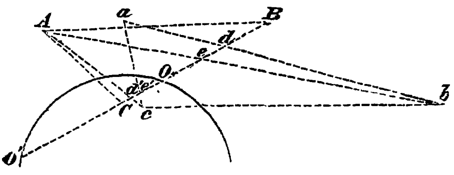


Fig. 32.

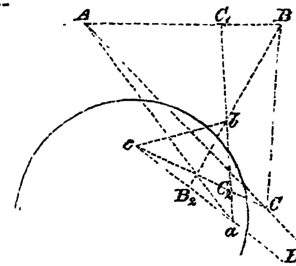


Fig. 33.

Sind d, e (Fig. 32) die Schnitte von BC mit ab und Ab, ebenso d', e' die von BC mit Ac und ac, und O, O' die Schnittpunkte der Geraden BC mit dem Kegelschnitt, so sind d, B, e bez. die Pole von Ac, AC, Ae', d. h. OO' ist durch dd', BC und ee' harmonisch oder in Punktepaaren einer Involution geteilt. Infolgedessen gilt die Kette von Gleichungen

$$(a \cdot BbCc) = (BdCe') = (Cd'Be) = (BeCd') = (A \cdot BbCc),$$

somit liegen a, A, B, b, C, c auf dem nämlichen Kegelschnitt.

3) Sind ABC und abc zwei einander polar konjugierte Dreiecke (Nr. 113), so ist das Sechseck $AbCaBc$ einem Kegelschnitt umgeschrieben.

Sind B_1, B_2 (Fig. 33) die Schnittpunkte von ac mit AC, Bb bez., so sind B_1, B die Pole von Bb, B_1B_2 bez., also ist BB_1B_2 ein Polardreieck; ebenso CC_1C_2, wenn C_1, C_2 die Schnittpunkte von ab mit AB, Cc bez. bezeichnen. Daher liegen nach B. 2 die Punkte $B_1B_2BC_1C_2C$ auf demselben Kegelschnitt, und nach dem Satze von Pascal gehören die Schnittpunkte von B_1B_2 und C_1C_2, von B_2B und C_2C, von BC_1 und CB_1 einer Geraden an. Somit gehen Aa, Bb, Cc durch einen Punkt, oder $AbCaBc$ ist ein Brianchonsches Sechsseit.

4) Die Hüllkurve einer Geraden, für die das Produkt ihrer senkrechten Abstände von zwei festen Punkten $\pm c \mid 0$ konstant gleich b^2 ist, hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ist $y - mx - n = 0$ die Gleichung der beweglichen Geraden, so wird die von der Geraden zu erfüllende Bedingung ausgedrückt durch die Beziehung

$$(n + mc)(n - mc) = b^2(1 + m^2) \quad \text{oder} \quad n^2 = b^2 + b^2m^2 + c^2m^2.$$

Wegen
$$n^2 = y^2 - 2mxy + m^2x^2$$
folgt
$$m^2(x^2 - b^2 - c^2) - 2mxy + y^2 - b^2 = 0$$
und als Gleichung der Hüllkurve zunächst
$$x^2y^2 = (x^2 - b^2 - c^2)(y^2 - b^2), \text{ usw.}$$

5) Die Hüllkurve einer Geraden, für die die Summe der Quadrate der senkrechten Abstände von zwei festen Punkten konstant ist, hat die Gleichung
$$\frac{2x^2}{b^2 - 2c^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

6) Die Hüllkurve, die der Differenz der Quadrate dieser senkrechten Abstände entspricht, ist eine Parabel.

7) Eine Gerade OP dreht sich um einen festen Punkt O und schneidet eine feste Gerade in P; man soll die Hüllkurve der Geraden PQ finden, die mit der drehenden Geraden den konstanten Winkel OPQ bildet.

Wir nehmen an, OP bilde mit dem von O auf die feste Gerade gefällten Lote p den Winkel ϑ; die Länge von OP ist alsdann $p : \cos\vartheta$. Das von O auf PQ gefällte Lot bilde mit OP den festen Winkel β und habe daher die Länge $p\cos\beta : \cos\vartheta$. Da dieses Lot mit der Normalen der festen Geraden den Winkel $\vartheta + \beta$ bildet, so ist für diese Normale als x-Achse die Gleichung von PQ:
$$x\cos(\vartheta + \beta) + y\sin(\vartheta + \beta) = p\cos\beta : \cos\vartheta, \qquad \text{oder}$$
$$x\cos(2\vartheta + \beta) + y\sin(2\vartheta + \beta) = 2p\cos\beta - x\cos\beta - y\sin\beta,$$
eine Gleichung von der Form $x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi = x_3$.

Die Hüllkurve der Geraden ist daher
$$x^2 + y^2 = (x\cos\beta + y\sin\beta - 2p\cos\beta)^2,$$
also eine Parabel, die den Punkt O zum Brennpunkt hat.

300. Die Normalform (11) wird mit Vorteil bei der *Untersuchung der Eigenschaften der Brennpunkte* verwendet (Nr. 196). Sind nämlich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Normalgleichungen von zwei zueinander rechtwinkligen Geraden durch den Brennpunkt, während $x_3 = 0$ die zugehörige Leitlinie darstellt, so bilden die drei Geraden ein Polardreieck der Kurve (Nr. 181). Nimmt man dieses als Koordinatendreieck, so lautet die Gleichung der Kurve
$$(19) \qquad x_1^2 + x_2^2 = e^2x_3^2 \quad \text{bez.} \quad e^2(u_1^2 + u_2^2) = u_3^2,$$
wo e die numerische Exzentrizität bedeutet. Der Parameter φ

drückt dann, da $x_1 = ex_3 \cos\varphi$, $x_2 = ex_3 \sin\varphi$, also $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\varphi$ ist, den Winkel des von $0 \mid 0 \mid 1$ ausgehenden Vektors gegen die Fundamentallinie $x_2 = 0$ aus.

Die Gestalt der Gleichung zeigt deutlich einerseits die Definition des Kegelschnittes aus Brennpunkt und Leitlinie (Nr. 183), andrerseits die Definition des Brennpunktes als Schnittpunkt zweier Tangenten absoluter Richtung, oder als Scheitel einer rechtwinkligen Involution harmonischer Polaren (Nr. 181). Diese projektive Anschauung[27]) liefert neue Beweise für eine Reihe der Fokaleigenschaften des X. Kapitels. So bilden die Tangentenpaare aus einem beliebigen Punkte an konfokale Kegelschnitte eine Involution, zu der auch die Strahlen nach den in der Schar enthaltenen Punktepaaren d. h. die Strahlen nach den Brennpunkten und die Strahlen absoluter Richtung als Paare gehören (Nr. 180 und 289). Dieselbe ist daher eine symmetrische Involution (Nr. 95), und ihre rechtwinkligen Doppelstrahlen sind die Tangenten und Normalen der durch den Punkt gehenden konfokalen Kegelschnitte (Nr. 229).

B. 1) *Die Brennpunkte des durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnittes zu bestimmen* (Nr. 196, 2).

In der Bedingung, unter der die Geraden $x - x' \pm (y - y')i = 0$ die Kurve berühren, setzen wir den reellen und den nicht-reellen Teil getrennt gleich Null; dann zeigen sich die Brennpunkte als die Schnittpunkte der beiden Orte

$$A_{33}(x^2 - y^2) + 2A_{23}y - 2A_{13}x + A_{11} - A_{22} = 0,$$
$$A_{33}xy - A_{23}x - A_{13}y + A_{12} = 0,$$

d. i. von zwei gleichseitigen, mit dem gegebenen Kegelschnitt konzentrischen Hyperbeln. Für die Parabel, d. i. für $A_{33} = 0$, werden beide Gleichungen linear und liefern

$$x(A_{23}{}^2 + A_{13}{}^2) = A_{23}A_{12} + \tfrac{1}{2}A_{13}(A_{11} - A_{22}),$$
$$y(A_{23}{}^2 + A_{13}{}^2) = A_{13}A_{12} + \tfrac{1}{2}A_{23}(A_{22} - A_{11}).$$

Im allgemeinen Falle schreiben wir die Gleichungen in der Form

$$(A_{33}x - A_{13})^2 - (A_{33}y - A_{23})^2 = A_{13}{}^2 - A_{11}A_{33} - (A_{23}{}^2 - A_{22}A_{33})$$
$$= A(a_{11} - a_{22}),$$
$$(A_{33}x - A_{13})(A_{33}y - A_{23}) = A_{23}A_{13} - A_{33}A_{12} = Aa_{12};$$

dann erhalten wir die Koordinaten x, y der Brennpunkte aus:

$$(A_{33}x - A_{13})^2 = \tfrac{1}{2}A(R + a_{11} - a_{22}),$$
$$(A_{33}y - A_{23})^2 = \tfrac{1}{2}A(R + a_{22} - a_{11}).$$

Hier ist A die Diskriminante des Kegelschnitts und $R^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$. (Vgl. Nr. 152.)

2) *Die Tangenten einer Parabel aus einem Punkte der Leitlinie sind zueinander rechtwinklig* (Nr. 211).

Denn die Tangenten der Kurve aus dem Punkte $x_1 = x_3 = 0$ sind nach (19) offenbar durch $ex_3 \pm x_1 = 0$ dargestellt. Für die Parabel ist $e = 1$, und diese Tangenten sind die innere und äußere Halbierungslinie des Winkels zwischen $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$.

3) Hüllkurve einer Sehne, die am Brennpunkte einen konstanten Winkel α spannt (Nr. 196, 4). Für konstante Differenz $\varphi - \varphi' = \alpha$ berührt die Sehne

$$x_1 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + x_2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = ex_3 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')$$

immer den Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 = e^2 x_3^2 \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

4) *Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Schnittpunkte zweier Tangenten ist rechtwinklig zu der Geraden, die vom Brennpunkte nach dem Schnittpunkte der Leitlinie mit der Berührungssehne gezogen wird.*

Die Gleichung der vom Brennpunkt nach dem Schnittpunkt der Tangenten φ', φ'' gezogenen Geraden ergibt sich durch Subtraktion der Gleichungen der beiden Tangenten in der Form

$$x_1 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') - x_2 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') = 0,$$

diese Gerade halbiert also den Winkel der Brennstrahlen der Berührungspunkte (Nr. 212). Die Gerade vom Brennpunkt nach dem Schnittpunkt der Leitlinie und der Berührungssehne ist aber

$$x_1 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') + x_2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') = 0.$$

5) Bilden die vom einen Brennpunkt gezogenen Brennstrahlen der Berührungspunkte zweier Tangenten eines Kegelschnitts miteinander den konstanten Winkel 2δ, so ist der Ort des Schnittpunktes der beiden Tangenten ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen den Brennpunkt und die Leitlinie gemeinsam hat; seine Exzentrizität ist $e : \cos\delta$.

Durch eine Elimination findet man die Gleichung des Ortes in der Form $(x_1^2 + x_2^2)\cos^2\delta = e^2 x_3^2$. (Vgl. Nr. 107, 2.) Ist die Kurve eine Parabel, so ist der Winkel zwischen den Tangenten gegeben. Denn die Tangente von der Gleichung $x_1 \cos\varphi' + x_2 \sin\varphi' - x_3 = 0$ halbiert den von $x_3 = 0$ und $x_1 \cos\varphi' + x_2 \sin\varphi' = 0$ gebildeten Winkel. Der Winkel der Tangenten ist daher der halbe Winkel

zwischen den Geraden $x_1 \cos\varphi' + x_2 \sin\varphi' = 0$ und $x_1 \cos\varphi'' + x_2 \sin\varphi'' = 0$ oder gleich $\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi'')$; d. h. der Winkel zwischen zwei Tangenten einer Parabel ist die Hälfte des Winkels der Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte (Nr. 211).

6) *Die Brennpunkte sind die Doppelpunkte der in der großen Achse durch die Paare zusammengehöriger Tangenten und Normalen des Kegelschnittes bestimmten Involution* (Nr. 179). *Beliebige Geraden und ihre Normalen durch ihre Pole liefern dieselbe Involution.*

7) *Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels.*

In allgemeinerer Fassung verlangt die Aufgabe den Ort der Schnittpunkte der Tangenten, die von zwei festen Punkten O, O' an alle vier gegebenen Bedingungen unterworfene Kegelschnitte gelegt werden können, oder die ihnen mit einem festen Kegelschnitt U gemeinsam sind. Ist n die Zahl der Kegelschnitte des Systems, die eine feste Gerade g berühren, so bestimmen wir die Zahl der Schnittpunkte des fraglichen Ortes mit einer durch O gehenden Geraden g. An die sie berührenden n Kegelschnitte gehen von O' aus $2n$ Tangenten, die g in $2n$ Punkten des Ortes schneiden; die Gerade OO' ist überdies Tangente von n Kegelschnitten des Systems, an die von O aus n andere Tangenten gehen, die in O einen $n$fachen Punkt des Ortes erzeugen. Somit ist der fragliche Ort von der Ordnung $3n$, insbesondere für die *durch vier feste Punkte gehenden* Kegelschnitte mit $n = 2$ (Nr. 250) eine Kurve sechster Ordnung mit Doppelpunkten in O und O'. Fallen O und O' mit den imaginären Kreispunkten zusammen, so ist der betrachtete Ort der Ort der Brennpunkte; für ihn ergibt sich also eine Kurve sechster Ordnung, die die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten hat, mit leicht nachweisbaren sechs anderen Doppelpunkten.

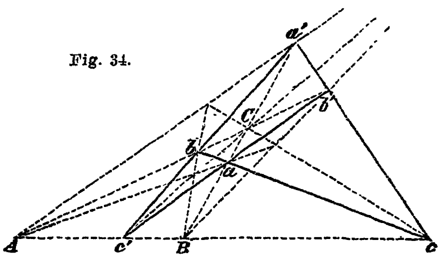
Eine Methode für die Entwickelung der Gleichung dieser Kurve erläutern wir am folgenden Beispiel und bemerken hier nur, daß der Ort von der vierten Ordnung wird, wenn die vier gemeinsamen Punkte ein Parallelogramm bilden (Beweis analog wie am Schluß von 8).

8) *Der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar* (Nr. 270) *ist eine die imaginären Kreispunkte ω, ω' enthaltende Kurve dritter Ordnung.* Dies folgt für $n = 1$ aus dem Vorigen, es ergeben sich aber folgende nähere Tatsachen.

Unter den dem Vierseit $aba'b'$ (Fig. 34) eingeschriebenen Kegelschnitten befinden sich drei Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' und eine Parabel. Die sechs eben genannten Punkte gehören der Kurve an. Die Parabel hat einen endlichen Brennpunkt F und einen unendlich fernen F' in der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Geraden, die nach Nr. 270 den Ort für die Mittelpunkte aller Kurven der Schar darstellt. Da das Dreieck $F\omega\omega'$ mit jedem der Dreiecke bca',

cab', abc', $a'b'c'$ der Parabel umgeschrieben ist, so sind dieselben Paare von Dreiecken auch je einem Kegelschnitt eingeschrieben (Nr. 287, 7), d. h. F ist der gemeinschaftliche Punkt der vier den Dreiecken umgeschriebenen *Kreise*. So kennt man bereits *zehn Punkte* der Kurve. Sie geht aber auch durch die Fußpunkte der Höhen des allen Kurven der Schar nach Nr. 270 zugehörigen Poldreiseits (Diagonaldreiseits) ABC. Ist nämlich h der dritte Schnittpunkt der Geraden aa' mit der Kurve, so sind $h\omega$ und $h\omega'$ Tangenten eines Kegelschnittes der Schar und gehören somit zu einer Involution. Der eine Doppelstrahl dieser Involution ist aa', denn diese Gerade ist die einzige Tangente, die man von h an den aus dem Punktepaar a, a' bestehenden Kegelschnitt der Schar legen kann. Der andere Doppelstrahl wird durch hA gebildet, denn A ist der Pol von aa' für alle Kegelschnitte der Schar; somit ist hA die Tangente des durch h gehenden Kegelschnittes der Schar. Als Doppelstrahlen der Involution sind aber endlich haa' und hA harmonisch konjugiert zu $h\omega$, $h\omega'$, d. h. zueinander rechtwinklig.[28])

Fig. 34.



Wenn man die Brennpunkte eines und desselben Kegelschnittes der Schar als ein *Paar* in unserer Ortskurve bezeichnet, so ergibt sich nach der allgemeinen Brennpunktsdefinition der Satz: Die Verbindungslinien eines Punktes der Brennpunktskurve mit allen Paaren derselben bilden Paare einer Rechtwinkel-Involution. Ferner: Die Involutionen aus den Punkten eines Paares sind projektiv, und ihr Scheitelstrahl entspricht sich selbst. Oder: *Die Ortskurve ist das Erzeugnis zweier projektiver Rechtwinkel-Involutionen mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl.*[29]).

Um endlich die *Gleichung* des Ortes zu bilden, setzen wir, nach der Form der Gleichung der Kegelschnitte einer Schar $\varphi(u, v) - \lambda\chi(u, v) = 0$ (Nr. 270), in den Gleichungen von 1) $A_{11} - \lambda A'_{11}$ für A_{11}, usw. und eliminieren λ zwischen denselben. Man erhält alsdann

$$\begin{aligned}\{A_{33}(x^2 - y^2) + 2A_{23}y - 2A_{13}x + A_{11} - A_{22}\} \times \\ \{A'_{33}xy - A'_{23}x - A'_{13}y + A'_{12}\} \\ = \{A'_{33}(x^2 - y^2) + 2A'_{23}y - 2A'_{13}x + A'_{11} - A'_{22}\} \times \\ \{A_{33}xy - A_{23}x - A_{13}y + A_{12}\}.\end{aligned}$$

Der Ort ist eine Kurve dritter Ordnung, weil sich die Glieder vom vierten Grad gegenseitig aufheben.

Ist ein Kreis in der Schar, so wird sein Mittelpunkt ein Doppelpunkt der Kurve.

Sind jedoch $\varphi(u, v) = 0$, $\chi(u, v) = 0$ Parabeln, so ist $\varphi(u, v) - \lambda\chi(u, v) = 0$ eine Schar von Parabeln, A_{33}, A'_{33} sind Null (Nr. 131 und 143), und der Ort der Brennpunkte geht in einen Kreis über. Sind die Kegelschnitte konzentrisch, so daß die vier gegebenen Geraden ein Parallelogramm bilden, so werden für den Mittelpunkt als Nullpunkt A_{23}, A'_{23}, A_{13}, A'_{13} sämtlich Null, und der Ort der Brennpunkte ist eine gleichseitige Hyperbel; usw.

301. **Zwei Normalgleichungen.** Zwei beliebige Kegelschnitte haben nach Nr. 253 ein gemeinsames Polardreieck. Nehmen wir dieses als Koordinatendreieck, so sind die Gleichungen beider Kegelschnitte gleichzeitig in den Normalformen zu schreiben

$$\Sigma a_{ii} x_i^2 = 0, \quad \Sigma a'_{ii} x_i^2 = 0 \quad \text{bez.} \tag{20}$$

$$\Sigma \frac{1}{a_{ii}} u_i^2 = 0, \quad \Sigma \frac{1}{a'_{ii}} u_i^2 = 0. \tag{21}$$

Überhaupt sind dann die Gleichungen aller dem Viereck der Schnittpunkte von (20) umgeschriebenen bez. dem Vierseit der gemeinschaftlichen Tangenten von (21) eingeschriebenen Kegelschnitte von der Form

$$\Sigma (a_{ii} - \lambda a'_{ii}) x_i^2 = 0 \quad \text{bez.} \quad \Sigma \left(\frac{1}{a_{ii}} - \lambda \frac{1}{a'_{ii}}\right) u_i^2 = 0. \tag{22}$$

Daß jenes Dreieck das Diagonaldreieck des Vierecks und des Vierseits*) *zugleich* ist, bestätigt z. B. die Elimination von x_3, die die Gleichung

$$(a_{11} a'_{33} - a'_{11} a_{33}) x_1^2 - (a_{33} a'_{22} - a'_{33} a_{22}) x_2^2 = 0 \tag{23}$$

für ein Paar der Schnittsehnen liefert, usw. Auch ist dies dadurch offenbar, daß nur in einer gemeinsamen Sehne in bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Involution harmonischer Pole, nur an einem Schnittpunkt gemeinsamer Tangenten dieselbe Involution harmonischer Polaren vorhanden sein kann.

Aber im Büschel und in der Schar ist das gemeinsame Polardreieck nur reell, wenn alle gemeinsamen Elemente der Kegelschnitte gleichartige Realitätsverhältnisse aufweisen. Sind

*) Beim Büschel gehört zu je zwei Kegelschnitten ein anderes Tangentenvierseit, bei der Schar aber je ein anderes Schnittpunktviereck.

nur zwei reelle Schnittpunkte und gemeinsame Tangenten vorhanden, z. B. in der Seite $x_3 = 0$ und an der Ecke $u_3 = 0$, so können wir jene als neue reelle Fundamentalelemente hinzunehmen, also $x_1 x_2$ statt $x_1^2 + x_2^2$ einführen (Nr. 299).

Aber nicht nur ein Büschel und eine Schar haben ein gemeinsames Polardreieck. Für allgemeinere Systeme, denen ein solches zugehört, gilt an Stelle von Nr. 289 der Satz: *Hat ein System von Kegelschnitten ein gemeinschaftliches Polardreieck, so bilden in jeder Geraden, die durch eine Ecke des Dreiecks geht, die Schnittpunktepaare der Kegelschnitte, und an jedem Punkt, der in einer Seite des Dreiecks liegt, die durch ihn gezogenen Tangentenpaare eine Involution.*

Da nämlich jede Ecke in allen Kegelschnitten dieselbe Polare hat, so sind die Schnittpunktepaare in jeder durch die Ecke gezogenen Geraden harmonisch getrennt durch dieselben zwei Punkte, nämlich die gewählte Ecke und den Schnittpunkt mit der Gegenseite; dies sind also die Doppelpunkte der Involution; ebenso dual.

So wird z. B. eine Kegelschnittschar von jeder Geraden, die durch einen Diagonalpunkt des umgeschriebenen Vierseits geht, in einer Involution geschnitten, in der die Gegenseitenpaare des Vierseits konjugierte Punkte enthalten. Analoges gilt beim Kegelschnittbüschel von den Tangenten aus einem Punkte in einer Diagonale des eingeschriebenen Vierecks.

B. 1) Der Ort des Pols einer Geraden $\Sigma u_i x_i = 0$ in bezug auf einen Kegelschnitt, der die vier festen Punkte $x_1' \mid \pm x_2' \mid \pm x_3'$ enthält, ist (Nr. 289, 14) $u_1 x_1'^2 x_2 x_3 + u_2 x_2'^2 x_3 x_1 + u_3 x_3'^2 x_1 x_2 = 0$.

2) Der Ort des Pols einer Geraden $\Sigma u_i x_i = 0$ in bezug auf einen Kegelschnitt, der vier feste Geraden $a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm a_3 x_3 = 0$ berührt, ist $a_1^2 u_2 u_3 x_1 + a_2^2 u_3 u_1 x_2 + a_3^2 u_1 u_2 x_3 = 0$.

Diese Beispiele geben auch den Ort des Mittelpunktes als den des Poles der unendlich fernen Geraden.

3) Man soll den Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmen, dessen Basisecken sich längs des Kegelschnittes $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 = a_{33} x_3^2$ bewegen, während seine Seiten einen anderen Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ berühren.[30])

Wie in Nr. 107, 1 sind die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangenten in den Punkten φ_1, φ_3

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \mid \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \mid \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3),$$

und die Bedingungen des Problems liefern zuerst die Gleichung

$$a_{11}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_3)+a_{22}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_3)=a_{33}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_3)$$

oder $$(a_{11}+a_{22}-a_{33})+(a_{11}-a_{22}-a_{33})\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + (a_{22}-a_{33}-a_{11})\sin\varphi_1\sin\varphi_3=0.$$

Ebenso $$(a_{11}+a_{22}-a_{33})+(a_{11}-a_{22}-a_{33})\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + (a_{22}-a_{33}-a_{11})\sin\varphi_2\sin\varphi_3=0,$$ also

$$(a_{11}+a_{22}-a_{33})\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)=(a_{22}+a_{33}-a_{11})\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)\cos\varphi_3,$$

$$(a_{11}+a_{22}-a_{33})\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)=(a_{11}+a_{33}-a_{22})\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)\sin\varphi_3.$$

Für die Koordinaten des Punktes, dessen Ort wir suchen, besteht nun die Proportion

$$x_1:x_2:x_3=\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2):\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2):\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2);$$

Nach Einführung dieser Koordinaten in die letzten beiden Gleichungen und nach Elimination von φ_3 erhält man daher als Gleichung des Ortes

$$\frac{x_1^{\,2}}{(a_{22}+a_{33}-a_{11})^2}+\frac{x_2^{\,2}}{(a_{33}+a_{11}-a_{22})^2}=\frac{x_3^{\,2}}{(a_{11}+a_{22}-a_{33})^2}.$$

4) Ein Dreieck ist dem Kegelschnitt $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=x_3^{\,2}$ eingeschrieben, und zwei seiner Seiten berühren den Kegelschnitt $a_{11}x_1^{\,2}+a_{22}x_2^{\,2}=a_{33}x_3^{\,2}$; dann ist die Hüllkurve der dritten Seite

$$(a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{22}a_{33})^2x_1^{\,2}+(a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}-a_{33}a_{11})^2x_2^{\,2} = (a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}-a_{11}a_{22})^2x_3^{\,2}.$$

5) Wenn zwei Kegelschnitte U und V ihre gemeinschaftlichen Tangenten A, B, C, D in den Punkten a, b, c, d; a', b', c', d' berühren, so hat ein Kegelschnitt S, der durch die Punkte a, b, c geht und D in d' berührt, zur zweiten Schnittpunktsehne mit V die Gerade, die die Schnittpunkte von A mit bc, von B mit ca und von C mit ab verbindet.

Schneidet der Kegelschnitt V die Gerade ab in α, β, so gehören nach dem Satze des Textes, da ab einen Diagonalenschnittpunkt von $ABCD$ enthält (Nr. 261, 3), ab, $\alpha\beta$ zu einer Involution, in der die Schnittpunkte von ab mit C und D konjugierte Punkte sind. Nach Nr. 289 schneiden aber die gemeinschaftlichen Sehnen von S und V die Gerade ab in Punkten, die zu derselben Involution gehören, in der die Schnittpunkte von ab mit S und V, d. h. a, b; α, β entsprechende Punkte sind. Ist daher D die eine der gemeinschaftlichen Sehnen, so muß die andere durch den Schnittpunkt von C mit ab gehen.

6) Einem Dreieck ABC wird eine Ellipse eingeschrieben, die die Seiten des Dreiecks in ihren Mittelpunkten a, b, c berührt; ferner seien a', b', c' die Berührungspunkte des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises. Berührt alsdann die vierte gemeinschaftliche Tangente D des Kreises und der Ellipse jenen in d', so berührt auch der durch die Mittelpunkte der Seiten gehende Kreis den eingeschriebenen Kreis in d' (vgl. Fig. 35).

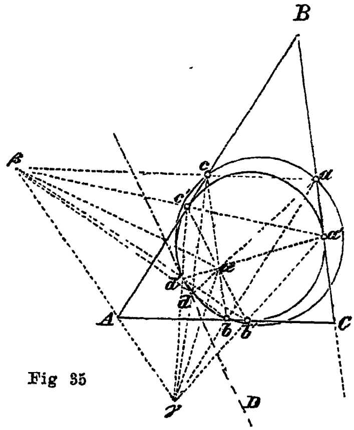


Fig 35

Nach 5) berührt ein durch a, b, c gehender Kegelschnitt den Kreis in d', wenn er auch durch die Punkte geht, in denen der Kreis von der Verbindungslinie der Schnittpunkte von BC mit bc, von CA mit ca, von AB mit ab geschnitten wird. Diese Gerade ist aber in unserem Falle unendlich entfernt, der berührende Kegelschnitt also auch ein Kreis. So ergibt sich der Feuerbachsche Satz von der Berührung des durch die Seitenmitten des Dreiecks gehenden Kreises (Nr. 73, 3) mit den die Seiten berührenden Kreisen als ein besonderer Fall[31]) von 5).

Der Punkt d' und die Gerade D können ohne Zeichnung der Ellipse konstruiert werden. Da nämlich die Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks und des entsprechenden umgeschriebenen Vierseits sich in einem Punkte schneiden, so gehen die Geraden ab, cd; $a'b'$, $c'd'$ und die beiden Verbindungslinien der Ecke A mit dem Schnittpunkt von BC und D sowie der Ecke B mit dem Schnitt von CA und D durch den nämlichen Punkt. Sind also α, β, γ die Schnittpunkte von bc, $b'c'$; ca, $c'a'$; ab, $a'b'$ bez., so schneiden sich die Geraden $a'\alpha$, $b'\beta$, $c'\gamma$ in d'. Oder mit anderen Worten: das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist mit abc, $a'b'c'$ für die Mittelpunkte der Homologie d, d' perspektiv. In derselben Weise ist das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ mit ABC perspektiv für die Gerade D als Achse.

302. **Kegelschnitte durch drei Punkte.** Neben den bisherigen sind noch andere besondere Gleichungsformen von Wichtigkeit. Zunächst gehören hierher die Gleichungen der einem Dreieck umgeschriebenen und der ihm eingeschriebenen Kegelschnitte, wobei die Gleichungen der ersten in Punktkoordinaten natürlich dieselbe Gestalt haben wie die Gleichungen der letztgenannten in Linienkoordinaten.

Die Gleichung eines durch die Schnittpunkte der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gehenden Kegelschnittes ist offenbar

(24) $a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$, oder $\frac{a_{23}}{x_1} + \frac{a_{31}}{x_2} + \frac{a_{12}}{x_3} = 0$.

Schreibt man die Gleichung in der Form $x_3(a_{23}x_2 + a_{31}x_1) + a_{12}x_1x_2 = 0$, so erkennt man, daß $x_3 = 0$ die Kurve in den getrennten, $a_{23}x_2 + a_{31}x_1 = 0$ also in den zusammenfallenden Schnittpunkten derselben mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ schneidet. Auf diesem Wege gelangt man zur Erzeugung der Kurve aus projektiven Büscheln oder zur Parameterdarstellung. Werden zwei Dreieckseiten, z. B. $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$, als homologe Strahlen genommen, so entspricht der dritten Seite $x_2 = 0$ die Tangente in einem ihrer Endpunkte.

Daher sind die Gleichungen der Tangenten in den Ecken des Dreiecks

(25) $$\frac{x_2}{a_{31}} + \frac{x_3}{a_{12}} = 0, \quad \frac{x_3}{a_{12}} + \frac{x_1}{a_{23}} = 0, \quad \frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{31}} = 0.$$

Die Schnittpunkte dieser Tangenten mit den Gegenseiten liegen offenbar in der Geraden[32]) (Nr. 276):

(26) $$\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{31}} + \frac{x_3}{a_{12}} = 0.$$

Für die Verbindungsgeraden der Ecken mit den entsprechenden Eckpunkten des durch die Tangenten (25) gebildeten Dreiecks erhält man

(27) $$\frac{x_2}{a_{31}} - \frac{x_3}{a_{12}} = 0, \quad \frac{x_3}{a_{12}} - \frac{x_1}{a_{23}} = 0, \quad \frac{x_1}{a_{23}} - \frac{x_2}{a_{31}} = 0;$$

diese Geraden schneiden sich in einem Punkte (Nr. 113).[33])

Die Gleichung der Verbindungsgeraden zweier Punkte x_i', x_i'' der Kurve kann geschrieben werden[34])

(28) $$\frac{a_{23}}{x_1'x_1''}x_1 + \frac{a_{31}}{x_2'x_2''}x_2 + \frac{a_{12}}{x_3'x_3''}x_3 = 0,$$

weil (28) für $x_i = x_i'$ oder $x_i = x_i''$ in die Kurvengleichung übergeht. Daher hat die Tangente im Punkte x_i' die Koordinaten

$$u_1 = \frac{a_{23}}{x_1'^2}, \quad u_2 = \frac{a_{31}}{x_2'^2}, \quad u_3 = \frac{a_{12}}{x_3'^2},$$

und die Gleichung des umgeschriebenen Kegelschnittes in Linienkoordinaten lautet

(29) $$(a_{23}u_1)^{\frac{1}{2}} + (a_{31}u_2)^{\frac{1}{2}} + (a_{12}u_3)^{\frac{1}{2}} = 0$$

oder in rationaler Gestalt

(30) $$a_{23}{}^2u_1{}^2 + a_{31}{}^2u_2{}^2 + a_{12}{}^2u_3{}^2 - 2a_{31}a_{12}u_2u_3 - 2a_{12}a_{23}u_3u_1 - 2a_{23}a_{31}u_1u_2 = 0.$$

Faßt man in (24) die Koeffizienten a_{23}, a_{31}, a_{12} als völlig willkürliche Parameter auf, so stellt (24) ein besonderes System von ∞^2 Kegelschnitten, ein besonderes *Kegelschnittnetz* dar (Nr. 271).

Unter den Kurven dieses Netzes befinden sich unendlich viele gleichseitige Hyperbeln, die ein Büschel bilden (Nr. 165, 2), und unendlich viele Parabeln, aber nur *ein* Kreis. Die Gleichungen dieser Kurven können leicht dargestellt werden, sobald wir die x_i als Dreieckskoordinaten auffassen, wie in den Beispielen.

B. 1) Die Gleichungen der dem Koordinatendreieck umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln genügen für A_i als Gegenwinkel der Seiten $x_i = 0$ bei Benutzung von Normalkoordinaten der Bedingung $a_{23}\cos A_1 + a_{31}\cos A_2 + a_{12}\cos A_3 = 0$ (vgl. Nr. 73 und 255, 2).

2) Die umgeschriebenen Kegelschnitte sind Parabeln, falls die Bedingung $(a_{23}\sin A_1)^{\frac{1}{2}} + (a_{31}\sin A_2)^{\frac{1}{2}} + (a_{12}\sin A_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ erfüllt ist. Man beachte (29) und die Tatsache, daß $\sin A_1 \mid \sin A_2 \mid \sin A_3$ die Koordinaten der unendlich fernen Geraden sind.

3) *Die Gleichung des umgeschriebenen Kreises lautet*

$$x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3 = 0.$$

Setzt man in die Gleichung (24) für x_i den Ausdruck $x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i - p_i$ ein, ordnet man nach x, y und wendet die Kriterien von Nr. 97 an, so muß

$$a_{23}\cos(\alpha_2 + \alpha_3) + \cdots = 0, \quad a_{23}\sin(\alpha_2 + \alpha_3) + \cdots = 0$$

sein, also sind a_{23}, a_{31}, a_{12} zu $\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$, $\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ oder zu $\sin A_1$, $\sin A_2$, $\sin A_3$ proportional.

Die geometrische Bedeutung der Gleichung liegt in dem Satze: *Die Fußpunkte P, Q, R der von einem Punkte O des umgeschriebenen Kreises auf die Dreiecksseiten gefällten Lote liegen in einer Geraden.* Denn für *ganz willkürliche* Lage von O ist $x_1x_2\sin A_3$ offenbar das Doppelte vom Inhalt des Dreiecks POQ, dessen Winkel bei O je nach der Lage gleich A_3 oder gleich $180^0 - A_3$ ist; ebenso ist $x_3x_1\sin A_2 = 2\cdot ROP$, $x_2x_3\sin A_1 = 2\cdot QOR$, also deren Summe $= 2\cdot PQR$. Diese verschwindet, d. h. PQR ist eine Gerade, wenn O auf dem Kreise $A_1A_2A_3$ liegt. Die Gleichung $x_2x_3\sin A_1$

$+ x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 =$ konstant stellt ferner einen mit dem umgeschriebenen konzentrischen Kreis dar (Nr. 97).

Da $\sin A_1$, $\sin A_2$, $\sin A_3$ den Längen l_1, l_2, l_3 der Seiten des Koordinatendreiecks proportional sind, kann die Gleichung des umgeschriebenen Kreises auch in der Form

$$l_1 x_2 x_3 + l_2 x_3 x_1 + l_3 x_1 x_2 = 0$$

geschrieben werden.

303. **Kegelschnitte an drei Tangenten.** Dual entsprechend muß die Gleichung des einem Dreiseit mit den Ecken $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ *eingeschriebenen* Kegelschnittes in Linienkoordinaten lauten

(31) $\quad a_1 u_2 u_3 + a_2 u_3 u_1 + a_3 u_1 u_2 = 0$ oder $\frac{a_1}{u_1} + \frac{a_2}{u_2} + \frac{a_3}{u_3} = 0.$

Die Gleichung des Schnittpunktes zweier Tangenten u_i', u_i'' ist

$$\frac{a_1}{u_1' u_1''} u_1 + \frac{a_2}{u_2' u_2''} u_2 + \frac{a_3}{u_3' u_3''} u_3 = 0. \tag{32}$$

Für zwei aufeinanderfolgende Tangenten $u_i' = u_i''$ definiert sie den Berührungspunkt mit den Koordinaten

$$x_1 = \frac{a_1}{u_1'^2}, \quad x_2 = \frac{a_2}{u_2'^2}, \quad x_3 = \frac{a_3}{u_3'^2},$$

die daher die Ortsgleichung erfüllen

$$(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{33}$$

In rationaler Form erhalten wir daher die Gleichung der dem Koordinatendreiseit eingeschriebenen Kegelschnitte:

$$\begin{aligned} & a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 \\ & - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - 2 a_3 a_1 x_3 x_1 - 2 a_1 a_2 x_1 x_2 = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Man bestätigt dies direkt dadurch, daß bei Nullsetzen einer Veränderlichen die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Quadrat wird, also $x_i = 0$ die Kurve in zusammenfallenden Punkten schneidet.

Schreibt man die Gleichung in der Form von Nr. 291

$$a_3 x_3 (2 a_1 x_1 + 2 a_2 x_2 - a_3 x_3) = (a_1 x_1 - a_2 x_2)^2,$$

so erweisen sich $x_3 = 0$ und $2 a_1 x_1 + 2 a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$ als Tangenten mit der Berührungssehne $a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$. Wir können also ebenso wie dort einen Parameter λ durch $a_1 x_1 - a_2 x_2 = \lambda \cdot a_3 x_3$ einführen und erhalten

$$a_1 x_1 : a_2 x_2 : a_3 x_3 = (\lambda + 1)^2 : (\lambda - 1)^2 : 4. \tag{35}$$

Unter den Kegelschnitten dieses Systems sind ausgezeichnet die Schar der Parabeln[35]) und die *vier* dem Dreiseit eingeschriebenen Kreise.

B. 1) In dem umgeschriebenen Dreiseit ist $1 : a_1 \mid 1 : a_2 \mid 1 : a_3$ der Brianchonpunkt und $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ dessen Harmonikale oder die Pascalsche Gerade des Dreiseits (vgl. den Schluß des Textes von Nr. 276).

2) Die Gleichung der Sehne x_i', x_i'' des eingeschriebenen Kegelschnittes ist[36])

$$\sqrt{a_1}\left\{\sqrt{x_2' x_3''} + \sqrt{x_3' x_2''}\right\} x_1 + \sqrt{a_2}\left\{\sqrt{x_3' x_1''} + \sqrt{x_1' x_3''}\right\} x_2$$
$$+ \sqrt{a_3}\left\{\sqrt{x_1' x_2''} + \sqrt{x_2' x_1''}\right\} x_3 = 0.$$

3) Wie lautet die Gleichung des Kegelschnittes, der fünf Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $\Sigma \alpha_i x_i = 0$, $\Sigma \alpha_i' x_i = 0$ berührt?

Sie ist $$(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$$

mit den Bedingungen für a_1, a_2, a_3:

$$\frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{a_2}{\alpha_2} + \frac{a_3}{\alpha_3} = 0, \qquad \frac{a_1}{\alpha_1'} + \frac{a_2}{\alpha_2'} + \frac{a_3}{\alpha_3'} = 0.$$

Also ist

$$a_1 : a_2 : a_3 = \left(\frac{1}{\alpha_2 \alpha_3'} - \frac{1}{\alpha_2' \alpha_3}\right) : \left(\frac{1}{\alpha_3 \alpha_1'} - \frac{1}{\alpha_3' \alpha_1}\right) : \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2'} - \frac{1}{\alpha_1' \alpha_2}\right).$$

Insbesondere für $\Sigma x_i = 0$ und $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ als vierte und fünfte Tangente ist der Kegelschnitt

$$2(-x_1)^{\frac{1}{2}} + (3x_2)^{\frac{1}{2}} + x_3^{\frac{1}{2}} = 0.$$

4) Die Gleichung des Kegelschnittes, der die Seiten des Koordinatendreiecks in ihren Mittelpunkten berührt, lautet in trimetrischen Normalkoordinaten

$$(l_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (l_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (l_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

5) *Die Gleichung des dem Dreieck innerlich eingeschriebenen Kreises lautet in trimetrischen Normalkoordinaten*

$$\cos \tfrac{1}{2} A_1 \cdot \sqrt{x_1} + \cos \tfrac{1}{2} A_2 \cdot \sqrt{x_2} + \cos \tfrac{1}{2} A_3 \cdot \sqrt{x_3} = 0.$$

Der Mittelpunkt des dem Koordinatendreieck eingeschriebenen Kreises hat die Koordinaten $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 1 : 1 : 1$; andererseits hat der Mittelpunkt des Kegelschnitts $a_1 u_2 u_3 + a_2 u_3 u_1 + a_3 u_1 u_2 = 0$ als Pol der unendlich fernen Geraden $l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$ die Koordinaten $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = (a_2 l_3 + a_3 l_2) : (a_3 l_1 + a_1 l_3) : (a_1 l_2 + a_2 l_1)$. So ergibt sich

$$a_1 : a_2 : a_3 = l_1(-l_1 + l_2 + l_3) : l_2(l_1 - l_2 + l_3) : l_3(l_1 + l_2 - l_3)$$

und bei Einführung von $2l = l_1 + l_2 + l_3$ folgt

$$a_1 : a_2 : a_3 = l_1(l - l_1) : l_2(l - l_2) : l_3(l - l_3) = \frac{l - l_1}{l_2 l_3} : \frac{l - l_2}{l_3 l_1} : \frac{l - l_3}{l_1 l_2}.$$

Mit Rücksicht auf $\cos^2 \frac{1}{2} A_1 = \frac{l(l - l_1)}{l_2 l_3}$ usw. hat man auch $a_1 : a_2 : a_3 = \cos^2 \frac{1}{2} A_1 : \cos^2 \frac{1}{2} A_2 : \cos^2 \frac{1}{2} A_3$; nach (33) erhält man daher als Gleichung des eingeschriebenen Kreises

$$\cos \tfrac{1}{2} A_1 \cdot \sqrt{x_1} + \cos \tfrac{1}{2} A_2 \cdot \sqrt{x_2} + \cos \tfrac{1}{2} A_3 \cdot \sqrt{x_3} = 0.$$

Die Gleichung des in $x_1 = 0$ äußerlich berührenden Kreises geht aus der vorigen hervor, indem man das Vorzeichen von x_1 ändert und A_2, A_3 durch ihre Supplemente ersetzt; sie lautet also

$$\cos \tfrac{1}{2} A_1 \cdot \sqrt{(-x_1)} + \sin \tfrac{1}{2} A_2 \cdot \sqrt{x_2} + \sin \tfrac{1}{2} A_3 \cdot \sqrt{x_3} = 0.$$

6) Die Gleichung des eingeschriebenen Kreises entsteht folgendermaßen[37]) aus der des umgeschriebenen.

Sind $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, $x_3' = 0$ die Seiten, A_1', A_2', A_3' die Winkel desjenigen Dreiecks, das die Berührungspunkte des dem Koordinatendreiseit eingeschriebenen Kreises zu Ecken hat, so ist nach Nr. 302, 3 die Gleichung dieses Kreises $x_2' x_3' \sin A_1' + x_3' x_1' \sin A_2' + x_1' x_2' \sin A_3' = 0$. Aber nach Nr. 111 lautet diese Gleichung, bezogen auf die Dreiecke $A_1 A_2' A_3'$, $A_2 A_3' A_1'$, $A_3 A_1' A_2'$ auch $x_1'^2 = x_2 x_3$ bez. $x_2'^2 = x_3 x_1$ bez. $x_3'^2 = x_1 x_2$. Man beachte noch $A_i' = \frac{1}{2}(180^0 - A_i)$.

304. **Pleonastische Viererkoordinaten.** Die Gleichung des einem Viereck umgeschriebenen Kegelschnittes (Nr. 279) gestattet, manche Probleme durch Beziehungen zwischen den Abständen s_i eines Punktes von den Seiten des Vierecks auszudrücken, wie die Beispiele 1—5 zeigen.

Da zwischen irgend vier linearen Funktionen, die nach Teil I, Nr. 69 den eben erwähnten Abständen proportional sind, eine lineare homogene Identität (Nr. 67) besteht, sind die s_i nicht *unabhängige* homogene Koordinaten, sondern durch eine Identität untereinander verbundene Veränderliche. Sie bilden so ein erstes Beispiel für pleonastische Koordinatensysteme, d. h. für solche, die überzählige Veränderliche enthalten. Um die Verwendung zu vereinfachen, nehmen wir x_1, x_2, x_3, x_4 *als ein System von Viererkoordinaten*[38]) *mit der symmetrischen Identität*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 0, \tag{36}$$

d. h. die Gleichungen der aufeinander folgenden Seiten ab, ba', $a'b'$, $b'a$ eines Vierecks sollen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

sein, wo aber in den x_i geeignete konstante Faktoren implizite zu denken sind. An die früheren Dreieckskoordinaten (Nr. 88) knüpft diese Auffassung dadurch an, daß $x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ die Einheitslinie im Fundamentaldreieck der übrigen darstellt.

Alle homogenen Gleichungen zwischen den vier x_i' können ohne Änderung der Bedeutung dadurch umgeformt werden, daß man ein Vielfaches einer Potenz der Koordinatensumme (36) hinzufügt. So ist die Gleichung einer beliebigen Geraden:

$$(37) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

oder

$$(37\text{a}) \qquad (u_1 - u_4)x_1 + (u_2 - u_4)x_2 + (u_3 - u_4)x_3 = 0.$$

Man erhält für die Tangente im Punkte x_i' des Kegelschnittes $x_1 x_3 - k x_2 x_4 = 0$, indem man zuerst durch Elimination von x_4 auf Nr. 135 zurückgeht, schließlich die Gleichung

$$(38) \qquad x_3' x_1 + x_1' x_3 - k(x_4' x_2 + x_2' x_4) = 0$$

mit der Bedingung $x_1' x_3' - k x_2' x_4' = 0$, also durch Elimination von k die Gleichung der Tangente eines Punktes in bezug auf vier feste Punkte $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$.

Soll sie mit einer willkürlichen Geraden (37) zusammenfallen, so muß

$$(u_1 + k)x_1' = -(u_2 + k)x_2' = (u_3 + k)x_3' = -(u_4 + k)x_4' = C$$

oder konstant sein. Eliminiert man x_2' durch

$$(u_2 - u_4)x_2' = -(u_1 - u_4)x_1' - (u_3 - u_4)x_3',$$

so liefert die Determinante der ersten drei Gleichungen, für k und C als Unbekannte, nach leichten Umformungen

$$(39) \qquad (u_1 - u_2)(u_1 - u_4)x_1'^2 - (u_3 - u_2)(u_3 - u_4)x_3'^2 = 0$$

als die Gleichung der beiden Geraden, die die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte des Systems $aba'b'$ (Fig. 36) in der Tangente mit dem Punkte c, dem Schnittpunkt von $x_1 = 0$ oder ab und $x_3 = 0$ oder $a'b'$, verbinden.

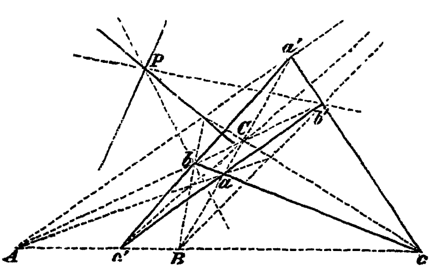


Fig. 36.

Man hat also den Satz: *Wenn der Schnittpunkt von zwei gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte mit den Berührungspunkten einer gemeinschaftlichen Tangente durch Geraden verbunden wird, so entsteht ein harmonisches Büschel.* Dies folgt auch aus dem Satze von der Involution in der Transversale eines Kegelschnittbüschels, wenn man das Sehnenpaar als einen seiner Kegelschnitte betrachtet (Nr. 289).

Insbesondere ist die Tangente von $x_1 x_3 - k x_2 x_4 = 0$ im Punkte $x_1' = x_2' = 0$ durch $x_1 + k x_2 = 0$ ausgedrückt und bildet also für $k = -1$ mit den anstoßenden Seiten und der Diagonale $x_1 + x_2 = 0$ des Vierecks ein harmonisches Büschel. Den vier Geraden entsprechen daher in den Ordnungen $x_1 x_2 x_3 x_4$, $x_2 x_3 x_1 x_4$, $x_3 x_1 x_2 x_4$ die drei Kegelschnitte

$$x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0, \quad x_2 x_1 + x_3 x_4 = 0, \quad x_3 x_2 + x_1 x_4 = 0$$

als solche, deren Tangenten in den Ecken des Vierseits mit den Seiten und der Diagonale ein harmonisches Büschel bilden.

B. 1) Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schar.[39]) Es seien $s_i \equiv -(x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ die Normalgleichungen der gemeinsamen Tangenten in rechtwinkligen Koordinaten, und ϑ sei der Winkel der Hauptachse eines der Kegelschnitte gegen die x-Achse. Alsdann sind $\pm(\alpha_i - \vartheta)$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ die Winkel der Hauptachse gegen die Lote der Tangenten. Bedeuten die in s_i enthaltenen $x \mid y$ die Koordinaten des Mittelpunktes, so ist nach Nr. 167, 1

$$s_i^2 = a^2 \cos^2(\alpha_i - \vartheta) + b^2 \sin^2(\alpha_i - \vartheta),$$
$$= (a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta) \cos^2\alpha_i + 2(a^2 - b^2) \cos\vartheta \sin\vartheta \cos\alpha_i \sin\alpha_i$$
$$+ (a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta) \sin^2\alpha_i.$$

Vier Gleichungen dieser Form erlauben die Elimination der Unbekannten a^2, b^2, ϑ^2 oder der Aggregate

$$a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta, \quad (a^2 - b^2) \cos\vartheta \sin\vartheta, \quad a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta.$$

Das Eliminationsergebnis ist

$$\begin{vmatrix} s_1^2, & \cos^2\alpha_1, & \cos\alpha_1 \sin\alpha_1, & \sin^2\alpha_1 \\ s_2^2, & \cos^2\alpha_2, & \cos\alpha_2 \sin\alpha_2, & \sin^2\alpha_2 \\ s_3^2, & \cos^2\alpha_3, & \cos\alpha_3 \sin\alpha_3, & \sin^2\alpha_3 \\ s_4^2, & \cos^2\alpha_4, & \cos\alpha_4 \sin\alpha_4, & \sin^2\alpha_4 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt $A_1 s_1^2 + A_2 s_2^2 + A_3 s_3^2 + A_4 s_4^2 = 0$ für A_i als be-

kannte Konstanten. Diese Gleichung ist aber nur scheinbar vom zweiten Grade; denn die s_i^2 geben entwickelt als Koeffizienten von x^2 die $\cos^2\alpha_i$, so daß, weil diese mit einer Spalte der Determinante übereinstimmen, der Faktor von x^2 verschwindet. Auf analoge Weise verschwinden die Koeffizienten von xy und y^2. Der gesuchte Ort ist daher eine Gerade (S. 34).

Ihre geometrische Bestimmung hängt von dem Umstande ab, daß die Polare eines beliebigen Punktes in bezug auf irgend einen Kegelschnitt $B_1 s_1^2 + B_2 s_2^2 + B_3 s_3^2 + B_4 s_4^2 = 0$ durch $B_1 s_1 s_1' + B_2 s_2 s_2' + B_3 s_3 s_3' + B_4 s_4 s_4' = 0$ dargestellt wird (vgl. Nr. 307) und somit die Polare von $s_1 \,|\, s_2$ durch $s_3 \,|\, s_4$ geht. Wenn aber, wie im jetzt vorliegenden Falle, ein Kegelschnitt durch das Verschwinden der höchsten Glieder seiner Gleichung in eine Gerade übergeht, so ist die Polare eines Punktes eine zu ihr parallele Gerade in der doppelten Entfernung von dem Punkte (Nr. 137). Die durch die erhaltene Gleichung dargestellte Gerade halbiert daher die Verbindungslinien der Punktepaare $s_1|s_2$, $s_3|s_4$; $s_1|s_3$, $s_2|s_4$; $s_1|s_4$, $s_2|s_3$.

Wenn umgekehrt in irgend einer Form die Gleichungen $s_i = 0$ von vier Geraden gegeben sind, so kann die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen ihres Vierseits zumeist am leichtesten gebildet werden, indem man die Konstanten A_i so bestimmt, daß $A_1 s_1^2 + A_2 s_2^2 + A_3 s_3^2 + A_4 s_4^2 = 0$ eine Gerade darstellt.

2) Die Mittelpunkte aller einem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitte, für die die Summe der Quadrate der Halbachsen konstant, etwa gleich k^2, ist, liegen auf einem Kreis.[40])

Mit drei Gleichungen der Seiten des Dreiseits von der Form derjenigen in 1) ist

$$a^2 + b^2 = k^2 = (a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta) + (a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta)$$

als vierte zu verbinden; das Ergebnis der Elimination ist

$$\begin{vmatrix} s_1^2 & \cos^2\alpha_1 & \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 \\ s_2^2 & \cos^2\alpha_2 & \cos\alpha_2 \sin\alpha_2 & \sin^2\alpha_2 \\ s_3^2 & \cos^2\alpha_3 & \cos\alpha_3 \sin\alpha_3 & \sin^2\alpha_3 \\ k^2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder
$$B_1 s_1^2 + B_2 s_2^2 + B_3 s_3^2 + B_4 = 0.$$

Man erkennt wie in 1), daß der Koeffizient von xy verschwindet, und daß die Koeffizienten von x^2 und y^2 einander gleich sind. Der Ort ist somit ein Kreis. Wenn aber die Gleichung $B_1 s_1^2 + B_2 s_2^2 + B_3 s_3^2 = 0$ einen Kreis darstellt, bezogen auf ein Polardreieck, dessen Höhenschnittpunkt sein Mittelpunkt ist (vgl. Nr. 299, 1), so stellt die zuvor abgeleitete Gleichung einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt der Höhenschnittpunkt des Tangentendreiseits ist.

3) Jeder Kegelschnitt, der zwei von den Diagonalen eines Vierseits harmonisch teilt, teilt auch die dritte so.

Sind s_i die linken Seiten der Gleichungen der vier Geraden, so ist $\Sigma A_i s_i^2 = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes, für den die Polare eines beliebigen Punktes in der Form $\Sigma A_i s_i s_i' = 0$ erscheint. Die Polare von $s_1 | s_2$ geht also durch $s_3 | s_4$, oder die Gegeneckenpaare des Vierseits $s_1 s_2 s_3 s_4$ sind durch den fraglichen Kegelschnitt harmonisch getrennt.[41])

Durch Verfügung über die Konstanten A_i kann ein Kegelschnitt dieser Art durch drei beliebige Punkte gelegt werden. Wenn durch besondere Wahl derselben drei Punkte der harmonisch konjugierten Paare der Diagonalen in eine Gerade $E_1 = 0$ fallen, so liegen die andern in einer Geraden $E_2 = 0$, so daß $\Sigma A_i s_i^2 = E_1 E_2$ ist. Liegen jene Punkte unendlich fern, so sind diese die Mitten der Diagonalen.

4) Die Mittelpunkte der beiden in einer Kegelschnittschar befindlichen gleichseitigen Hyperbeln sind die Schnittpunkte der in 1) gefundenen Mittelpunktgeraden mit den vier Kreisen, von denen je einer eines der vier durch drei Grundtangenten der Schar bestimmten Dreiecke zum Polardreieck hat. Die Mittelpunkte dieser vier Kreise sind nach Nr. 113 die Höhenschnittpunkte dieser Dreiecke und liegen nach Nr. 213, 1 auf der Leitlinie der einen in der Schar befindlichen Parabel.

Über die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die ein gegebenes Dreieck zum Polardreieck haben, vgl. Nr. 165, 3.

5) Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels.

Die Entfernung r_i eines der vier Grundpunkte A, B, C, D von einem Brennpunkte genügt nach Nr. 183 der Gleichung $r_i = ax_i + by_i + c$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, und durch Elimination von A, B, C aus diesen vier Gleichungen ergibt sich

$$\begin{vmatrix} r_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ r_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ r_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ r_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder durch Entwickelung $Lr_1 + Mr_2 + Nr_3 + Pr_4 = 0$. Mit Rücksicht auf die geometrische Bedeutung der Werte von L, M, N, P (Nr. 7), erhält man den Satz[42])

$$OA \cdot BCD + OC \cdot ABD = OB \cdot ACD + OD \cdot ABC$$

für O als den Brennpunkt und BCD, usw. als Flächeninhalt des Dreiecks der Punkte B, C, D usw. Man erkennt so, daß $L + M + N + P = 0$ sein muß. Substituiert man für die r_i ihre Werte

$\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$, so kommt durch die Entfernung der Wurzelgrößen die Gleichung des Ortes auf den sechsten Grad (Nr. 300, 7).

6) Liegen die Grundpunkte des Büschels in einem Kreise, so daß nach Nr. 99

$$L r_1^2 + M r_2^2 + N r_3^2 + P r_4^2 = 0$$

ist, so zerfällt der Ort der Brennpunkte in zwei Kurven dritter Ordnung[43]). Denn dann ist

$$(L+M)(L r_1^2 + M r_2^2) = (N+P)(N r_3^2 + P r_4^2)$$

und $$(L r_1 + M r_2)^2 = (N r_3 + P r_4)^2,$$

woraus durch Subtraktion $LM(r_1 - r_2)^2 = NP(r_3 - r_4)^2$ hervorgeht, und diese Gleichung zerfällt offenbar in Faktoren. Jeder Faktor liefert mit

$$L r_1 + M r_2 + N r_3 + P r_4 = 0$$

verbunden ein Ergebnis von der Form $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, das eine Kurve dritter Ordnung darstellt.

7) Man zeige, daß die nachstehend genannten Geraden von Fig. 36 die beigefügten Gleichungen haben:

$aa' : x_2 + x_3 = 0$ oder $x_1 + x_4 = 0$; $cC : x_1 - x_3 = 0$; $c'C : x_2 - x_4 = 0$;
$bb' : x_1 + x_2 = 0$ oder $x_3 + x_4 = 0$; $bB : x_1 - x_2 = 0$; $b'B : x_3 - x_4 = 0$;
$cc' : x_1 + x_3 = 0$ oder $x_2 + x_4 = 0$; $aA : x_1 - x_4 = 0$; $a'A : x_2 - x_3 = 0$.

Daher schneiden sich aA und bB in $c'C$; bB und cC in $a'A$; cC und aA in $b'B$; $a'A$ und $b'B$ in $c'C$.

8) Die Tangenten der durch den Punkt P oder x_i' gehenden Kegelschnitte der Büschel mit den Grundpunkten $aba'b'$ bez. $bb'cc'$ sind

$$\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0, \qquad \frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} - \frac{x_3}{x_3'} + \frac{x_4}{x_4'} = 0;$$

sie bilden mit den Geraden

$$\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} = 0, \qquad \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$$

ein harmonisches Büschel, d. h. mit den Geraden Pb, Pb'.

9) Gegeben seien die beiden Kegelschnitte $x_1 x_3 - k x_2 x_4 = 0$ und $x_1 x_3 - l x_2 x_4 = 0$, die sich in vier reellen Punkten schneiden. Ist x_i' der Berührungspunkt des zweiten Kegelschnittes mit einer gemeinschaftlichen Tangente beider Kegelschnitte, so berührt die Gerade $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$ den ersten Kegelschnitt, und die Beziehung $\Sigma x_i = 0$ bestimmt den Berührungspunkt, indem man zunächst x_3 und x_4 aus den beiden letzten Gleichungen und aus $x_1 x_3 - k x_2 x_4$ eliminiert. Dies ergibt

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'}, & \frac{1}{x_3'}, & -\frac{1}{x_4'} \\ 0 \quad , & x_1, & -kx_2 \\ x_1 + x_2, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und nun ist noch die Diskriminante dieser Gleichung zu bilden:

$$\left(\frac{k}{x_1'} - \frac{k}{x_3'} - \frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_4'}\right)^2 + 4k\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_4'}\right)\left(\frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_3'}\right) = 0,$$

die mit Hilfe von $x_1'x_3' = lx_2'x_4'$ in

$$4kl(x_2' + x_3')^2 = \{k(x_1' - x_3') - l(x_2' - x_4')\}^2$$

oder in

$$kl(x_1' - x_3' + x_4' - x_2')^2 = \{k(x_1' - x_3') + l(x_4' - x_2')\}^2$$

umgeformt werden kann, und diese letzte Gleichung läßt sich ersetzen durch

$$k(x_1' - x_3')^2 - l(x_4' - x_2')^2 = 0.$$

Hiernach liegen die vier Punkte x_i' in zwei Geraden, die durch den Schnittpunkt von $x_1 = x_3$ und $x_2 = x_4$ gehen und mit diesen ein harmonisches Büschel bilden, oder nach 7) in zwei Geraden durch C, die mit cC und $c'C$ ein harmonisches Büschel bilden. Dieselbe Gleichung erhält aber auch die Form

$$k(x_1' - x_3')^2 - l(2x_2' + x_1' + x_3')^2 = 0$$

oder

$$k(x_1' - x_3')^2 + 4lx_2'x_4' - l(x_1' + x_3')^2 = 0$$

oder

$$k(x_1' - x_3')^2 + 4x_1'x_3' - l(x_1' + x_3')^2 = 0$$

und zeigt, daß die vier Punkte x_i' in zwei Geraden aus dem Punkte $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ oder c liegen; sie liegen nach der Symmetrie der Gleichungen auch in zwei Geraden aus c'.

Man hat also den Satz: Wenn die vier dem einen Kegelschnitt angehörigen Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten eines Paares von Kegelschnitten, die sich in reellen Punkten schneiden, durch sechs Geraden verbunden werden, so fallen ihre drei Schnittpunkte mit den Schnittpunkten der drei Paare gemeinsamer Sehnen zusammen.

10) Der Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ hat mit den drei Kegelschnitten je eine doppelte Berührung, die zu den durch vier Geraden bestimmten Vierecken $aba'b'a$, $abb'a'a$ und $ab'ba'a$ derart gehören, daß die Tangenten in den Ecken die vierten harmonischen Geraden zu den beiden Seiten und der betreffenden Diagonale bilden, und zwar sind die Berührungssehnen die Diagonalen des Vierecks.

Der Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ kann auch durch

$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 0$ dargestellt werden, weil $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 0$ subtrahiert werden kann.

Diese Form ist aber mit $x_2 x_3 + x_1 x_4 + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = 0$ oder mit $x_2 x_3 + x_1 x_4 - (x_2 + x_3)^2 = 0$ äquivalent und zeigt, daß der betrachtete Kegelschnitt mit $x_2 x_3 + x_1 x_4 = 0$ in der Geraden $x_2 + x_3 = 0$ eine doppelte Berührung hat. Ebenso ergeben sich als mit der obigen Grundform äquivalente Formen:

$$x_3 x_4 + x_2 x_1 - (x_1 + x_2)^2 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 x_1 + x_2 x_4 - (x_1 + x_3)^2 = 0.$$

11) Die zwölf Kegelschnitte

$$x_1^2 = x_2 x_4,\ x_1^2 = x_3 x_4,\ x_1^2 = x_2 x_3;\ \ x_2^2 = x_1 x_3,\ x_2^2 = x_1 x_4,\ x_2^2 = x_3 x_4;$$
$$x_3^2 = x_1 x_4,\ x_3^2 = x_2 x_4,\ x_3^2 = x_1 x_2;\ \ x_4^2 = x_1 x_2,\ x_4^2 = x_1 x_3,\ x_4^2 = x_2 x_3$$

enthalten je drei Punkte des Vierecks, berühren zu zweien in jedem dieser Punkte die Nachbarseiten des Vierecks und gehen zu dreien durch die acht Punkte, die die Seiten des Vierecks mit dem Kegelschnitt $\Sigma x_i^2 = 0$ gemein haben. Die Seite $x_4 = 0$ schneidet diesen in Punkten, für die zugleich $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0$ ist, die also den Gleichungen $x_1^2 = x_2 x_3$, $x_2^2 = x_3 x_1$, $x_3^2 = x_1 x_2$ entsprechen.

12) Die Gleichung des Kegelschnittes, der die vier Fundamentallinien und die Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$ berührt, ist[44])

$$(a_1 - a_4)^2 (a_2 - a_3)^2 (x_1 x_4 + x_2 x_3) + (a_2 - a_4)^2 (a_3 - a_1)^2 (x_2 x_4 + x_3 x_1)$$
$$+ (a_3 - a_4)^2 (a_1 - a_2)^2 (x_3 x_4 + x_1 x_2) = 0.$$

Setzen wir $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ für $(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)$, usw. und berücksichtigen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, so erhalten die Berührungspunkte der vier Fundamentallinien die Koordinaten

$$0,\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_1;\ \alpha_3,\ 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2;\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ 0,\ \alpha_3;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ 0.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes mit der Geraden a_i sind

$$x_1 = (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4),\ x_2 = (a_3 - a_1)(a_3 - a_4)(a_1 - a_4),$$
$$x_3 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_4)(a_2 - a_4),\ x_4 = (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2).$$

Siebenzehntes Kapitel.

Die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades.

305. **Die allgemeine Gleichung in projektiven Koordinaten.** Im 8. Kapitel wurde gezeigt, in welcher Weise die allgemeine Gleichung einer Kurve zweiten Grades in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Parallelkoordinaten in gewisse einfache, durch die Gattung der Kurve bestimmte Normalformen übergeführt werden kann, und es wurden Kriterien abgeleitet, mit deren Hilfe sich leicht entscheiden läßt, welcher Gattung der durch ein beliebig gegebenes Beispiel der Gleichung zweiten Grades dargestellte Kegelschnitt angehört.

Bei den folgenden Betrachtungen soll nun vorausgesetzt werden, daß die Gleichung der Kurve *in projektiven Dreieckskoordinaten* x_1, x_2, x_3 (vgl. Nr. 87) vorliege. Sie hat alsdann die Gestalt $\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0$ oder

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0. \end{aligned}$$

Statt $f(x_1, x_2, x_3)$ wird im Folgenden häufig $f(x, x)$ gesetzt, wobei das doppelte x anzeigen soll, daß (1) in den x vom zweiten Grade ist.

Wie bei Parallelkoordinaten enthält auch jetzt die Gleichung der Kurve fünf *unabhängige* Konstanten; diese lassen sich daher so bestimmen, daß die Kurve (1) durch fünf gegebene Punkte geht und also mit einem beliebigen gegebenen Kegelschnitt zusammenfällt.

Die Gleichung (1) enthält die Gleichung in Parallelkoordinaten als einen besonderen Fall, den wir erhalten, wenn wir x_1 und x_2 durch x und y ersetzen und die Seite $x_3 = 0$ des Koordinatendreiecks (Fundamentaldreiecks) im Unendlichen, d. h. $x_3 = 1$, annehmen (Nr. 76).

Andererseits kann die dual entsprechende Gleichung

$$F(u_1, u_2, u_3)$$
$$\equiv A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2 =$$

in projektiven Linienkoordinaten jeden beliebigen nicht ze fallenden Kegelschnitt darstellen, weil sie für fünf willkürli gewählte Tangenten eines solchen erfüllt werden kann. Wei die duale Deutung im folgenden der Kürze wegen zumei unterlassen ist, so sollte sich der Leser doch diese Übertragu zur selbstverständlichen Gewohnheit machen.

Überhaupt kann jede Kurve von einer gegebenen Or nung mit Hilfe einer homogenen Funktion von demselb Grade in x_1, x_2, x_3 dargestellt werden; denn man erken leicht, daß die Zahl der Glieder in der vollständigen Gleichu n^{ten} Grades zwischen zwei Unbekannten übereinstimmt m der Zahl der Glieder in der homogenen Gleichung n^{ten} Grad zwischen drei Veränderlichen. Diese beiden Gleichungen si gleich fähig, irgend eine besondere Kurve darzustellen, sie dieselbe Zahl von Konstanten enthalten.

306. **Tangente.** Da die Koordinaten irgend eines in d Verbindungsgeraden von $P'(x_1' | x_2' | x_3')$ und $P''(x_1'' | x_2'' | x_3$ liegenden Punktes von der Form $lx_i' + mx_i''$ sind (Nr. 7 so können die Punkte, in denen jene Gerade irgend ei Kurve schneidet, dadurch bestimmt werden, daß man die Werte an Stelle der Veränderlichen in ihre Gleichung ei setzt und die aus der so erhaltenen Gleichung entspringend Werte des Verhältnisses $l : m$ ermittelt.

So werden (vgl. Nr. 132) die Schnittpunkte jener G raden mit dem Kegelschnitt $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ durch die qu dratische Gleichung[45])

$$l^2(a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{23}x_2'x_3' + 2a_{31}x_3'x_1' + 2a_{12}x_1'x_2'$$
$$+ 2lm\{a_{11}x_1'x_1'' + a_{22}x_2'x_2'' + a_{33}x_3'x_3'' + a_{23}(x_2'x_3'' + x_2''x_3'$$
$$+ a_{31}(x_3'x_1'' + x_3''x_1') + a_{12}(x_1'x_2'' + x_1''x_2')\} + m^2(a_{11}x_1''^2 + a_{22}x_2''^2$$
$$+ a_{33}x_3''^2 + 2a_{23}x_2''x_3'' + 2a_{31}x_3''x_1'' + 2a_{12}x_1''x_2'') = 0$$

bestimmt, die wir mit leicht verständlichen Abkürzungen der Form schreiben wollen

$$(2) \qquad l^2 f(x', x') + 2lm f(x', x'') + m^2 f(x'', x'') = 0.$$

Liegt der Punkt P' auf der Kurve, so verschwind

$f(x', x')$, und die quadratische Gleichung geht in eine lineare über. Ihre Auflösung für $l:m = -f(x'', x''):2f(x', x'')$ gibt für die Koordinaten des Punktes, in dem der Kegelschnitt durch die Gerade von einem seiner Punkte P' nach einem willkürlich außer ihm gewählten Punkte P'' geschnitten wird, die Werte $f(x'', x'')x_i' - 2f(x', x'')x_i''$. Diese reduzieren sich auf x_i' selbst, sobald $f(x', x'') = 0$ ist. Wenn also die Koordinaten $x_i = x_i''$ die Gleichung

$$(3) \qquad f(x, x') \equiv a_{11}x_1x_1' + a_{22}x_2x_2' + a_{33}x_3x_3' + a_{23}(x_2x_3' + x_2'x_3) + a_{31}(x_3x_1' + x_3'x_1) + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2) = 0$$

erfüllen, so schneidet die Verbindungsgerade der Punkte P' und P'' die Kurve in zwei in P' zusammenfallenden Punkten, oder mit andern Worten, der Punkt P'' liegt in der Tangente des Kegelschnittes im Punkte P'. Somit ist $f(x, x') = 0$ *die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes.*

307. **Polare.** Auf Grund der vollständigen Symmetrie der Gleichung (3) nach den Größen x_i und x_i' erkennen wir (Nr. 134), daß diese Gleichung *die Polare des Punktes P'* darstellt, sobald dieser *nicht* in der Kurve liegt. Wir können den nämlichen Schluß aus der Bemerkung begründen, daß $f(x', x'') = 0$ die Bedingung ausdrückt, unter der die Verbindungsgerade der Punkte P' und P'' durch die Kurve harmonisch geteilt wird.

Die Gleichung der Polare des Punktes P' kann, wenn wieder die Verabredung $a_{ik} = a_{ki}$ getroffen wird, in der Form

$$(3\text{a}) \qquad x_1'(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2'(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + x_3'(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

geschrieben werden. Der hier auftretende trinomische Faktor von x_i' ist aber je die Hälfte $f_i = \frac{1}{2}f'(x_i)$ der nach x_i genommenen Ableitung der linken Seite der Gleichung (1) des Kegelschnittes. So geht (3) über in

$$(4) \qquad f(x, x') \equiv \Sigma x_i' f_i = x_1'f_1 + x_2'f_2 + x_3'f_3 = 0.$$

Insbesondere ist für $x_2' = 0$, $x_3' = 0$ die Polare der Ecke des Koordinatendreiecks $A_1(x_1' \mid 0 \mid 0)$ durch $f_1 = 0$ dargestellt*),

*) Die im Falle $a_{11} \neq 0$ gestattete Darstellung von $f(x, x) = 0$ in der Form

die Gleichung der Polare der Ecke A_i wird also gebildet, indem man die nach x_i genommene Ableitung $f'(x_i)$ der linken Seite der Gleichung des Kegelschnittes gleich Null setzt.

Da die Gleichung der Polare bei der Vertauschung der x_i mit den x_i' ungeändert bleibt, so kann sie auch in der Form geschrieben werden

$$(5)\qquad f(x,\ x') \equiv x_1(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3') + x_2(a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3') + x_3(a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3') = 0.$$

Diese Vertauschbarkeit der x_i und x_i' begründet aber die Sätze von Nr. 135. Wir können die f_i' geradezu als die Linienkoordinaten der Polare von P' nehmen.

B. 1) Perspektive Lage der polar-konjugierten Dreiecke.

Dem Fundamentaldreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ist polarkonjugiert das Dreieck $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$. Die Verbindungslinien entsprechender Ecken sind $a_{31}f_2 - a_{12}f_3 = 0$, $a_{12}f_3 - a_{23}f_1 = 0$, $a_{23}f_1 - a_{31}f_2 = 0$. Die Schnittpunkte entsprechender Seiten haben die Gleichungen $a_{31}u_2 - a_{12}u_3 = 0$, $a_{12}u_3 - a_{23}u_1 = 0$, $a_{23}u_1 - a_{31}u_2 = 0$. (Nr. 67, 4).

2) Ein Polardreieck $P'P''P'''$ ist bestimmt durch x_1', x_2', x_3'; x_1'', x_2'', x_3'' (Nr. 136) vermöge $x_3''f_3' = -x_1''f_1' - x_2''f_2'$ und $x_1''' : x_2''' : x_3''' = (f_2'f_3'' - f_2''f_3') : (f_3'f_1'' - f_3''f_1') : (f_1'f_2'' - f_1''f_2')$.

308. **Diskriminante.** Wenn eine Kurve zweiter Ordnung in ein Geradenpaar ausartet, geht nach Nr. 137 die Polare eines jeden Punktes ihrer Ebene durch den Schnittpunkt S der beiden Geraden. Wenn daher die allgemeine Gleichung $f(x, x) = 0$ ein Geradenpaar darstellt, sind die Polaren der Fundamentalpunkte $1 | 0 | 0$, $0 | 1 | 0$, $0 | 0 | 1$ bez. $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ oder

$$(6)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ \qquad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

drei Geraden durch einen Punkt. Indem wir ähnlich wie in Nr. 37 aus diesen drei Gleichungen x_1, x_2, x_3 eliminieren, ergibt sich als Bedingung dafür, daß die Gleichung $f(x, x) = 0$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)x_2^2 + 2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})x_2x_3 + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x_3^2 = 0,$$

in der die letzten drei Glieder durch ihr Verschwinden zwei Geraden durch A_1 darstellen, gibt auch (Nr. 258) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$ als die Polare von A_1 und begründet damit ihrerseits das Folgende.

ein Geradenpaar darstellt, das Verschwinden der aus den a_{ik} gebildeten Determinante dritten Grades A, also dieselbe Bedingung, die schon bei Parallelkoordinaten in Nr. 62 gefunden wurde.

Auch im Folgenden werden wir die Unterdeterminanten von A stets mit A_{ik} bezeichnen. Es sei daran erinnert, daß die aus den A_{ik} gebildete symmetrische Determinante den Wert A^2 und ihre Unterdeterminanten A_{ik} die Werte $A a_{ik}$ erhalten (vgl. Teil 1, S. 81 und 284). Die Koordinaten des Doppelpunktes des Geradenpaares $f(x, x) = 0$ lauten dann wie in Nr. 138

$$x_1' : x_2' : x_3' = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} \quad (i = 1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3).$$

309. **Tangentialgleichung.** Die Auflösung linearer Gleichungen wenden wir ferner an auf die Frage nach der *Bestimmung der Koordinaten des Poles einer Geraden* u_i oder $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ in bezug auf den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$. Sind x_i' die gesuchten Koordinaten, so gelten die drei linearen Gleichungen

$$f_1' = u_1, \quad f_2' = u_2, \quad f_3' = u_3. \tag{7}$$

Durch Auflösung von (7) nach x_i' erhält man

$$\left\{\begin{aligned} A x_1' &= A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3, \\ A x_2' &= A_{12} u_1 + A_{22} u_2 + A_{23} u_3, \\ A x_3' &= A_{13} u_1 + A_{23} u_2 + A_{33} u_3. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Die Koordinaten des Poles sind also stets reell, wenn die Gerade es ist, und umgekehrt; sie sind völlig bestimmt, so lange $A \neq 0$ ist.

Da insbesondere der Pol einer Tangente des Kegelschnittes ihr Berührungspunkt, also ein Punkt dieser Tangente selbst ist, erhalten wir durch Einsetzen der Koordinatenwerte x_i' an Stelle der Veränderlichen x_i in die Gleichung der Geraden die Bedingung, unter der im Falle $A \neq 0$ die Gerade u_i den durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellten Kegelschnitt berührt, nämlich

$$\begin{aligned} A_{11} u_1^2 + A_{22} u_2^2 + A_{33} u_3^2 \\ + 2 A_{23} u_2 u_3 + 2 A_{13} u_3 u_1 + 2 A_{12} u_1 u_2 = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

die Gleichung $F(u_1, u_2, u_3) = 0$ des Kegelschnittes in Linienkoordinaten.

Wir erinnern daran, daß diese Gleichung, falls $f(x, x) = 0$ ein Geradenpaar ist, dessen Schnittpunkt doppelt zählend darstellt; im Falle einer Doppelgeraden verschwindet (9) identisch (vgl. Teil 1, S. 307).

Die Tangentialgleichung (9) kann natürlich auch in analoger Weise wie in Nr. 149 abgeleitet werden. Man erhält sie alsdann in der Form einer gleich Null gesetzten symmetrischen Determinante

$$(10)\quad -F(u_1, u_2, u_3) \equiv -F(u, u) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die aus der Diskriminante A durch „Rändern“ mit den Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 hervorgeht.

Die Bedingung, unter der sich zwei Geraden u_i und v auf dem Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ schneiden, wird offenbar

$$(11)\quad \begin{aligned} & a_{11}(u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + \cdots \\ & + 2a_{23}(u_3 v_1 - u_1 v_3)(u_1 v_2 - u_2 v_1) + \cdots = 0, \end{aligned}$$

wobei sich die durch Punkte angedeuteten Glieder aus dem vorhergehenden Gliede durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben. Die Gleichung (11) läßt sich auch in der Form schreiben:

$$(11\text{a})\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Werden u_1, u_2, u_3 als Koordinaten irgend einer Geraden betrachtet, so stellt diese Gleichung in Linienkoordinaten u_i das Paar der Schnittpunkte einer gegebenen Geraden $v_x = 0$ mit dem Kegelschnitte (1) dar.

Dual zu (3a) und (4) folgt, daß die Koordinaten des Pols der Geraden $v_x = 0$ in bezug auf den Kegelschnitt

(12) $$\varphi(u,u) \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0$$

durch die Ausdrücke $\varphi'(v_i)$ gegeben sind, die man erhält, wenn man in den partiellen Differentialquotienten von (12) nach den u_i die Größen u_1, u_2, u_3 durch v_1, v_2, v_3 ersetzt.

Irgend ein Strahl des durch zwei Geraden $u_x = 0$ und $v_x = 0$ bestimmten Büschels hat Koordinaten von der Form $\lambda u_i + \mu v_i$; daher ist $\varphi(\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3) = 0$ die Bedingung dafür, daß dieser Strahl eine Tangente des Kegelschnitts (12) sei. Die Entwickelung nach Potenzen von λ und μ ergibt:

(13) $\lambda^2\varphi(u,u) + 2\lambda\mu\varphi(u,v) + \mu^2\varphi(v,v) = 0$ wobei

(14) $$\varphi(u,v) \equiv (\alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \alpha_{13}v_3)u_1 + (\alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{23}v_3)u_2 + (\alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2 + \alpha_{33}v_3)u_3.$$

Hier ist $\varphi(u,v) = 0$ die Bedingung dafür, daß zwei Geraden u_i und v_i in bezug auf den Kegelschnitt (12) konjugierte Polaren seien, und bei veränderlichen Linienkoordinaten u_i ist (14) die Gleichung des Poles der Geraden v_i in bezug auf (12). Vgl. auch Nr. 132 und 134.

B. 1) Man soll die Koordinaten des Poles der Geraden v_i in bezug auf den Kegelschnitt $(a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ bestimmen. In diesem Falle ist nach Nr. 303 die Tangentialgleichung:

$$a_1u_2u_3 + a_2u_3u_1 + a_3u_1u_2 = 0;$$

die Koordinaten des Poles sind also

$$y_1 = a_2v_3 + a_3v_2, \quad y_2 = a_3v_1 + a_1v_3, \quad y_3 = a_1v_2 + a_2v_1.$$

2) Den Ort des Poles der Geraden v_i in bezug auf einen Kegelschnitt zu bestimmen, für den drei Tangenten und eine andere Bedingung gegeben sind.[46])

Wenn wir die Schluß-Gleichungen von 1) nach a_1, a_2, a_3 auflösen, so finden wir a_1, a_2, a_3 den Größen $v_1(v_2y_2 + v_3y_3 - v_1y_1)$, $v_2(v_3y_3 + v_1y_1 - v_2y_2)$, $v_3(v_1y_1 + v_2y_2 - v_3y_3)$ proportional.

Die gegebene Gleichung bezeichnet aber einen Kegelschnitt, der die drei Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berührt; eine vierte Bedingung, der der Kegelschnitt genügen muß, begründet eine weitere Beziehung zwischen a_1, a_2, a_3, aus der durch Einsetzen der eben angegebenen Werte die Gleichung des Ortes hervorgeht, den der Pol von v_i beschreibt. Trägt man für v_i die Seitenlängen l_i des Fundamentaldreiecks ein, so erhält man in derselben Gleichung den Ort des Mittelpunktes in Normalkoordinaten. So schließen wir

aus dem Nachweis, daß der Kegelschnitt die Gerade w_i berührt, wenn $\Sigma(a_i : w_i) = 0$, daß der Ort des Pols der Geraden v_i in bezug auf den die *vier* Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $\Sigma w_i x_i = 0$ berührenden Kegelschnitt die durch

$$\frac{v_1(v_2x_2+v_3x_3-v_1x_1)}{w_1}+\frac{v_2(v_3x_3+v_1x_1-v_2x_2)}{w_2}+\frac{v_3(v_1x_1+v_2x_2-v_3x_3)}{w_3}=0$$

dargestellte Gerade ist (Nr. 304, 1 für den Fall des Mittelpunktes). In dieser Gleichung sind die früheren y_i durch die x_i ersetzt.

Oder, weil der Kegelschnitt durch den Punkt y_i geht, wenn die Bedingung $\Sigma\sqrt{(a_iy_i)} = 0$ erfüllt ist, so ist der Ort des Poles der Geraden v_i in bezug auf die Kegelschnitte, die die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berühren und den Punkt y_i enthalten, durch

$$\{v_1y_1(v_2x_2+v_3x_3-v_1x_1)\}^{\frac{1}{2}}+\{v_2y_2(v_3x_3+v_1x_1-v_2x_2)\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+\{v_3y_3(v_1x_1+v_2x_2-v_3x_3)\}^{\frac{1}{2}}=0$$

ausgedrückt. Dieser Ort ist also ein Kegelschnitt, der die Geraden

$$v_2x_2+v_3x_3-v_1x_1=0,\quad v_3x_3+v_1x_1-v_2x_2=0,\quad v_1x_1+v_2x_2-v_3x_3=0$$

berührt. Wenn man den Ort des Mittelpunktes sucht, d. h. bei Normalkoordinaten die v_i durch die l_i ersetzt, so sind diese drei Geraden die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Seiten des von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gebildeten Dreiecks.

3) Man soll die Koordinaten des Pols der Geraden v_i in bezug auf den durch die Fundamentalpunkte gehenden Kegelschnitt $a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$ bestimmen.

Nach (30) in Nr. 302 ist die Tangentialgleichung

$$a_{23}^2u_1^2+a_{31}^2u_2^2+a_{12}^2u_3^2-2a_{31}a_{12}u_2u_3-2a_{12}a_{23}u_3u_1$$
$$-2a_{23}a_{31}u_1u_2=0;$$

die Koordinaten des Poles sind daher

$$y_1=a_{23}(a_{23}v_1-a_{31}v_2-a_{12}v_3),\quad y_2=a_{31}(a_{31}v_2-a_{12}v_3-a_{23}v_1),$$
$$y_3=a_{12}(a_{12}v_3-a_{23}v_1-a_{31}v_2).$$

Man hat also

$$a_{31}y_3+a_{12}y_2=-2a_{23}a_{31}a_{12}v_1,$$

und ebenso

$$a_{12}y_1+a_{23}y_3=-2a_{23}a_{31}a_{12}v_2,\quad a_{23}y_2+a_{31}y_1=-2a_{23}a_{31}a_{12}v_3,$$

und findet wie in 2) a_{23}, a_{31}, a_{12} bez. proportional zu

$$y_1(v_2y_2+v_3y_3-v_1y_1),\quad y_2(v_3y_3+v_1y_1-v_2y_2),\quad y_3(v_1y_1+v_2y_2-v_3y_3).$$

Da nun die Bedingung, unter der ein dem Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ umgeschriebener Kegelschnitt durch einen vierten Punkt x_i

hindurchgeht, durch $\frac{a_{23}}{x_1'} + \frac{a_{31}}{x_2'} + \frac{a_{12}}{x_3'} = 0$ dargestellt wird, so ist der Ort des Poles von v_i in bezug auf einen durch vier Punkte gehenden Kegelschnitt:

$$\frac{x_1}{x_1'}(v_2x_2 + v_3x_3 - v_1x_1) + \frac{x_2}{x_2'}(v_3x_3 + v_1x_1 - v_2x_2)$$
$$+ \frac{x_3}{x_3'}(v_1x_1 + v_2x_2 - v_3x_3) = 0.$$

Für den Ort des Mittelpunktes ergibt sich daraus ein durch die Seitenmitten des Fundamentaldreiecks gehender Kegelschnitt (Nr. 287, 9).

Die Bedingung, unter der der Kegelschnitt eine Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_3 = 0$ berührt, liefert den Ort des Poles der Geraden v_i in bezug auf einen durch die drei Fundamentalpunkte gehenden und jene Gerade berührenden Kegelschnitt als

$$\{a_1x_1(v_2x_2 + v_3x_3 - v_1x_1)\}^{\frac{1}{2}} + \{a_2x_2(v_3x_3 + v_1x_1 - v_2x_2)\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \{a_3x_3(v_1x_1 + v_2x_2 - v_3x_3)\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dieser Ort ist im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung.[47])

4) Man beweise folgende Sätze: Wenn zwei Kegelschnitte mit einem dritten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so liegen die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten mit den Polen der Berührungssehnen in einer Geraden und bilden mit ihnen eine harmonische Gruppe (vgl. Nr. 261).

Wenn drei Kegelschnitte zwei zu allen gemeinschaftliche Tangenten haben, so liegen die Schnittpunkte der übrigen, jedem Paare gemeinsamen Tangenten in einer Geraden. (Vgl. Nr. 267.)

5) Wenn man von einem Punkte, der auf einer festen Geraden fortrückt, an eine Kurve zweiten Grades die Tangenten zieht und zu diesen und der festen Geraden in jedem Falle einen vierten Strahl so bestimmt, daß er mit jenen ein konstantes Doppelverhältnis α hat, so umhüllen alle Lagen dieses Strahles einen Kegelschnitt, der den gegebenen doppelt berührt.

Dies folgt dual aus Nr. 133. Ist $\varphi(u, u) = 0$ die Gleichung des gegebenen Kegelschnitts in Linienkoordinaten und sind v_i die Koordinaten der festen Geraden, so umhüllen die genannten vierten Strahlen die Kurve zweiter Klasse

$$(\alpha + 1)^2\{(\varphi'(v_1)u_1 + \varphi'(v_2)u_2 + \varphi'(v_3)u_3)^2 - 4\varphi(v, v)\cdot\varphi(u, u)\}$$
$$- (\alpha - 1)^2\{\varphi'(v_1)u_1 + \varphi'(v_2)u_2 + \varphi'(v_3)u_3\}^2 = 0,$$

und diese Gleichung kann auch in folgende Form gebracht werden:
$(\alpha+1)^2\varphi(v,v)\cdot\varphi(u, u) - \alpha\{\varphi'(v_1)u_1 + \varphi'(v_2)u_2 + \varphi'(v_3)u_3\}^2 = 0.$
Ersetzt man hier $(\alpha + 1)^2 : \alpha$ durch einen Parameter λ, so stellt die Gleichung, den unendlich vielen Werten von λ entsprechend, ein System von Kegelschnitten dar, die mit dem festen Kegelschnitt

$\varphi(u, u) = 0$ eine doppelte Berührung haben; hierbei ist der Pu
$\varphi'(v_1)u_1 + \varphi'(v_2)u_2 + \varphi'(v_3)u_3 = 0$ der Pol der Berührungsse
(vgl. Nr. 258).

6) Man soll ein Vielseit konstruieren, das einem festen Ke
schnitt umgeschrieben ist und dessen Ecken in gegebenen Gera
liegen. (Vgl. Nr. 298.)

310. **Unbestimmtheit polarer Zuordnung.** Die Un
suchung in Nr. 309 wird hinfällig, wenn die *eindeutige*
ordnung des Pols zu einer gegebenen Polare eine Ausnał
erleidet. Es entspringt so die Frage: *Wann hat in bezug
einen Kegelschnitt eine Gerade unendlich viele Pole?*

Genau in derselben Weise wie schon in Nr. 137 bei
nutzung von schief- oder rechtwinkligen Cartesischen
ordinaten gezeigt wurde, folgt auch jetzt bei Verwendung
projektiven Dreieckskoordinaten, daß diese Unbestimmtl
eintritt, wenn die aus den Koeffizienten a_{ik} gebildete De
minante A verschwindet. In diesem Falle besteht der Ke
schnitt bekanntlich (Nr. 308) aus einem Geradenpaar, der
einer gegebenen Geraden gehörige Pol ist nun völlig un
stimmt. In gleicher Weise wie in Nr. 137 und 138 folgt,
die Dreieckskoordinaten $z_1 \mid z_2 \mid z_3$ des Schnittpunktes S die
Geradenpaares Gleichungen erfüllen von der Form

$$\varrho z_i z_k = A_{ik}, \tag{15}$$

wobei ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet (vgl. (27a)
Nr. 138).

Die Geraden, in die der Kegelschnitt zerfällt, wer
bestimmt, wie folgt. Sind ihre Koordinaten a_i, b_i, d. h.
$f(x, x) \equiv a_x \cdot b_x$, so hat man $a_{ik} = \frac{1}{2}(a_i b_k + a_k b_i)$,

$$A_{ik} = \tfrac{1}{4}(a_i b_j - a_j b_i)(a_k b_j - a_j b_k) = \varrho z_i z_k,$$
$$A_{ii} = -\tfrac{1}{4}(a_k b_j - a_j b_k)^2 = \varrho z_i^2.$$

Aus $a_x = 0$ und $b_x = 0$ folgt für die Koordinaten
Schnittpunktes S

$$z_1 : z_2 : z_3 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) : (a_3 b_1 - a_1 b_3) : (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

und wenn man den Proportionalitätsfaktor ϱ bei $A_{ik} = \varrho$
gleich -1 annimmt, ist zu setzen

$$z_1 = \tfrac{1}{2}(a_2 b_3 - a_3 b_2), \quad z_2 = \tfrac{1}{2}(a_3 b_1 - a_1 b_3), \quad z_3 = \tfrac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b$$

Alsdann besteht das System von Gleichungen

$$\begin{array}{lll} a_1 b_1 = a_{11}\quad, & a_2 b_1 = a_{12} - z_3, & a_3 b_1 = a_{13} + z_2, \\ a_1 b_2 = a_{12} + z_3, & a_2 b_2 = a_{22}\quad, & a_3 b_2 = a_{23} - z_1, \\ a_1 b_3 = a_{13} - z_2, & a_2 b_3 = a_{23} + z_1, & a_3 b_3 = a_{33}. \end{array}$$

Für die Linienkoordinaten $v_i = f'(y_i)$ der Polare eines gegebenen Poles y erhält man

$$v_i = f'(y_i) = b_i \Sigma a_k y_k + a_i \Sigma b_k y_k = b_i a_y + a_i b_y.$$

Derselbe Gang der Untersuchung beleuchtet den Ausnahmefall der zerfallenden *Kurven zweiter Klasse*, wo also die Kurve aus einem Punktepaar besteht. Dual zu den Betrachtungen in Nr. 137 folgt, daß der Pol des Trägers g des Punktepaares unbestimmt ist. Der Pol irgend einer Geraden g_1 ist der vierte harmonische Punkt P_1 zu dem gegebenen Punktepaar und zu dem Schnittpunkt der beiden Geraden g und g_1. Die Polare eines beliebigen Punktes P ist unbestimmt. Liegt P auf g, so kann jede durch P_1 gehende Gerade als zu P gehörige Polare betrachtet werden.

311. **Gleichung in Punktkoordinaten für eine Kurve zweiter Klasse.** Dual zu Nr. 149 und 309 folgt, daß der Kurve zweiter Klasse

$$(16)\qquad \varphi(u, u) \equiv \alpha_{11} u_1^2 + 2\alpha_{12} u_1 u_2 + \alpha_{22} u_2^2 + 2\alpha_{13} u_1 u_3 + 2\alpha_{23} u_2 u_3 + \alpha_{33} u_3^2 = 0$$

die Gleichung in Punktkoordinaten

$$(17)\qquad \Phi(x, x) \equiv \mathsf{A}_{11} x_1^2 + 2\mathsf{A}_{12} x_1 x_2 + \mathsf{A}_{22} x_2^2 + 2\mathsf{A}_{13} x_1 x_3 + 2\mathsf{A}_{23} x_2 x_3 + \mathsf{A}_{33} x_3^2 = 0$$

zugehört, in der A_{ik} die Unterdeterminante von α_{ik} in der Diskriminante

$$(18)\qquad \mathsf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$$

bezeichnet. Ferner ist, analog zu Nr. 149 und 309:

$$(19)\qquad \Phi(x, x) = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Also stellt eine Gleichung zweiten Grades in Linienkoordinaten einen Kegelschnitt dar, dessen Gleichung in Punktkoordi-

naten erhalten wird, indem man die Diskriminante der gegebe mit den x_i „rändert".

Im Falle $\mathsf{A} = 0$ zerfällt die Kurve zweiter Klasse in Punktepaar; hat dessen Träger die Koordinaten $v_1 \mid v_2 \mid v_3$, ist nun $v_i v_k = \mathsf{A}_{ik}$ (vgl. Nr. 138), und die zugehörige Gleichı in Punktkoordinaten

(20) $$\Phi(x, x) \equiv (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)^2 = 0$$

stellt den Träger des Punktepaares doppelt zählend dar.

Will man von der zu $f(x, x) \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ gehöri Gleichung (10) in Linienkoordinaten $F(u, u) = 0$ ausgeh wieder die Gleichung in Punktkoordinaten ableiten, so s die α_{ik} in (16) zu ersetzen durch die A_{ik}, an Stelle voı tritt die aus den A_{ik} gebildete Determinante, deren Wert n Nr. 90 gleich A^2 ist. Ferner sind die Koeffizienten A_{ik} · (17) durch die Unterdeterminanten $\mathfrak{A}_{ik}$ der eben erwähn Determinante zu ersetzen. Hierbei ist aber (vgl. Teil I, S. und 284) $\mathfrak{A}_{ik} = A a_{ik}$, die aus $F(u, u) = 0$ abgeleitete G chung in Punktkoordinaten $\Phi(x, x) = 0$ wird daher nunm

(21) $$\Phi(x, x) \equiv A f(x, x) = 0.$$

312. **Allgemeine Parametermethode.** Betrachten wir Kegelschnitt als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel, so k man diese, falls sie nicht perspektiv sind, immer so gege denken, daß die Gleichungen lauten (Nr. 290)

(22) $$a_x + k b_x = 0, \quad b_x + k c_x = 0.$$

Die Gleichung des Erzeugnisses ist dann

(23) $$a_x \cdot c_x - b_x^2 = 0,$$

wo $a_x = 0$, $c_x = 0$ die Tangenten in den Endpunkten Sehne $b_x = 0$ sind. Eliminiert man aus den Büschelgleichun mit Hilfe von $u_x = 0$ die Koordinaten x_i, so erhält man Bestimmung derjenigen Werte von k, die den beiden Schn punkten der Geraden u_i mit der Kurve entsprechen, die dingungsgleichung

(24) $$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 + k b_1, & a_2 + k b_2, & a_3 + k b_3, \\ b_1 + k c_1, & b_2 + k c_2, & b_3 + k c_3, \end{vmatrix} = 0.$$

Wir bezeichnen nun das System der adjungierten I

mente der nach der Voraussetzung nicht verschwindenden Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \Delta^2.$$

Dann ist die Entwickelung des Eliminationsergebnisses

(25) $$C_u - kB_u + k^2 A_u = 0,$$

falls die linearen Symbole gebraucht werden

$$A_u = \Sigma A_i u_i, \quad B_u = \Sigma B_i u_i, \quad C_u = \Sigma C_i u_i.$$

Dabei definieren $A_u = 0$, $C_u = 0$ die Berührungspunkte der Tangenten $c_x = 0$ bez. $a_x = 0$, und $B_u = 0$ deren Schnittpunkt.

Soll nun die Gerade u_i eine Tangente der Kurve sein, so muß die Gleichung (25) für k gleiche Wurzeln haben, d. h. man hat

(26) $$4 A_u C_u - B_u^2 = 0.$$

Diese Tangentialgleichung der Kurve kann wiederum angesehen werden als das Ergebnis der Elimination von k aus

(27) $$B_u - 2kA_u = 0, \quad 2C_u - kB_u = 0.$$

Diese Gleichungen stellen aber projektive Reihen in den Tangenten $c_x = 0$, $a_x = 0$ dar. Sie sind auch zu den Büscheln projektiv, und zwar entsprechen den Tangenten ihre Berührungspunkte $A_u = 0$, $C_u = 0$ für $k = \infty$ bez. $k = 0$.

Demnach ist das Erzeugnis zweiter Ordnung zweier projektiver Strahlenbüschel auch ein Erzeugnis zweiter Klasse zweier projektiver Punktreihen (vgl. Nr. 281 ff.).

Aber diese Erzeugung liefert unmittelbar auch *die allgemeinste Parametermethode.* Denn nach Nr. 291 können wir je zwei homogene Parameter λ, μ einführen mit Hilfe der Definitionen

$$\varrho a_x = \lambda^2 = \varrho' C_u, \quad \varrho b_x = \lambda\mu = -\tfrac{1}{2}\varrho' B_u, \quad \varrho c_x = \mu^2 = \varrho' A_u,$$

wobei ϱ und ϱ' Proportionalitätsfaktoren bedeuten.

Durch Auflösung folgt

(28) $$\begin{cases} \varrho \Delta x_i = A_i \lambda^2 + B_i \lambda\mu + C_i \mu^2, \\ \varrho' \Delta u_i = a_i \mu^2 - 2b_i \lambda\mu + c_i \lambda^2, \quad (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Diese x_i, u_i sind aber allgemeine quadratische Funktionen der Parameter λ, μ. *Daher stellen umgekehrt drei quadratische*

Formen zweier unabhängiger Veränderlicher, deren Werte als Punkt- oder Linienkoordinaten gedeutet werden, Punkte oder Tangenten einer Kurve zweiten Grades dar.[48])

Die vorstehenden Definitionen, deren kleine Unterschiede zu beachten sind, sind so gewählt, daß *dieselben Parameterwerte je Punkt und zugehörige Tangente* charakterisieren. Man überzeugt sich leicht, daß infolge der Determinanteneigenschaften $\Sigma u_i x_i$ bei Einsetzung der Parameterausdrücke identisch verschwindet.

B. 1) Ist eine Kurve zweiter Ordnung durch

$$\varrho x_1 = a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda \mu + a_2 \mu^2, \quad \varrho x_2 = b_0 \lambda^2 + b_1 \lambda \mu + b_2 \mu^2,$$
$$\varrho x_3 = c_0 \lambda^2 + c_1 \lambda \mu + c_2 \mu^2$$

gegeben, so lautet ihre Gleichung

$$(A_0 x_1 + B_0 x_2 + C_0 x_3)(A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3) -$$
$$(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3)^2 = 0.$$

Hierbei sind $A_0, B_0, C_0, A_1, ..$ die Unterdeterminanten der Elemente $a_0, b_0, c_0, a_1, ..$ der aus den neun Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, (i = 1, 2, 3)$ gebildeten Determinante dritten Grades.

2) Die Tangente des dem Parameterpaar $\lambda \mid \mu$ zugehörigen Punktes hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2a_0\lambda + a_1\mu & 2b_0\lambda + b_1\mu & 2c_0\lambda + c_1\mu \\ a_1\lambda + 2a_2\mu & b_1\lambda + 2b_2\mu & c_1\lambda + 2c_2\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Man bilde die Gleichung der Verbindungslinie der durch $\lambda \mid \mu$ und $\lambda' \mid \mu'$ gegebenen Punkte; für *benachbarte* Parameterwerte bieten sich Reduktionen, die zu der verlangten Tangentengleichung führen.

3) Man bestimme die Gleichung eines Kegelschnittes, der mit zwei anderen $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ je eine doppelte Berührung hat.

Bezeichnen wir durch $u_x = 0$, $v_x = 0$ ein Paar der Schnittsehnen von $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$, so daß $f(x, x) - \varkappa g(x, x) \equiv u_x v_x$ ist, so stellt $\mu^2 u_x^2 - 2\mu\{f(x, x) + \varkappa g(x, x)\} + v_x^2 = 0$ für beliebige Werte von μ ein System von Kegelschnitten dar, die mit $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ eine doppelte Berührung haben. Denn diese Gleichung hat die beiden äquivalenten Formen

$$(\mu u_x + v_x)^2 - 4\mu f(x, x) = 0, \quad (\mu u_x - v_x)^2 - 4\mu\varkappa g(x, x) = 0.$$

Die Berührungssehnen $\mu u_x \pm v_x = 0$ bilden mit den Schnittsehnen $u_x = 0$, $v_x = 0$ ein harmonisches Büschel.

Da die Gleichung in μ vom zweiten Grade ist, so gehen durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte des Systems, und weil es überdies drei Paare von Schnittsehnen der beiden Kegelschnitte gibt, so gibt es auch drei solche Systeme von Kegelschnitten. Ihre Anzahl reduziert sich auf zwei, wenn der Kegelschnitt $g(x, x) = 0$ in ein Paar von Geraden ausartet, weil dann nur zwei von diesen verschiedenen Paaren von Schnittsehnen vorhanden sind. Wenn endlich sowohl $f(x, x) = 0$ als auch $g(x, x) = 0$ in Geradenpaare ausarten, so gibt es, wie bekannt, nur *ein* System doppelt berührender Kegelschnitte.

4) Die Gleichung eines Kegelschnittes, der vier Geraden $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ berührt, lautet, falls $y_1 y_3 - y_2 y_4 \equiv z_1 z_2 = 0$ die Gleichung der Diagonalen des Vierseits ist,

$$\mu^2 z_1^2 - 2\mu(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 = 0.$$

Setzt man nacheinander die y_i gleich Null, so erhält man die Berührungspunkte der Seiten und sieht, daß ihre Verbindungslinien mit den Diagonalen ein harmonisches Büschel bilden (vgl. 3). Ein durch diese Berührungspunkte gehender Kegelschnitt hat eine Gleichung von der Form

$$\mu^2 z_1^2 - 2\mu(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 + \lambda(\mu^2 z_1^2 - z_2^2) = 0,$$

und die den Werten μ' und λ' entsprechende Gleichung wird mit dieser identisch für $\lambda = -\lambda' = (\mu' - \mu) : (\mu' + \mu)$.

Hiernach gibt es einen durch die acht Berührungspunkte von zwei solchen eingeschriebenen Kegelschnitten gehenden Kegelschnitt, der die Gleichung hat

$$\mu\mu' z_1^2 - (\mu + \mu')(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 = 0.$$

Wenn man das Diagonalendreieck des Vierseits zum Fundamentaldreieck $x_1 x_2 x_3 = 0$ wählt, wobei nun $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ der Reihe nach die Seiten $y_i = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, des Vierseits darstellen, so erhält man die Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnittes in der Form

$$\mu^2 x_1^2 - \mu(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + x_2^2 = 0.$$

(Es ist $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 2(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$, $y_1 y_3 - y_2 y_4 = 4x_1 x_2$, $z_1 = 2x_1$, $z_2 = 2x_2$). Dieses System von Kegelschnitten hat in der Tat zur Hüllkurve

$$(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)^2 = 4x_1^2 x_2^2 \qquad \text{oder}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - x_3) = 0.$$

Die Gleichung des Systems kann mit Hilfe von $\cos^2\varphi = 1 : (1 - \mu)$

in der Form geschrieben werden

$$x_3^2 = \frac{x_1^2}{\cos^2\varphi} + \frac{x_2^2}{\sin^2\varphi} \quad \text{(vgl. Nr. 299).}$$

5) Die Gleichung eines Kegelschnittes, der mit zwei durch die Normalformen $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ ihrer Gleichungen gegebenen Kreisen je eine doppelte Berührung hat,[49]) nimmt eine einfachere Form an, nämlich

$$\mu^2 - 2\mu(k_1 + k_2) + (k_1 - k_2)^2 = 0.$$

Die Berührungssehnen des Kegelschnittes mit den beiden Kreisen sind durch $k_1 - k_2 + \mu = 0$, $k_1 - k_2 - \mu = 0$ dargestellt und daher zueinander parallel und gleich entfernt von der Potenzlinie der Kreise. Da man die Gleichung dieses doppelt berührenden Kegelschnittes auch in der Form

$$\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2} = \sqrt{\mu}$$

schreiben kann, so ist er der Ort eines Punktes, für den die Summe oder Differenz der Tangenten zu zwei gegebenen Kreisen konstant ist. Denken wir beide Kreise als unendlich klein, so erhalten wir die Eigenschaft der Brennpunkte des Kegelschnittes rücksichtlich der Summe und Differenz der Brennstrahlen. Nehmen wir μ dem Quadrate des Abschnittes gleich, der zwischen den beiden Kreisen auf einer ihrer gemeinschaftlichen Tangenten liegt, so bezeichnet die Gleichung ein Paar der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise (Nr. 128).

6) Nach dieser Methode sind die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise in

Nr. 117, 1) $\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2} = 4$ oder $= 2$,

Nr. 118, 1) $\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2} = 1$ oder $= \sqrt{-79}$.

7) Drei Kreise sind gegeben durch $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$; sind dann $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ die gemeinschaftlichen Tangenten zu $k_2 = 0$, $k_3 = 0$; ebenso $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ die zu $k_3 = 0$, $k_1 = 0$, und $x_3 = 0$, $y_3 = 0$ die zu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$; gehen ferner $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ durch einen Punkt, so gehen auch $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ durch einen Punkt.

Denn sind die Gleichungen der Paare gemeinsamer Tangenten

$$\sqrt{k_2} + \sqrt{k_3} = t_1, \quad \sqrt{k_3} + \sqrt{k_1} = t_2, \quad \sqrt{k_1} + \sqrt{k_2} = t_3,$$

so ist die Bedingung, unter der sich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ in einem Punkte schneiden, $t_1 \pm t_2 = t_3$, und man sieht, daß mit der Erfüllung dieser Bedingung sich auch $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ in einem Punkte schneiden müssen.

8) Daran knüpft sich die Lösung des *Problems von Malfatti: Drei Kreise zu bestimmen, die einander berühren, und deren jeder zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks zu Tangenten hat.*

Steiner gab die Lösung: Man zeichne die eingeschriebenen Kreise der Dreiecke, die von je einer Seite des gegebenen Dreiecks und den Halbierungslinien der anliegenden Winkel gebildet werden; da diese Kreise drei gemeinschaftliche Tangenten haben, die durch einen Punkt gehen, so gehen auch ihre zugehörigen andern gemeinschaftlichen Tangenten durch einen Punkt. Diese sind die gemeinschaftlichen Tangenten der gesuchten Kreise.[50]).

9) Der Satz von 8) läßt sich auf Kegelschnitte übertragen, die einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren.

Drei Kegelschnitte $f(x, x) - z_1^2 = 0$, $f(x, x) - z_2^2 = 0$, $f(x, x) - z_3^2 = 0$, die einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, werden von drei gemeinschaftlichen Sehnen, die ein Dreieck bilden, wie $z_1 + z_2 = 0$, $z_2 + z_3 = 0$, $z_3 + z_1 = 0$ in sechs Punkten geschnitten, die auf einem Kegelschnitt liegen. Denn es ist

$$f(x, x) + z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = (f(x, x) - z_1^2) + (z_1 + z_2)(z_1 + z_3).$$

Liegen also von jenen Punkten drei in einer Geraden, so liegen die andern gleichfalls in einer Geraden. Die Deutung der Gleichungen in Linienkoordinaten gibt einen weiteren Satz. Mit Hilfe dieser Sätze kann das Malfattische Problem und seine Lösung von den Kreisen auf Kegelschnitte übertragen werden, die mit einem gegebenen Kegelschnitt in doppelter Berührung sind.

313. **Tangentenpaare.** In gleicher Weise wie in Nr. 147 bei Benutzung von Cartesischen Koordinaten gezeigt wurde, folgt auch bei Verwendung projektiver Dreieckskoordinaten, daß das von einem Punkte y_i an die Kurve zweiter Ordnung $f(x, x) = 0$ gelegte Tangentenpaar die Gleichung hat

$$f(y, y) \cdot f(x, x) - f^2(x, y) = 0, \tag{29}$$

wobei $f(x, y)$ zur Abkürzung gesetzt ist für

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}f'(y_1)x_1 + \tfrac{1}{2}f'(y_2)x_2 + \tfrac{1}{2}f'(y_3)x_3 \\ &\equiv \tfrac{1}{2}f'(x_1)y_1 + \tfrac{1}{2}f'(x_2)y_2 + \tfrac{1}{3}f'(x_3)y_3. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Gleichung (29) ist auch die Bedingung dafür, daß zwei Punkte x_i und y_i auf einer Tangente von $f(x, x) = 0$ liegen. Die Ausdrücke

$$u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad u_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad u_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{31}$$

stellen also die Koordinaten einer solchen Tangente dar, und es kann daher der Ausdruck (29) von der linken Seite der Gleichung (9), in der die u_i durch ihre Werte (31) zu er-

setzen sind, nur um einen Zahlenfaktor verschieden sein. M findet in der Tat

(32) $$f(y, y)f(x, x) - f^2(x, y)$$
$$\equiv A_{11}(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + \cdots + 2A_{23}(x_3y_1 - x_1y_3)(x_1y_2 - x_2y_1) +$$

Übrigens läßt sich (29) auch in der Form schreiben:

(33) $$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & y_1 & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & y_2 & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & y_3 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dual folgt, daß

(34) $$\varphi(v, v)\varphi(u, u) - \varphi(u, v)^2 = 0$$

die Gleichung des Schnittpunktepaares der Geraden $v_1x_1 + v$ $+ v_3x_3 = 0$ mit der Kurve zweiter Klasse $\varphi(u, u) = 0$ d stellt. Vgl. auch (11) und (11a) in Nr. 309.

B. 1) Man soll durch Umformen und Entwickelung zeig daß die Diskriminante der Gleichung $f(y, y)f(x, x) - f^2(y, x) =$ verschwindet.

2) Ort der Schnittpunkte der zueinander rechtwinkligen T genten eines Kegelschnittes (*Hauptkreis*, vgl. Nr. 167, 6). Norn koordinaten seien vorausgesetzt. Man denke sich die Gleichung (: angeordnet in der Gestalt

$$g(x, x) \equiv b_{11}x_1^2 + \cdots + 2b_{23}x_2x_3 + \cdots = 0$$

und wende auf diese Gleichung die in Nr. 68 abgeleitete Bedingı (12) für die Orthogonalität eines Geradenpaares an. Zu dies Zweck hat man daselbst a_1a_1' zu ersetzen durch $b_{11} = A_{33}$ $+ A_{22}y_3^2 - 2A_{23}y_2y_3$, $a_2a_3' + a_3a_2'$ durch

$$2b_{23} = 2(A_{12}y_1y_3 + A_{13}y_1y_2 - A_{11}y_2y_3 - A_{23}y_1^2).$$

So ergibt sich bei Anordnung nach Potenzen der laufenden] ordinaten y_i:

$$(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos A_1)y_1^2 + \cdots$$
$$+ 2(A_{11}\cos A_1 - A_{23} - A_{12}\cos A_2 - A_{13}\cos A_3)y_2y_3 + \cdots = 0$$

Ist die Gleichung des gegebenen Kegelschnitts auf Cartesis Koordinaten x, y bezogen, also von der Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

so ist die Gleichung des vom Punkt ξ, η an die Kurve geleg Tangentenpaares

$$A_{11}(y-\eta)^2 + A_{22}(x-\xi)^2 + A_{33}(x\eta - y\xi)^2 - 2A_{23}(x-\xi)(x\eta - y\xi)$$
$$+ 2A_{13}(y-\eta)(x\eta - y\xi) - 2A_{12}(x-\xi)(y-\eta) = 0.$$

Die Bedingung der Orthogonalität ergibt daher insbesondere bei *rechtwinkligen Koordinaten* $\xi \mid \eta$ als *Gleichung des Hauptkreises*

$$A_{33}(\xi^2 + \eta^2) - 2A_{13}\xi - 2A_{23}\eta + A_{11} + A_{22} = 0.$$

Für $A_{33} = 0$, d. h. für die Parabel, geht der Hauptkreis in das aus Leitlinie und unendlich ferner Geraden bestehende Geradenpaar über.

3) Die Hauptkreise der Kegelschnitte einer *Schar* $\varphi(u_1, u_2, u_3) - \lambda\chi(u_1, u_2, u_3) = 0$ bilden ein *Büschel.*

Denn als lineare Funktion der Koeffizienten der Gleichung in Linienkoordinaten wird die Gleichung des Hauptkreises durch die Substitution von $\alpha_{ik} - \lambda\beta_{ik}$ für A_{ik} (Nr. 270) auf die Form $k_1 - \lambda k_2 = 0$ gebracht. Die Direktorkreise eines Gewebes $\lambda_1\varphi(u_1, u_2, u_3) + \lambda_2\chi(u_1, u_2, u_3) + \lambda_3\psi(u_1, u_2, u_3) = 0$ bilden ein Netz $\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$ $\lambda_3 k_3 = 0$ (Nr. 122). Insbesondere ergibt sich, daß die über den drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits als Durchmessern beschriebenen Kreise eine gemeinsame Potenzlinie haben. Das umgeschriebene Vierseit der Schar liefert sie für das Büschel der Hauptkreise.[51])

314. **Satz von Carnot.** Schneiden die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 eines Dreiecks einen Kegelschnitt bez. in den Punktepaaren B_1B_1'; B_2B_2'; B_3B_3', so findet die Beziehung statt

$$(35) \qquad \frac{A_2B_1 \cdot A_2B_1'}{A_3B_1 \cdot A_3B_1'} \cdot \frac{A_3B_2 \cdot A_3B_2'}{A_1B_2 \cdot A_1B_2'} \cdot \frac{A_1B_3 \cdot A_1B_3'}{A_2B_3 \cdot A_2B_3'} = 1.$$

Dieser von *Carnot* gefundene Satz läßt sich folgendermaßen leicht beweisen. Haben die Ecken A_1, A_2, A_3 des Dreiecks die Koordinaten x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3, so haben die Schnittpunkte B_3, B_3' des Kegelschnitts mit der Seite A_1A_2 Koordinaten von der Form $y_i + \lambda x_i$, $(i = 1, 2, 3)$, und zwar sind die den Punkten B_3 und B_3' entsprechenden Werte λ_3 und λ_3' nach (2) in Nr. 306 Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(36) \qquad f(y_1, y_2, y_3) + \lambda\{f'(y_1)x_1 + f'(y_2)x_2 + f'(y_3)x_3\}$$
$$+ \lambda^2 f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Es ist dann ferner $\lambda_3 = A_1B_3 : B_3A_2$, $\lambda_3' = A_1B_3' : B_3'A_2$, daher

$$\lambda_3\lambda_3' = \frac{f(y_1, y_2, y_3)}{f(x_1, x_2, x_3)} = \frac{A_1B_3 \cdot A_1B_3'}{A_2B_3 \cdot A_2B_3'}.$$

Analog findet man

$$\frac{f(z_1, z_2, z_3)}{f(y_1, y_2, y_3)} = \frac{A_2 B_1 \cdot A_2 B_1'}{A_3 B_1 \cdot A_3 B_1'} \quad \text{und} \quad \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f(z_1, z_2, z_3)} = \frac{A_3 B_2 \cdot A_3 B_2'}{A_1 B_2 \cdot A_1 B_2'}.$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt sich die gewünschte Gleichung (35).

Dem Carnotschen Satze entspricht dual der folgende Satz von *Chasles*[52]):

Sind a_1, a_2, a_3 die Seiten eines Dreiseits und t_1, t_1'; t_2, t_2'; t_3, t_3' die von seinen Ecken an einen Kegelschnitt gezogenen Tangenten, so findet die Beziehung statt:

$$\text{(37)} \quad \frac{\sin(a_1 t_2)\sin(a_1 t_2')\sin(a_2 t_3)\sin(a_2 t_3')\sin(a_3 t_1)\sin(a_3 t_1')}{\sin(a_3 t_2)\sin(a_3 t_2')\sin(a_1 t_3)\sin(a_1 t_3')\sin(a_2 t_1)\sin(a_2 t_1')} = 1.$$

Diese Sätze umfassen bemerkenswerte Sonderfälle, die in den Beispielen behandelt werden.

B. 1) Wenn von den Seiten des Fundamentaldreiecks im ersten Satze eine, etwa $A_1 A_2$, den Kegelschnitt berührt, so daß ihre Schnittpunkte mit ihm (B_3, B_3') zusammenfallen, so erhält man

$$\frac{A_2 B_1}{A_3 B_1} \frac{A_2 B_1'}{A_3 B_1'} \frac{A_3 B_2}{A_1 B_2} \frac{A_3 B_2'}{A_1 B_2'} \frac{\overline{A_1 B_3}^2}{\overline{A_2 B_3}^2} = 1.$$

Dadurch sind mit der Bestimmung des Verhältnisses $A_1 B_3 : A_2 B_3$ die Berührungspunkte einer gegebenen Geraden mit einem durch vier Punkte gehenden Kegelschnitt bestimmt, deren harmonische Lage zu gewissen gegebenen Elementen offenbar ist.

Läßt man die Ecken des Fundamentaldreiecks auf dem Kegelschnitt liegen oder seine Seiten ihn berühren, so kommt man auf bekannte Sätze zurück (Nr. 302). Wenn einer der Punkte A_i unendlich entfernt gedacht wird, z. B. A_2, so liefert die Gleichung (35) gleichfalls bekannte Sätze, nämlich $\frac{A_1 B_3}{A_1 B_2} \frac{A_1 B_3'}{A_1 B_2'} = \frac{A_3 B_1}{A_3 B_2} \frac{A_3 B_1'}{A_3 B_2'}$, aus denen die Sätze von Nr. 151 hervorgehen; der anderen Beziehung entspringen dual entsprechende Sätze.

2) Wenn von den Ecken des Fundamentaldreiecks im zweiten Satze eine, etwa A_3, dem Kegelschnitt angehört, so fallen die beiden von ihr ausgehenden Tangenten t_3 und t_3' in eine zusammen, und man erhält eine Gleichung

$$\frac{\sin(a_1 t_2)\sin(a_1 t_2')\sin(a_3 t_1)\sin(a_3 t_1')\sin^2(a_2 t_3)}{\sin(a_3 t_2)\sin(a_3 t_2')\sin(a_2 t_1)\sin(a_2 t_1')\sin^2(a_1 t_3)} = 1,$$

die zu den vier Tangenten t_1, t_1', t_2, t_2' und zum Punkte A_3 durch die Werte des Verhältnisses $\sin(a_2 t_3) : \sin(a_1 t_3)$ die Richtung der Tangente in diesem Punkte bestimmt.

3) Der Satz von *Carnot* liefert auch eine Lösung der Aufgabe, den Krümmungskreis in einem gegebenen Punkte B_3 eines Kegelschnittes zu bestimmen, wenn dieser durch die Tangente von B_3 und drei andere Punkte gegeben ist.

Sind B_2, B_2', B_3 drei Punkte des Kegelschnittes, die wir später in B_3 zusammenrücken lassen, und sind B_3', B_1, B_1' drei andere Punkte des Kegelschnittes, so besteht für den Schnitt K des durch B_2, B_2', B_3 gehenden Kreises mit der Geraden A_1A_2 die Gleichung

$$A_1B_3 \cdot A_1K = A_1B_2' \cdot A_1B_2, \quad \text{also} \quad A_1K = A_1B_2 \cdot A_1B_2' : A_1B_3,$$

daher ist nach dem Satze von Carnot

$$A_1K = A_1B_3' \cdot \frac{A_2B_1}{A_3B_1} \frac{A_2B_1'}{A_3B_1'} \frac{A_3B_2}{A_2B_3} \frac{A_3B_2'}{A_2B_3'}.$$

Beim Zusammenrücken von B_2, B_2', B_3, wobei A_1 und B_3 auf der Kurve zusammenfallen, gibt B_2B_2' die zugehörige Tangente und es wird

$$A_1K = A_1B_3' \cdot \frac{A_2B_1}{A_3B_1} \frac{A_2B_1'}{A_3B_1'} \frac{\overline{A_3A_1}^2}{A_2A_1 \cdot A_2B_3'}.$$

Der so gefundene Punkt K bestimmt den Krümmungskreis.

Ist der Punkt A_3 unendlich entfernt, so reduziert sich dies auf

$$A_1K = A_1B_3' \cdot \frac{A_2B_1}{A_2A_1} \frac{A_2B_1'}{A_2B_3'},$$

und wenn überdies A_2, der Schnittpunkt der Sehnen A_1B_3', B_1B_1', die Mitte von beiden ist, so wird $|A_1K| = 2 \cdot \overline{A_2B_1}^2 : |A_2A_1|$. Hierbei deuten die senkrechten Striche an, daß die absoluten Werte der Längen der Strecken A_1K und A_2A_1 zu nehmen sind. Für ϱ als den Halbmesser des Kreises und A_1D als seinen zur Tangente in A_2 rechtwinkligen Durchmesser hat man $A_1K = 2\varrho \cdot \cos KA_1D$, d. h. $p\varrho = \overline{A_2B_1}^2$, wenn p die senkrechte Entfernung des Punktes A_2 von der Tangente in A_1 ist.

4) Die Vereinigung der Sätze von Carnot und Chasles liefert ferner den Satz: Wenn die drei Seiten eines Dreiecks einen Kegelschnitt schneiden, so sind die sechs Geraden, die die Schnittpunkte mit den bez. Gegenecken verbinden, Tangenten eines Kegelschnittes und als besonderen Fall: Die Geraden, die von zwei festen Punkten nach den Ecken eines Dreiecks gezogen werden können, schneiden die bez. Gegenseiten desselben in sechs Punkten eines Kegelschnittes.[53])

5) Drei Paare von Punkten auf den Diagonalen eines Vierseits, die zu den bezüglichen Endpunkten konjugiert harmonisch liegen, sind sechs Punkte eines Kegelschnittes (Nr. 304, 3).

Die Geraden EAB und EDC seien das eine Paar von Gegenseiten des Vierseits, FAD und FBC das andere Paar; die Dia-

ziehen kann, hat man für $u_x = 0$ nur die Gleichung der unendlich fernen Geraden zu nehmen (Nr. 317).

2) Dreht sich ein rechter Winkel um seinen im Punkte P_0 eines Kegelschnitts befindlichen Scheitel, so geht die Verbindungslinie der zwei anderen Punkte, in denen die Schenkel des Winkels die Kurve noch schneiden, durch einen Punkt Q der Normale von P (Satz von *Frégier*).

Wir gebrauchen rechtwinklige Koordinaten $x|y$ und bilden wie oben die Gleichung der Verbindungslinien des gegebenen Punktes $P_0(x_0|y_0)$ mit den Schnittpunkten des Kegelschnittes und der Geraden $ux + vy + 1 = 0$. Diese Verbindungslinien sind rechtwinklig zueinander, wenn (Nr. 58) in ihrer Gleichung die Summe der Koeffizienten von x^2 und y^2 verschwindet; daraus entspringt, falls die Gleichung des Kegelschnitts in der Form $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ angenommen wird, die Bedingung

$$(ux_0 + vy_0 + 1)(a_{11} + a_{22}) = 2(a_{11}ux_0 + a_{22}vy_0).$$

Da u, v in dieser Gleichung im ersten Grade vorkommen, so geht die Sehne immer durch einen festen Punkt Q, nämlich durch

$$\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}} x_0 \,\Big|\, \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} + a_{22}} y_0 .$$

Wenn der Punkt P_0 die Kurve durchläuft, beschreibt Q einen neuen Kegelschnitt.

Ist der an dem gegebenen Punkt P_0 gespannte Winkel kein rechter, oder liegt der gegebene Punkt nicht in der Kurve, so umhüllt die Sehne einen Kegelschnitt. (Nr. 292.)

316. **Schnittpunkte mit einer Geraden.** In Nr. 306 und Nr. 132 wurde das Paar der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit der Verbindungsgeraden zweier Punkte x_i', x_i'' bestimmt; wir wollen nun *die Schnittpunkte einer durch die allgemeine Gleichung gegebenen Geraden mit einem durch die allgemeine Gleichung bestimmten Kegelschnitt* ermitteln und zwar auf andere Art als in Nr. 309.

Bei Anwendung der Bezeichnung f_i für $\frac{1}{2}f'(x_i)$, $(i = 1,2,3)$ ist $\Sigma x_i f_i = 0$ mit $f(x, x) = 0$ identisch, aus der Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung der Geraden $\Sigma v_i x_i = 0$ erhält man

$$(38) \quad x_1 : x_2 : x_3 = (f_2 v_3 - f_3 v_2) : (f_3 v_1 - f_1 v_3) : (f_1 v_2 - f_2 v_1),$$

oder durch Einführung eines zunächst unbestimmten Faktors σ:

$$-\sigma x_1 + f_3 v_2 - f_2 v_3 = 0, \quad -\sigma x_2 + f_1 v_3 - f_3 v_1 = 0,$$
$$-\sigma x_3 + f_2 v_1 - f_1 v_2 = 0,$$

d. h. in entwickelter Form nach den x_i geordnet

$$(39)\quad \begin{cases} x_1(a_{13}v_2 - a_{12}v_3 - \sigma) + x_2(a_{23}v_2 - a_{22}v_3) \\ \qquad\qquad + x_3(a_{33}v_2 - a_{32}v_3) = 0, \\ x_1(a_{11}v_3 - a_{13}v_1) + x_2(a_{12}v_3 - a_{23}v_1 - \sigma) \\ \qquad\qquad + x_3(a_{13}v_3 - a_{33}v_1) = 0, \\ x_1(a_{12}v_1 - a_{11}v_2) + x_2(a_{22}v_1 - a_{12}v_2) \\ \qquad\qquad + x_3(a_{23}v_1 - a_{13}v_2 - \sigma) = 0. \end{cases}$$

Man bestimmt somit bei bekanntem σ die Verhältn der Koordinaten der Schnittpunkte aus drei linearen ho genen Gleichungen.

Zur Berechnung von σ beachte man, daß $Ax_i = A$ $+ A_{i2}f_2 + A_{i3}f_3$; alsdann folgt mit Rücksicht auf (38):

$$(40)\quad \begin{aligned} &\sigma(A_{11}f_1 + A_{21}f_2 + A_{31}f_3) + A(v_3f_2 - v_2f_3) = 0, \\ &\sigma(A_{12}f_1 + A_{22}f_2 + A_{32}f_3) + A(v_1f_3 - v_3f_1) = 0, \\ &\sigma(A_{13}f_1 + A_{23}f_2 + A_{33}f_3) + A(v_2f_1 - v_1f_2) = 0, \end{aligned}$$

woraus nach Elimination der f_1, f_2, f_3 die Gleichung

$$(41)\quad \begin{vmatrix} \sigma A_{11} & \sigma A_{21} + Av_3 & \sigma A_{31} - Av_2 \\ \sigma A_{12} - Av_3 & \sigma A_{22} & \sigma A_{32} + Av_1 \\ \sigma A_{13} + Av_2 & \sigma A_{23} - Av_1 & \sigma A_{33} \end{vmatrix} = 0$$

hervorgeht. Die Ausrechnung dieser Determinante ergibt

$$(42)\quad \sigma A^2(\sigma^2 + F(v, v)) = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma = \pm\sqrt{-F(v, v)}.$$

Nur bei negativem Werte von $F(v, v)$ sind die Schnittpu reell und verschieden; sie fallen zusammen für $F(v, v) =$

Um die Schnittpunkte einer Geraden $v_x = 0$ mit ei Kegelschnitt zu finden, bestimmt man also die Quadratwu aus der mit den Linienkoordinaten v_i geränderten Diskrimin (nach Gleichung (10), S. 124); alsdann hat man nur noch Gleichungen (39) nach $x_1 : x_2 : x_3$ aufzulösen.[54]) Im Falle $\sigma =$ $A \neq 0$ ist die Gerade $v_x = 0$ eine Tangente des Kegelschr mit dem Berührungspunkt $x_1 \mid x_2 \mid x_3$.

Die vorstehenden Betrachtungen liefern nach dem Du tätsprinzip bei Vertauschung der x_i mit den u_i und der mit den α_{ik} die Gleichungen zur Bestimmung der Koo naten u_i der Tangenten, die man von einem gegebenen Pu $y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 = 0$ an die Kurve zweiter Klasse $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ legen kann. An die Stelle von σ tritt alsdann der Ausdr

$\sqrt{-\Phi(y, y)}$, vgl. Nr. 311. Will man diese Tangenten bestimmen, wenn die Gleichung der Kurve in Punktkoordinaten $f(x, x) = 0$ gegeben ist, so hat man erst die Funktion $F(u_1, u_2, u_3)$ zu bilden, die an Stelle von $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ tritt, während σ, also $\sqrt{-\Phi(y, y)}$, nunmehr nach (21), S. 130, durch $\sqrt{-Af(y, y)}$ zu ersetzen ist.

317. **Gattungskriterien.** Dem Vorstehenden zufolge ist die Realität der Lösungen des Gleichungssystems (39) von der Realität der Größe σ abhängig. *Eine reelle Gerade schneidet daher den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ in zwei reellen oder imaginären Punkten, je nachdem das Ergebnis der Substitution ihrer Koordinaten u_i in die linke Seite $F(u_1, u_2, u_3)$ der Tangentialgleichung negativ oder positiv ist.*

Aus der Bemerkung am Ende von Nr. 316 folgt ferner: *Das aus einem reellen Punkte y_i an einen Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ zu ziehende Tangentenpaar ist reell oder imaginär, je nachdem die Ergebnisse der Substitution seiner Koordinaten in $f(x, x)$ und in die Diskriminante A entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.* Damit ist auch das Äußere und Innere der Kurve definiert.

Die Kriterien der Gattung des Kegelschnittes $f(x, x) = 0$ bilden nur den Sonderfall des ersten Satzes für die unendlich ferne Transversale. Sie hängen also davon ab, wie die Koordinaten derselben in dem gegebenen System lauten. Ist $f(x, x) = 0$ in trimetrischen Normalkoordinaten gegeben und bedeuten wieder l_i die Längen der Seiten, A_i die Winkel des Fundamentaldreiecks, *so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die mit den l_i oder* sin A_i *geränderte Diskriminante positiv, Null oder negativ ist.* Sind aber *allgemeine* projektive Koordinaten gegeben mit dem Einheitspunkte E, dessen Abstände von den Seiten des Koordinatendreiecks gleich e_1, e_2, e_3 sind, so hat die unendlich ferne Gerade nach (36) in Nr. 88 die Gleichung

$$(43) \qquad \frac{e_1}{h_1}x_1 + \frac{e_2}{h_2}x_2 + \frac{e_3}{h_3}x_3 = 0;$$

hierbei bezeichnen h_1, h_2, h_3 die Höhen des Koordinatendreiecks. Offenbar kann (43) auch ersetzt werden durch

(43a) $$e_1 l_1 x_1 + e_2 l_2 x_2 + e_3 l_3 x_3 = 0,$$
man hat daher bei Anwendung des vorstehend erwähnten Kriteriums die Determinante der a_{ik} mit den $e_i l_i$ zu rändern. Am einfachsten gestaltet sich dieser Ausdruck bei Flächenkoordinaten, da für diese die unendlich ferne Gerade nach Nr. 88 Einheitslinie ist; *die Gleichung* $f(x, x) = 0$ *stellt alsdann im Falle* $A \neq 0$ *eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse dar, jenachdem die Koeffizientensumme* $A_{11} + A_{22} + A_{33} + 2A_{23} + 2A_{31} + 2A_{12}$ *negativ, Null oder positiv ist.*

B. 1) Die Gleichung
$$(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (a_1, a_2, a_3 \neq 0),$$
stellt, wenn x_1, x_2, x_3 trimetrische Normalkoordinaten bedeuten, eine *Parabel* dar, falls
$$\frac{a_1}{l_1} + \frac{a_2}{l_2} + \frac{a_3}{l_3} = 0.$$

2) Man soll den Ort des Brennpunktes der Schar von Parabeln bestimmen, die die Seiten des Fundamentaldreiecks berühren.

Ist der Punkt y_i der eine Brennpunkt irgend eines eingeschriebenen Kegelschnittes und sind daher $y_2 x_3 - y_3 x_2 = 0$, $y_3 x_1 - y_1 x_3 = 0$, $y_1 x_2 - y_2 x_1 = 0$ die Gleichungen der Verbindungsgeraden desselben mit den Ecken des Fundamentaldreiecks, so sind die Verbindungsgeraden derselben Ecken mit dem andern Brennpunkte solche Geraden, die mit den Seiten des Dreiecks die nämlichen Winkel bilden (Nr. 188). Ihre Gleichungen lauten also in Normalkoordinaten $y_2 x_2 - y_3 x_3 = 0$, $y_3 x_3 - y_1 x_1 = 0$, $y_1 x_1 - y_2 x_2 = 0$, und man kann daher für die Koordinaten des andern Brennpunktes die reziproken Werte der y_i nehmen.[55]) Wenn also die Gleichung des Ortes gegeben ist, den der eine Brennpunkt durchläuft, so kann daraus sofort die Gleichung des Ortes gebildet werden, den der zweite beschreibt.

Wenn insbesondere der eine in der unendlich fernen Geraden $l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$ bleibt, so durchläuft der andere den dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kreis (vgl. Nr. 302, 3)
$$\frac{l_1}{x_1} + \frac{l_2}{x_2} + \frac{l_3}{x_3} = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma \frac{\sin A_i}{x_i} = 0.$$

Die Normalkoordinaten des unendlich entfernten Brennpunktes der Parabel sind nach der Beziehung in 1) durch $\frac{a_1}{l_1^2} \Big| \frac{a_2}{l_2^2} \Big| \frac{a_3}{l_3^2}$ dargestellt, weil diese Werte den beiden Gleichungen
$$\Sigma l_i x_i = 0, \quad \Sigma (a_i x_i)^{\frac{1}{2}} = 0$$
genügen; daher sind die Koordinaten des in endlicher Entfernung gelegenen Brennpunktes die Reziproken $l_i^2 : a_i$ für $i = 1, 2, 3$

3) Die Gleichung der Leitlinie dieser Parabel zu bestimmen.

Wir finden nach Nr. 307 als Gleichung der Polare des eben genannten Brennpunktes

$$a_1 x_1 (l_2^2 + l_3^2 - l_1^2) + a_2 x_2 (l_3^2 + l_1^2 - l_2^2) + a_3 x_3 (l_1^2 + l_2^2 - l_3^2) = 0$$

oder $\quad a_1 x_1 l_2 l_3 \cos A_1 + a_2 x_2 l_3 l_1 \cos A_2 + a_3 x_3 l_1 l_2 \cos A_3 = 0.$

Wenn man für a_3 den aus 1) entspringenden Wert einträgt, so wird diese Gleichung in

$$a_1 l_2 l_3 (x_1 \cos A_1 - x_3 \cos A_3) + a_2 l_3 l_1 (x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3) = 0$$

übergeführt und dies zeigt, daß die Leitlinie stets durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks geht. (Vgl. Nr. 65, 3 und Nr. 213, 1).

4) Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar (Nr. 300, 8).

Wenn wir die vier gemeinschaftlichen Tangenten durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ darstellen und zwar mit der identischen Beziehung (Nr. 304) $\Sigma x_i = 0$, so muß diese nicht nur durch die Koordinaten des einen Brennpunktes $z_1 \mid z_2 \mid z_3 \mid z_4$, sondern auch durch die des andern, d. h. ihre reziproken Werte, erfüllt werden. Der fragliche Ort ist daher eine Kurve dritter Ordnung mit der Gleichung

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0.$$

318. **Mittelpunkt und Durchmesser.** Die projektiven Koordinaten $c_1 \mid c_2 \mid c_3$ des Mittelpunktes der Kurve $f(x, x) = 0$ lassen sich leicht bestimmen, wenn man beachtet, daß dieser Punkt der Pol der unendlich fernen Geraden ist, die nach (43a) die Gleichung hat:

$$(44) \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0, \quad \text{wo} \quad p_i = e_i l_i, \; i = 1, 2, 3.$$

Nach (8), S. 123, folgt daher

$$(45) \qquad c_1 : c_2 : c_3 = (A_{11} p_1 + A_{12} p_2 + A_{13} p_3)$$
$$: (A_{21} p_1 + A_{22} p_2 + A_{23} p_3) : (A_{31} p_1 + A_{32} p_2 + A_{33} p_3).$$

Als Bedingung dafür, daß eine Gerade v_i ein Durchmesser des Kegelschnittes sei, ergibt sich offenbar

$$(46) \quad (A_{11} p_1 + A_{12} p_2 + A_{13} p_3) v_1 + (A_{21} p_1 + A_{22} p_2 + A_{23} p_3) v_2$$
$$+ (A_{31} p_1 + A_{32} p_2 + A_{33} p_3) v_3 = 0.$$

Die Gleichung des zu der Richtung einer gegebenen Geraden $v_x = 0$ *konjugierten Durchmessers* erhält man als Polare des in der Richtung von $v_x = 0$ im Unendlichen gelegenen Pols. Als Schnittpunkt von $v_x = 0$ mit $p_x = 0$ hat dieser Pol die Koordinaten $v_2 p_3 - v_3 p_2 \mid v_3 p_1 - v_1 p_3 \mid v_1 p_2 - v_2 p_1$, die Glei-

chung des gesuchten konjugierten Durchmessers ist daher im laufenden Koordinaten x_1, x_2, x_3:

$$f'(x_1)(v_2p_3 - v_3p_2) + f'(x_2)(v_3p_1 - v_1p_3) + f'(x_3)(v_1p_2 - v_2p_1) = 0. \tag{47}$$

Allgemein ergeben sich die Bedingungen dafür, daß zwei Geraden v_i, w_i konjugierte Durchmesser seien, indem man ausdrückt, daß beide Geraden durch den Mittelpunkt c_i der Kurve gehen und konjugierte Polaren sind; die gewünschten Bedingungen sind daher (vgl. Nr. 309)

$$\left\{\begin{aligned} & c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0, \quad c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 = 0 \quad \text{und} \\ & (A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3)w_1 + (A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3)w_2 \\ & \qquad + (A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3)w_3 = 0. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Sollen die Geraden $v_x = 0$ und $w_x = 0$ das *Achsenpaar* darstellen, so tritt zu den Gleichungen (48) noch die Bedingung der Orthogonalität. Für die jetzt vorliegenden allgemeinen projektiven Koordinaten ergibt sie sich aus der in Gleichung (12) von Nr. 68 angegebenen Bedingung für Normalkoordinaten durch Division der dort vorkommenden Koeffizienten a_i und a_i' durch die e_i. Sie lautet also

$$\frac{v_1w_1}{e_1^2} + \frac{v_2w_2}{e_2^2} + \frac{v_3w_3}{e_3^2} - \frac{(v_2w_3 + v_3w_2)}{e_2e_3}\cos A_1 - \frac{(v_3w_1 + v_1w_3)}{e_3e_1}\cos A_2 - \frac{(v_1w_2 + v_2w_1)}{e_1e_2}\cos A_3 = 0. \tag{49}$$

Die Gleichung des *Asymptotenpaares* ergibt sich aus der durch (33), S. 136, gegebenen Gleichung des Tangentenpaares, das aus einem Punkt y_i an die Kurve gelegt werden kann, wenn man daselbst die y_i durch die Koordinaten c_i des Mittelpunktes der Kurve ersetzt. Man erhält also zunächst

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & c_1 & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & c_2 & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c_3 & x_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{50}$$

wo c_i durch $A_{i1}p_1 + A_{i2}p_2 + A_{i3}p_3$ zu ersetzen ist. Wenn man alsdann bei dieser Determinante die drei ersten Zeilen bez. mit p_1, p_2, p_3 multipliziert und von der vierten Zeile sub-

trahiert, und wenn man in gleicher Weise mit den drei ersten und mit der vierten Spalte verfährt, so folgt

$$(51)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -F(p,p) & -p_x \\ x_1 & x_2 & x_3 & -p_x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hier ist nun zu beachten, daß die Unterdeterminante des Elementes A_{ik} in der aus den A_{ik} gebildeten Determinante *dritten* Grades gleich $A a_{ik}$ ist; die Berechnung von (51) ergibt alsdann

$$AF(p, p)f(x, x) - A^2(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 = 0$$

oder nach Wegheben des Faktors A:

$$(52)\qquad F(p, p)f(x, x) - A(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 = 0.$$

319. **Kreisgleichung und imaginäres Kreispunktepaar in trimetrischen Linienkoordinaten.** Sind s_1, s_2, s_3 die Abstände eines Punktes P von den Seiten des Fundamentaldreiecks, so kann nach Nr. 67 die Gleichung einer jeden Geraden der Ebene in die Form $u_1 s_1 + u_2 s_2 + u_3 s_3 = 0$ gebracht werden, und der Abstand eines beliebigen Punktes $P'(s_1' | s_2' | s_3')$ von dieser Geraden ist nach (15), S. 130 in Teil I:

$$(53)\qquad (u_1 s_1' + u_2 s_2' + u_3 s_3') : \sqrt{\omega(u_1, u_2, u_3)},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$(54)\qquad \omega(u_1, u_2, u_3) \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ - 2u_2u_3 \cos A_1 - 2u_3u_1 \cos A_2 - 2u_1u_2 \cos A_3.$$

Will man in (53) statt der s_i' Zahlen y_i' einführen, die den s_i' proportional sind, so muß dies nach Teil I, S. 133, mit Hilfe der Gleichungen

$$(55)\qquad s_i' = \frac{M y_i}{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

geschehen, in denen M den doppelten Inhalt des Fundamentaldreiecks bedeutet; l_1, l_2, l_3 sind die Längen seiner Seiten. Setzt man den Quotienten (53) gleich ϱ, so ist

$$(56)\qquad \varrho = \frac{M(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3)}{\pm (l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3)\sqrt{\omega(u_1, u_2, u_3)}}$$

der Ausdruck für den Abstand des Punktes y_i von der Geraden u_i, und wenn man statt der Seitenlängen die Höhe des Dreiecks durch $l_i = M : h_i$ einführt, geht aus (56) die Gleichung

(57)
$$(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3)^2$$
$$= \varrho^2 \left(\frac{y_1}{h_1} + \frac{y_2}{h_2} + \frac{y_3}{h_3}\right)^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 2 u_2 u_3 \cos A_1 - \cdot \cdot)$$

hervor. Dies ist in Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 die Gleichung eines Kreises, der durch seinen Radius ϱ und die trimetrischen Normalkoordinaten y_i seines Mittelpunktes gegeben ist, denn sie drückt aus, daß das Quadrat des Abstandes des Punktes y_i von der Geraden u_i gleich ϱ^2 ist. Hierbei sind die Linienkoordinaten u_i $(i = 1, 2, 3)$ proportional den Quotienten $\pi_i : h_i$, falls die π_i die Abstände der Geraden $u_x = 0$ von den Ecken des Fundamentaldreiecks bedeuten. Nach Nr. 87 sind nämlich die u_i proportional den Quotienten $\pi_i : \varepsilon_i$, wenn man mit ε_i die Abstände der Einheitslinie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ von den Ecken des Fundamentaldreiecks bezeichnet; für diese findet man aber mit Hilfe von (56):

(58)
$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = h_1 : h_2 : h_3 .$$

Die Diskriminante der Funktion $\omega(u_1, u_2, u_3)$, nämlich

(59) $1 - 2 \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 - \cos^2 A_1 - \cos^2 A_2 - \cos^2 A_3$,

verschwindet, weil $A_1 + A_2 + A_3 = \pi$ ist; daher zerfällt $\omega(u_1, u_2, u_3)$ in zwei lineare Faktoren z_u' und z_u'', deren jeder, gleich Null gesetzt, einen Punkt darstellt. Mit Rücksicht auf S. 80 folgt also, daß diese beiden Punkte die Berührungspunkte der vom Kreismittelpunkt y_i an den Kreis gelegten Tangenten (Asymptoten), also *die beiden imaginären Kreispunkte* sind.

Die Zerlegung der Funktion $\omega(u_1, u_2, u_3)$ in ihre beiden Faktoren ergibt

(60)
$$\omega(u_1, u_2, u_3)$$
$$= (- u_1 + u_2 e^{iA_3} + u_3 e^{-iA_2})(- u_1 + u_2 e^{-iA_3} + u_3 e^{iA_2}) = 0,$$

für die trimetrischen Normalkoordinaten $z_1' | z_2' | z_3'$ und $z_1'' | z_2'' | z_3''$ der beiden imaginären Kreispunkte bestehen daher die Beziehungen

(61)
$$z_1' : z_2' : z_3' = -1 : e^{iA_3} : e^{-iA_2}$$
$$\text{und} \quad z_1'' : z_2'' : z_3'' = -1 : e^{-iA_3} : e^{iA_2},$$

wofür nach Erweiterung durch e^{-iA_3} sowie mit Rücksicht auf $A_1 + A_2 + A_3 = \pi$ und $e^{i\pi} = -1$ auch

(62)
$$z_1' : z_2' : z_3' = e^{-iA_3} : -1 : e^{iA_1}$$
$$\text{und} \quad z_1'' : z_2'' : z_3'' = e^{iA_3} : -1 : e^{-iA_1}$$

gesetzt werden kann.

B. 1) Eine Gleichung von der Form
$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3) - k \cdot \omega(u_1, u_2, u_3) = 0$$
stellt einen Kegelschnitt mit den Brennpunkten α_i und β_i dar; sie sagt überdies aus, daß bei jedem Kegelschnitt das Produkt der Abstände irgend einer Tangente von den beiden Brennpunkten konstant ist.

Da $\omega(u_1, u_2, u_3)$ in das Produkt $z_u' \cdot z_u''$ zerlegbar ist, sagt die gegebene Gleichung aus, daß der Kegelschnitt dem durch die Verbindungslinien $\alpha z'$, $\alpha z''$, $\beta z'$ und $\beta z''$ gebildeten Vierseit eingeschrieben ist. Die Punkte α und β sind daher als Schnittpunkte der von den imaginären Kreispunkten an den Kegelschnitt gelegten Tangenten die Brennpunkte (vgl. Nr. 181). Daß das Produkt der Abstände einer Tangente von den beiden Brennpunkten konstant ist, folgt aus Formel (56) für den Abstand eines Punktes von einer Geraden $u_x = 0$. Vgl. hierzu auch Nr. 188 und 299, 4.

320. **Die Gleichung des Kreises in trimetrischen Normalkoordinaten** ergibt sich sofort aus der Formel für das Quadrat d^2 des Abstandes zweier Punkte, die durch ihre trimetrischen Normalkoordinaten gegeben sind (Gleichung 28 in Nr. 74). Ersetzt man in ihr die s_i' und s_i'' durch die x_i und y_i, d durch ϱ, so drückt sie aus, daß der Abstand eines veränderlichen Punktes P mit den Koordinaten x_i von einem festen Punkt y_i konstant gleich ϱ sei. Die Gleichung des Kreises vom Radius ϱ und mit dem Mittelpunkt y_i lautet daher:

$$(63)\qquad \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_3 & -\cos A_2 & y_1 & x_1 \\ -\cos A_3 & 1 & -\cos A_1 & y_2 & x_2 \\ -\cos A_2 & -\cos A_1 & 1 & y_3 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$- \varrho^2 \frac{(l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3)^2 (l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3)^2}{(l_1 l_2 l_3)^2} = 0.$$

Die hier auftretende Determinante fünften Grades entsteht, indem man die Determinante dritten Grades, die der durch (54) definierten Funktion $\omega(u_1, u_2, u_3)$ zugehört, mit den y_i und den x_i rändert. Wir wollen die Koeffizienten dieser Funktion mit ω_{ik} bezeichnen, so daß also $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 1$, $\omega_{23} = -\cos A_1$, $\omega_{31} = -\cos A_2$, $\omega_{12} = -\cos A_3$ ist; ferner soll

für die eben erwähnte Determinante fünften Grades das Symbol

(64) $$\begin{pmatrix} y & x \\ y & x \end{pmatrix}_{\omega_{ik}}$$

benutzt werden.

Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y & x \\ y & x \end{pmatrix}_{\omega_{ik}} = 0$$

stellt dann offenbar einen Kreis vom Radius 0 und mit dem Mittelpunkt y_i dar, oder, in anderer Auffassung, das durch diesen Punkt gelegte *zirkulare Geradenpaar* (Nr. 103). Es folgt dies auch daraus, daß sich die Gleichung (64) aus der Gleichung $\omega(u_1, u_2, u_3) = 0$ des imaginären Kreispunktepaares ergibt, wenn man in ihr die u_i durch die Koordinaten $y_3 x_2 - y_2 x_3$, $y_1 x_3 - y_3 x_1$, $y_2 x_1 - y_1 x_2$ einer durch den Punkt y_i gehenden Geraden ersetzt.

Bei *allgemeinen* projektiven Koordinaten ist übrigens

$$\omega_{ii} = 1 : e_i^2, \quad \omega_{23} = -\frac{\cos A_1}{e_2 e_3}, \; . \; , \; \omega_{12} = -\frac{\cos A_3}{e_1 e_2}.$$

321. **Wann ist $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung eines Kreises?** Dies ist nach Nr. 103 dann der Fall, wenn die Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ durch die imaginären Kreispunkte geht, wenn also $\omega(u_1, u_2, u_3) = 0$ gleichbedeutend ist mit dem Ausdruck für die Schnittpunkte der unendlich fernen Geraden $p_x = 0$ und der Kurve. Dieses Schnittpunktepaar hat nach (11), S. 124 die Gleichung

(65) $$s(u_1, u_2, u_3) \equiv a_{11}(p_2 u_3 - p_3 u_2)^2 + \cdots \\ + 2 a_{23}(p_3 u_1 - p_1 u_3)(p_1 u_2 - p_2 u_1) + \cdots = 0,$$

bei der der Koeffizient von $u_i u_k$ durch s_{ik} bezeichnet werden möge. Alsdann ist

(66) $$\begin{cases} s_{11} = a_{22} p_3^2 + a_{33} p_2^2 - 2 a_{23} p_2 p_3, \\ s_{23} = a_{12} p_1 p_3 + a_{13} p_1 p_2 - a_{11} p_2 p_3 - a_{23} p_1^2, \end{cases}$$

während die übrigen s_{ik} aus den hier angegebenen durch zyklische Vertauschung der Indizes hervorgehen. Infolge der Forderung, daß $s(u_1, u_2, u_3) = 0$ mit $\omega(u_1, u_2, u_3) = 0$ gleichbedeutend sein soll, ergeben sich die Bedingungen für den Kreis sofort in der Gestalt

(67) $$\frac{s_{11}}{\omega_{11}} = \frac{s_{22}}{\omega_{22}} = \frac{s_{33}}{\omega_{33}} = \frac{s_{23}}{\omega_{23}} = \frac{s_{31}}{\omega_{31}} = \frac{s_{12}}{\omega_{12}}.$$

Diese Gleichungen sind natürlich nicht voneinander unabhängig, da ja nur zwei Bedingungen zu erfüllen sind, wenn $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ einen Kreis darstellen soll; vielmehr bestehen die drei Beziehungen

(68) $$s_{i1}p_1 + s_{i2}p_2 + s_{i3}p_3 = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

irgend zwei aus (67) entnommene Gleichungen haben also die drei übrigen zur Folge.

Insbesondere *bei trimetrischen Normalkoordinaten* können die p_i gleich den Längen l_i der Seiten des Fundamentaldreiecks gesetzt werden.

Bei solchen Koordinaten stellt daher die Gleichung

$$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$$

eines dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kegelschnitts einen Kreis dar, falls $s_{11} : 1 = s_{22} : 1 = s_{33} : 1$ oder also $a_{23}l_2l_3 = a_{31}l_3l_1 = a_{12}l_1l_2$ ist, d. h. man hat alsdann $a_{23} : a_{31} : a_{12} = l_1 : l_2 : l_3$, in Übereinstimmung mit Nr. 302, 3.

Bei Einführung der Abkürzung

(69) $$K(x_1, x_2, x_3) \equiv l_1x_2x_3 + l_2x_3x_1 + l_3x_1x_2$$

und mit Benutzung eines Parameters λ ist

(70) $$a_xp_x + \lambda K(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Gleichung eines beliebigen Kreises, der mit $K(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gerade $a_x = 0$ zur Potenzlinie hat.

Zur Bestimmung der Potenz Π eines Punktes $P'(x_1', x_2', x_3')$ in bezug auf einen Kreis $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ beachte man, daß die Potenz nach Nr. 109 gleich der aus dem Quadrate c^2 der Zentraldistanz des Punktes P' und dem Quadrate ϱ^2 des Kreisradius gebildeten Differenz $c^2 - \varrho^2$ ist. Sind $y_1 \mid y_2 \mid y_3$ die Koordinaten des Kreismittelpunktes, so folgt

(71) $$c^2 = \frac{(l_1 l_2 l_3)^2}{l_{y'}^2 \cdot l_{x'}^2} \cdot \begin{pmatrix} y & x' \\ y & x' \end{pmatrix}_{\omega_{ik}},$$

daher wird

(72) $$\Pi = \frac{(l_1 l_2 l_3)^2 \cdot \begin{pmatrix} y & x' \\ y & x' \end{pmatrix}_{\omega_{ik}} - \varrho^2 l_y^2 l_{x'}^2}{l_y^2 \cdot l_{x'}^2}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks kann gleich der linken Seite

$f(x_1', x_2', x_3')$ der Gleichung des Kreises gesetzt werden, in die man die Koordinaten von P' eingetragen hat. Bei Einführung eines noch zu bestimmenden, jedenfalls von den y_i abhängigen Faktors m kann also $\Pi = mf(x_1', x_2', x_3') : l_{x'}^2$ gesetzt werden. Hier läßt sich m bestimmen, wenn man beachtet, daß die Potenz des Kreismittelpunktes gleich $-\varrho^2$ ist; so folgt $-\varrho^2 = mf(y_1, y_2, y_3) : l_y^2$, also $m = -\varrho^2 l_y^2 : f(y_1, y_2, y_3)$ und

$$(73)\qquad \Pi = -\frac{\varrho^2 l_y^2 f(x_1', x_2', x_3')}{l_{x'}^2 f(y_1, y_2, y_3)}.$$

Da die Koordinaten des Mittelpunktes $y_i = \frac{1}{2}F'(l_i) = A_{i1}l_1 + A_{i2}l_2 + A_{i3}l_3$ sind, wird $l_y = F(l_1, l_2, l_3)$ und $f(y_1, y_2, y_3) = AF(l_1, l_2, l_3)$, man hat also das Ergebnis: *Die Potenz eines Punktes $x_1' \,|\, x_2' \,|\, x_3'$ in bezug auf einen Kreis $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ vom Radius ϱ ist bei trimetrischen Normalkoordinaten gegeben durch die Formel:*

$$(74)\qquad \Pi = -\frac{\varrho^2 f(x_1', x_2', x_3') F(l_1, l_2, l_3)}{A \cdot l_{x'}^2}.$$

B. 1) Sind

$$a_x p_x + \lambda_1 K(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{und} \quad b_x p_x + \lambda_2 K(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Gleichungen zweier Kreise, so ist $\lambda_2 a_x - \lambda_1 b_x = 0$ die Gleichung ihrer Potenzlinie.

2) *Die drei Mittelpunkte der Seiten und die drei Fußpunkte der Höhen in einem Dreieck liegen in demselben Kreise, dem Feuerbachschen Kreise des Dreiecks.*

Eine Kurve zweiten Grades durch diese sechs Punkte ist

$$x_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + x_2^2 \sin A_2 \cos A_2 + x_3^2 \sin A_3 \cos A_3$$
$$-(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0;$$

denn für $x_3 = 0$ erhält man aus ihr

$$x_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + x_2^2 \sin A_2 \cos A_2 - x_1 x_2 (\sin A_1 \cos A_2 + \cos A_1 \sin A_2) = 0,$$

oder $\quad (x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2)(x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2) = 0,$

und nun beachte man, daß $x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2 = 0$ und $x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2 = 0$ nach Nr. 65, 4 und 65, 3 die durch den Scheitel des Winkels A_3 gezogene Mittellinie bez. Höhe des Dreiecks darstellen. Die Kurve ist aber ein Kreis, weil man die Gleichung schreiben kann

$$(x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$-2(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0$$

oder $(x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3) l_x - 2K(x_1, x_2, x_3) = 0.$
Man sieht daraus, daß die Potenzlinie des umgeschriebenen und des

Feuerbachschen Kreises die Gerade von der Gleichung $x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3 = 0$ ist.

3) Potenzlinie des eingeschriebenen und des Feuerbachschen Kreises. Die Gleichung des ersten (Nr. 303, 5) kann geschrieben werden

$$\left(\frac{x_1 \cos^4 \frac{1}{2} A_1}{\sin A_1} + \frac{x_2 \cos^4 \frac{1}{2} A_2}{\sin A_2} + \frac{x_3 \cos^4 \frac{1}{2} A_3}{\sin A_3}\right) l_x = \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2} A_1 \cos^2 \frac{1}{2} A_2 \cos^2 \frac{1}{2} A_3}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3} K(x_1, x_2, x_3).$$

Also lautet die Gleichung der Potenzlinie:

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A_1 \cos^2 \tfrac{1}{2} A_2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A_3 \{x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3\} = \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \left\{ x_1 \frac{\cos^4 \frac{1}{2} A_1}{\sin A_1} + x_2 \frac{\cos^4 \frac{1}{2} A_2}{\sin A_2} + x_3 \frac{\cos^4 \frac{1}{2} A_3}{\sin A_3} \right\},$$

oder nach Division durch $2 \cos \frac{1}{2} A_1 \cos \frac{1}{2} A_2 \cos \frac{1}{2} A_3$ und mit Hilfe goniometrischer Umformung:

$$\frac{x_1 \cos \frac{1}{2} A_1}{\sin \frac{1}{2}(A_2 - A_3)} + \frac{x_2 \cos \frac{1}{2} A_2}{\sin \frac{1}{2}(A_3 - A_1)} + \frac{x_3 \cos \frac{1}{2} A_3}{\sin \frac{1}{2}(A_1 - A_2)} = 0.$$

Man erkennt nun (Nr. 303, 5), daß diese Gerade den eingeschriebenen Kreis in einem Punkte berührt, dessen Koordinaten

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(A_2 - A_3) \mid \sin^2 \tfrac{1}{2}(A_3 - A_1) \mid \sin^2 \tfrac{1}{2}(A_1 - A_2)$$

sind. In diesem Punkte berühren sich also der eingeschriebene und der Feuerbachsche Kreis; die Mittelpunkte dieser beiden Kurven haben die Koordinaten $1 \mid 1 \mid 1$ und $\cos(A_2 - A_3) \mid \cos(A_3 - A_1) \mid \cos(A_1 - A_2)$. Man zeigt in gleicher Weise, daß sich auch die drei angeschriebenen Kreise und der Feuerbachsche Kreis berühren. Nach diesem Satze von *Feuerbach* führt der Kreis seinen Namen.[56])

Der folgende Beweis dehnt den Satz auf die acht Kreise des Apollonischen Problems aus, die in der Art in Gruppen von vier zerfallen, daß die Kreise jeder Gruppe von einem und demselben neuen Kreise berührt werden. (Nr. 123.)

Sind l_1, l_2, l_3 die nach der Größe geordneten Seitenlängen des Dreiecks, nennen wir die zugehörigen außen berührenden Kreise 1, 2, 3 und den eingeschriebenen Kreis 4, bezeichnen wir ferner die Längen der äußeren und inneren gemeinsamen Tangenten der Kreise 1 und 2 mit 12, $1'2'$, usw., so muß, weil die Seite l_1 den Kreis 1 auf der einen und die Kreise 2, 3, 4 auf der andern Seite hat, nach Nr. 128 die Beziehung stattfinden $1'3' \cdot 24 = 1'2' \cdot 34 + 1'4' \cdot 23$ und ebenso muß $1'2' \cdot 34 + 2'4' \cdot 13 = 2'3' \cdot 14$, $2'3' \cdot 14 = 1'3' \cdot 24 + 3'4' \cdot 12$ sein. Durch Addition folgt $2'4' \cdot 13 = 1'4' \cdot 23 + 3'4' \cdot 12$, d. h. die vier Berührungskreise des Dreiecks werden von einem und demselben fünften Kreise berührt, der den Kreis 4 auf der einen und die Kreise 1, 2, 3 auf der andern Seite hat. Zu den acht Kreisen des Apollonischen Problems erhält

man so acht neue Kreise; das Verhältnis beider Gruppen zueinander ist ein gegenseitiges. Zu denselben kommen noch sechs Kreise, die zwar je vier der Apollonischen berühren, während doch jeder von ihnen nur durch drei der letzten berührt wird.

4) In dem Ausdruck $\Pi = mf(x_1', x_2', x_3') : l_{x'}^2$ für die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis (bei trimetrischen Normalkoordinaten) bestimme man die Konstante m, wenn $f(x_1', x_2', x_3') = 0$ die erste Gleichung des Feuerbachschen Kreises in 2) bedeutet.

Weil der Kreis eine Seite $x_3 = 0$ des Dreiecks in Punkten schneidet, deren Entfernungen von der Ecke A_1 bez. gleich $\frac{1}{2}l_3$ und $l_2 \cos A_1$ sind, so ist das Quadrat der Tangente von A_1 an diesen Kreis gleich $\frac{1}{2}l_2 l_3 \cos A_1$. Aus der Gleichung des Kreises folgt $f(x_1', 0, 0) = x_1'^2 \sin A_1 \cos A_1$; ferner wird $l_{x'}^2 = l_1^2 x_1'^2 = 4R^2 \sin^2 A_1 \cdot x_1'^2$, wo R den Radius des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises bedeutet. Daher folgt die gewünschte Konstante aus

$$\tfrac{1}{2}l_2 l_3 \cos A_1 = \frac{m \sin A_1 \cos A_1}{4R^2 \sin^2 A_1}, \text{ nämlich } m = 8R^4 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3.$$

5) Die Konstante m für den Kreis

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0$$

ist

$$m = -16R^4 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3,$$

und für den eingeschriebenen Kreis

$$x_1^2 \cos^4 \tfrac{1}{2}A_1 + \cdots + x_3^2 \cos^4 \tfrac{1}{2}A_3 - 2x_2 x_3 \cos^2 \frac{A_2}{2} \cos^2 \frac{A_3}{2} - \cdots$$
$$- 2x_1 x_2 \cos^2 \frac{A_1}{2} \cos^2 \frac{A_2}{2} = 0$$

erhält man $m = \Delta^2 : (\cos^2 \frac{1}{2}A_1 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}A_2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}A_3)$, wo Δ den Flächeninhalt des Fundamentaldreiecks bedeutet.

6) Man bestimme die Entfernung D der Mittelpunkte des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises voneinander; R' bez. R seien die Radien dieser beiden Kreise.

Das Quadrat der Tangente vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises an den umgeschriebenen Kreis $(D^2 - R^2)$ findet man wegen $x_1' : x_2' : x_3' = 1 : 1 : 1$ gleich $-\frac{4R^4 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}{\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3}$ oder nach bekannten Formeln der Trigonometrie gleich $-2RR'$; daher ist

$$D^2 = R^2 - 2RR'.$$

7) Der Mittelpunkt des Kreises

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3) + \lambda(l_1 x_2 x_3 + l_2 x_3 x_1 + l_3 x_1 x_2) = 0$$

hat Koordinaten $z_1 \mid z_2 \mid z_3$, die bei Anwendung eines Proportionalitätsfaktors σ die Gleichungen erfüllen

$$\sigma z_1 = a_1 - a_2 \cos A_3 - a_3 \cos A_2 + \lambda \cos A_1,$$
$$\sigma z_2 = a_2 - a_3 \cos A_1 - a_1 \cos A_3 + \lambda \cos A_2,$$
$$\sigma z_3 = a_3 - a_1 \cos A_2 - a_2 \cos A_1 + \lambda \cos A_3.$$

8) Die Fußpunkte der von den Punkten y_i und $1 : y_i$ auf die Seiten des Fundamentaldreiecks gefällten Lote liegen in einem Kreise.

Mit Rücksicht auf Nr. 68, 5 wird seine Gleichung in der Form gefunden

$$(x_2 x_3 \sin A_1 + \cdot\cdot)(y_1 \sin A_1 + \cdot\cdot)(y_2 y_3 \sin A_1 + \cdot\cdot) = \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$$
$$\times (x_1 \sin A_1 + \cdot\cdot) \left\{ \frac{x_1 y_1 (y_2 + y_3 \cos A_1)(y_3 + y_2 \cos A_1)}{\sin A_1} + \cdot\cdot \right\}.$$

322. **Polarität in Kegelschnittsystemen.** Da die Gleichung der Polare eines Punktes die Koeffizienten a_{ik} der Kurvengleichung im ersten Grade enthält, so geht eine unbestimmte Größe, die im ersten Grade in der Gleichung eines Kegelschnittes enthalten ist, auch in diesem Grade in die Gleichung der Polare ein. Sind aber $p = 0$ und $q = 0$ die Polaren eines Punktes y_i in bezug auf zwei Kegelschnitte $f(x, x) = 0$ und $g(x, x) = 0$, so ist die Polare desselben Punktes in bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ durch $p - \lambda q = 0$ dargestellt. Denn es ist

$$(75) \quad (a_{11} - \lambda b_{11}) y_1 x_1 + \cdot\cdot \equiv a_{11} y_1 x_1 + \cdot\cdot - \lambda (b_{11} y_1 x_1 + \cdot\cdot).$$

Die Polaren eines gegebenen Punktes in bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels bilden daher ein Strahlenbüschel, schneiden sich also in einem zweiten festen Punkte.[57])

Wenn $p' = 0$ und $q' = 0$ die Polaren eines andern Punktes y_i' in bezug auf die Kegelschnitte $f = 0$ und $g = 0$ darstellen, so hat seine Polare in bezug auf die Kegelschnitte $f - \lambda g = 0$ die Gleichung $p' - \lambda q' = 0$. Wir erkennen damit (Nr. 250), *daß die Polaren von zwei Punkten in bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels zwei projektive Strahlenbüschel bilden.*

Ebenso liegen die Pole einer Geraden in bezug auf die Kegelschnitte einer Schar $\varphi - \lambda \chi = 0$ (Nr. 270) in einer Geraden, und die Pole von zwei Geraden in bezug auf eine solche Schar bilden zwei projektive gerade Punktreihen.

Wir erinnern dabei an die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Büschel und Reihen, wie sie in Nr. 283 entwickelt worden ist. Da der Schnittpunkt der Strahlen

$p - \lambda q = 0$, $p' - \lambda q' = 0$ der in bezug auf $f - \lambda g = 0$ genommene Pol der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte ist, so erkennen wir, *daß der Ort des Pols einer gegebenen Geraden in bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels ein Kegelschnitt ist.* Die Gleichung dieses Ortes ist $pq' - p'q = 0$ (vgl. Nr. 301, 1).

Ist *eine unbestimmte Größe im zweiten Grade* in der Gleichung eines Kegelschnittes enthalten, so muß sie auch in demselben Grade in die Gleichung der Polare irgend eines Punktes in bezug auf die Kurve eingehen; diese wird einen Kegelschnitt umhüllen, wenn jene Größe veränderlich gedacht wird (Nr. 312).

Wenn z. B. ein Kegelschnitt mit zwei festen Kegelschnitten je eine doppelte Berührung hat, so umhüllt die Polare eines festen Punktes einen von drei festen Kegelschnitten; denn nach Nr. 312, 3 gibt es drei solche Systeme von Kegelschnitten, und die Gleichung jedes Systems enthält die Größe μ im zweiten Grade.

B. 1) Wenn der Pol y_i eine Gerade $v_x = 0$ durchläuft, so beschreibt der Schnitt seiner in bezug auf die Kurven eines Büschels $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ gewonnenen Polaren einen Kegelschnitt N, der die Gleichung hat

$$N \equiv \begin{vmatrix} f'(x_1) & f'(x_2) & f'(x_3) \\ g'(x_1) & g'(x_2) & g'(x_3) \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Kegelschnitt entsteht aus projektiven Strahlenbüscheln, weil das Doppelverhältnis von vier Punkten in einer Geraden gleich dem Doppelverhältnis ihrer vier Polaren in bezug auf einen Kegelschnitt ist. Das Doppelverhältnis der Punkte

$$l_1 y_i - m_1 y_i', \quad l_2 y_i - m_2 y_i', \quad l_3 y_i - m_3 y_i', \quad l_4 y_i - m_4 y_i'$$

ist in der Tat identisch mit dem der vier Geraden

$$l_1 p = m_1 p', \quad l_2 p = m_2 p', \quad l_3 p = m_3 p', \quad l_4 p = m_4 p'.$$

2) Gleichung des Paares der Tangenten eines Kegelschnittes $f(x, x) = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der Geraden $x_3 = 0$.

Die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $y_1 \mid y_2 \mid 0$ ist (nach Nr. 307) $y_1 f'(x_1) + y_2 f'(x_2) = 0$. Die Schnittpunkte von $x_3 = 0$ mit der Kurve erhält man durch $a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2 = 0$

ausgedrückt. Die Elimination von y_1, y_2 zwischen diesen beiden Gleichungen liefert als Gleichung des Tangentenpaares

$$a_{11} f'(x_2)^2 - 2 a_{12} f'(x_2) f'(x_1) + a_{22} f'(x_1)^2 = 0.$$

Bei Cartesischen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$ stellt diese Gleichung das Asymptotenpaar des Kegelschnittes dar, denn die Asymptoten sind die Tangenten der Kurve in ihren Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden. (Vgl. Nr. 76.)

3) Wenn ein Kegelschnitt drei feste Punkte, z. B. die drei Fundamentalpunkte, enthält und die eine seiner Asymptoten durch einen festen Punkt geht, so umhüllt die andere einen Kegelschnitt, der dem Dreieck der festen Punkte eingeschrieben ist.

Sind $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ die Asymptoten, und ist $l_x = 0$ die unendlich ferne Gerade, so ist die Gleichung des Kegelschnittes $t_1 t_2 = l_x^2$. Da er durch die Fundamentalpunkte geht, darf seine Gleichung die Glieder mit x_1^2, x_2^2, x_3^2 nicht enthalten; ist also t_1 von der Form a_x, so ist t_2 von der Form

$$\frac{l_1^2}{a_1} x_1 + \frac{l_2^2}{a_2} x_2 + \frac{l_3^2}{a_3} x_3;$$

geht also $t_2 = 0$ durch den Punkt y_i hindurch, so berührt nach Nr. 303 die andere Gerade $t_1 = 0$ den Kegelschnitt

$$l_1 \sqrt{y_1 x_1} + l_2 \sqrt{y_2 x_2} + l_3 \sqrt{y_3 x_3} = 0.$$

Dasselbe Argument beweist, daß, wenn ein Kegelschnitt durch drei feste Punkte geht, und wenn eine seiner Schnittsehnen mit irgend einem Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ die Gleichung hat $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, der anderen die Gleichung entspricht

$$\frac{a_{11}}{a_1} x_1 + \frac{a_{22}}{a_2} x_2 + \frac{a_{33}}{a_3} x_3 = 0.$$

4) Wenn ein in bezug auf einen Kegelschnitt k sich selbst konjugiertes Dreieck gegeben ist und eine der Schnittsehnen von k mit dem Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ durch einen festen Punkt geht, so umhüllt die andere einen Kegelschnitt.[58])

Da die Glieder $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$ in der Gleichung des ersten Kegelschnittes fehlen, so entspricht der Gleichung der einen Berührungssehne $a_1 x_1 + a_1 x_2 + a_3 x_3 = 0$ die der andern

$$a_1 x_1 (a_2 a_{13} + a_3 a_{12} - a_1 a_{23}) + a_2 x_2 (a_3 a_{12} + a_1 a_{23} - a_2 a_{13})$$
$$+ a_3 x_3 (a_1 a_{23} + a_2 a_{13} - a_3 a_{12}) = 0.$$

5) Die Berührungspunkte A', A'' der gemeinsamen Tangente t zweier Kegelschnitte $f(x, x) = 0$ bez. $g(x, x) = 0$ haben die Koordinaten y_i' bez. y_i''; ferner seien Q' und Q'' Punkte, die den Kegelschnitt $f = 0$ bez. $g = 0$ durchlaufen. Man bestimme den Ort des Punktes P, in dem sich $A'Q'$ und $A''Q''$ schneiden, unter der Voraussetzung, daß $Q'Q''$ durch einen festen Punkt O in t geht.[59])

Sind zunächst A', A'' noch nicht die Berührungspunkte einer *gemeinsamen* Tangente der beiden Kegelschnitte, sondern irgend welche Punkte von $f=0$ bez. $g=0$ und sind $t'=0$, $t''=0$ die Gleichungen ihrer Tangenten, so ergeben sich nach Nr. 306 aus den Koordinaten x_i des Punktes P die des zweiten Schnittpunktes Q' der Geraden $A'P$ mit $f=0$ in der Form $f(x,x)y_i'-2t'x_i$, $(i=1,2,3)$ und die Koordinaten von Q'' analog in der Form $g(x,x)y_i''-2t''x_i$, $(i=1,2,3)$. Hier ist $t'\equiv\Sigma\frac{1}{2}f'(y_i')x_i$, t'' analog. Geht die Verbindungsgerade dieser Punkte durch den festen Punkt O, den wir als den Fundamentalpunkt $x_1=x_2=0$ annehmen können, so muß

$$\begin{aligned}(f(x,x)y_1'-2t'x_1) &: (f(x,x)y_2'-2t'x_2)\\ =(g(x,x)y_1''-2t''x_1) &: (g(x,x)y_2''-2t''x_2)\end{aligned}$$

sein; der gesuchte Ort ist daher eine Kurve vierter Ordnung, so lange die Punkte A', A'', O beliebig gewählt werden können. Müssen dieselben jedoch in *einer* Geraden liegen, so können wir diese als die Linie $x_1=0$ wählen, und für $y_1'=0$, $y_1''=0$ wird die vorige Gleichung durch x_1 teilbar und stellt die Kurve dritter Ordnung $t'\cdot g(x,x)y_2''=t''\cdot f(x,x)y_2'$ dar.

Wenn aber endlich die gegebenen Punkte die Berührungspunkte einer *gemeinsamen* Tangente t sind, so ist $t'=0$ dieselbe Gerade wie $t''=0$, und es läßt sich die Gleichung der Kurve durch einen weiteren Faktor dividieren; sie wird von der Form $f(x,x)=kg(x,x)$ und stellt daher einen Kegelschnitt dar, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte hindurchgeht.

6) Man soll dem Kegelschnitt $f(x,x)=0$ ein Dreieck einschreiben, dessen Seiten durch die drei Fundamentalpunkte gehen (Nr. 298).

Die Verbindungslinie des Punktes $P(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$ der Kurve mit dem Punkte $Q(y_1\,|\,y_2\,|\,y_3)$ ihrer Ebene hat noch einen Punkt mit der Kurve gemein, dessen Koordinaten den Ausdrücken $f(y,y)x_i-2y_if(y,x)$, $(i=1,2,3)$ proportional sind. Ist der Punkt Q der Fundamentalpunkt $1\,|\,0\,|\,0$, so wird $f(y,y)$ gleich a_{11}, $f(y,x)=\frac{1}{2}f'(x_1)$ und die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes der Geraden PQ und der Kurve haben die Werte $a_{11}x_1-f'(x_1)\,|\,a_{11}x_2\,|\,a_{11}x_3$. Ebenso schneidet die Gerade von P nach dem Punkte $0\,|\,1\,|\,0$ die Kurve noch in $a_{22}x_1\,|\,a_{22}x_2-f'(x_2)\,|\,a_{22}x_3$. Die Verbindungslinie dieser zwei Punkte geht durch den Punkt $0\,|\,0\,|\,1$, wenn

$$(a_{11}x_1-f'(x_1)):a_{11}x_2=a_{22}x_1:(a_{22}x_2-f'(x_2))$$

oder
$$f'(x_1)f'(x_2)=a_{11}x_1f'(x_2)+a_{22}x_2f'(x_1)$$

ist. Dies ist die von den Koordinaten des Scheitels P zu erfüllende Bedingung. Setzt man in ihr

$$a_{11}x_1=\tfrac{1}{2}f'(x_1)-a_{12}x_2-a_{13}x_3,\quad a_{22}x_2=\tfrac{1}{2}f'(x_2)-a_{21}x_1-a_{23}x_3,$$

so wird sie in

$$a_{12}(x_1 f'(x_1) + x_2 f'(x_2)) + x_3(a_{23} f'(x_1) + a_{13} f'(x_2)) = 0$$

und, wegen $\Sigma x_i f'(x_i) = 0$ in

$$a_{23} f'(x_1) + a_{13} f'(x_2) - a_{12} f'(x_3) = 0$$

übergeführt. Der Faktor x_3 hat für die geometrische Lösung des Problems keinen Wert; denn obwohl jeder der Punkte, in denen $x_3 = 0$ die Kurve schneidet, die Bedingung erfüllt, daß seine Verbindungslinien mit den beiden anliegenden Fundamentalpunkten die Kurve ferner in Punkten schneiden, die mit dem gegenüberliegenden $0 \mid 0 \mid 1$ in einer Geraden liegen, so entsprechen sie doch der Aufgabe insofern nicht, als diese Verbindungslinien zusammenfallen und daher nicht Seiten eines Dreiecks sein können.

Die Spitze des gesuchten Dreiecks ist daher einer von den Punkten, in denen die Kurve durch die Gerade $a_{23} f'(x_1) + a_{13} f'(x_2) - a_{12} f'(x_3) = 0$ geschnitten wird. Man bestätigt nun direkt, daß $a_{12} f'(x_3) - a_{13} f'(x_2) = 0$, $a_{23} f'(x_1) - a_{21} f'(x_3) = 0$, $a_{31} f'(x_2) - a_{32} f'(x_1) = 0$ die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der Dreiecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) = 0$ darstellen; daher ist nach Nr. 67, 1 und 307, 1 die Gerade $a_{23} f'(x_1) + a_{13} f'(x_2) - a_{12} f'(x_3) = 0$ die nach der Konstruktion von Nr. 298 erhaltene.

7) Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung miteinander haben, so wird jede Tangente des einen in ihrem Berührungspunkte, in der Berührungssehne beider Kegelschnitte und in den Schnittpunkten mit dem zweiten Kegelschnitt harmonisch geteilt (Nr. 289, 7).

Wenn wir in die Gleichung $f(x, x) \equiv g(x, x) + s_x^2 = 0$ des ersten Kegelschnittes für x_i die Werte $l x_i' + m x_i''$ einsetzen, wo die Koordinaten der Punkte x_i', x_i'' der Gleichung $s_x = 0$ genügen, so erhalten wir aus ihr

$$(l s_{x'} + m s_{x''})^2 + l m \{x_1' f'(x_1'') + x_2' f'(x_2'') + x_3' f'(x_3'')\} = 0.$$

Wenn nun die Verbindungslinie x_i', x_i'' den Kegelschnitt $g(x, x) + s_x^2 = 0$ berührt, so muß die zuvor angegebene Gleichung ein vollständiges Quadrat sein, d. h. es muß

$$x_1' f'(x_1'') + x_2' f'(x_2'') + x_3' f'(x_3'') = -4 s_{x'} s_{x''}$$

werden, so daß die Gleichung selbst in $(l s_{x'} - m s_{x''})^2 = 0$ übergeht. Dies beweist aber den Satz.

323. Durch jeden von den vier Grundpunkten des Kegelschnittbüschels $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ verschiedenen Punkt $Q(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$ der Ebene geht ein einziger Kegelschnitt des Büschels (Nr. 249). Seine Gleichung wird offenbar $g(y, y) f(x, x) - f(y, y) g(x, x) = 0$. Ebenso wird jede von den vier Grund-

tangenten der Kegelschnittschar $\varphi(u, u) - \lambda\psi(u, u) = 0$ verschiedene Gerade von einer einzigen Kurve der Schar berührt.

Dagegen wird in jenem Büschel jede durch keinen der Grundpunkte gehende Gerade u_i durch *zwei* Kurven desselben berührt (Nr. 289, 8), für die die entsprechenden Parameter λ durch die Substitution von $a_{ik} - \lambda b_{ik}$ für a_{ik} in die Determinante (10) von Nr. 309 gefunden werden, so daß man erhält

$$(76)\quad D \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & a_{13}-\lambda b_{13} & u_1 \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & a_{23}-\lambda b_{23} & u_2 \\ a_{31}-\lambda b_{31} & a_{32}-\lambda b_{32} & a_{33}-\lambda b_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

dies ist eine in bezug auf λ *quadratische* Gleichung. Ebenso gehen durch jeden auf keiner Grundtangente liegenden Punkt x_i zwei Kegelschnitte der Schar $\varphi(u, u) - \lambda\psi(u, u) = 0$.

Die Schnittpunkte einer Geraden v_i mit den Kurven des Systems $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ findet man durch Zusammenfassung der drei Gleichungen

$$v_x = 0, \quad u_x = 0, \quad f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0;$$

also ist die Gleichung eines solchen Schnittpunktepaares

$$(77)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & a_{13}-\lambda b_{13} & v_1 & u_1 \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & a_{23}-\lambda b_{23} & v_2 & u_2 \\ a_{31}-\lambda b_{31} & a_{32}-\lambda b_{32} & a_{33}-\lambda b_{33} & v_3 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

eine in λ *lineare* Gleichung, die wir in der Form $\Phi(u, u) - \lambda\Psi(u, u) = 0$ schreiben können. Setzt man für λ die Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung $D = 0$ ein, so wird $\Phi(u, u) - \lambda\Psi(u, u)$ jedesmal ein vollständiges Quadrat K_1^2 bez. K_2^2, denn alsdann stellt $\Phi(u, u) - \lambda\Psi(u, u) = 0$ doppelt zählend den einen oder den anderen der beiden Punkte dar, in denen die Gerade $u_x = 0$ von je einem Kegelschnitt des Büschels berührt wird.

Aus $\Phi(u, u) - \lambda_1\Psi(u, u) \equiv K_1^2$ und $\Phi(u, u) - \lambda_2\Psi(u, u) \equiv K_2^2$ folgt nun

$$(78)\quad \Phi(u, u) \equiv \frac{\lambda_2 K_1^2 - \lambda_1 K_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \Psi(u, u) = \frac{K_1^2 - K_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Die Gleichung $\Phi(u, u) - \lambda\Psi(u, u) = 0$ für das Paar der Schnittpunkte der Geraden $v_x = 0$ mit der Büschelkurve $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ kann daher auch in der Form

$$K_1^2(\lambda_2 - \lambda) - K_2^2(\lambda_1 - \lambda) = 0 \tag{79}$$

geschrieben werden, woraus hervorgeht, daß die Paare der Schnittpunkte eine Involution bilden, die die Berührungspunkte der Geraden mit zwei Kegelschnitten des Büschels zu Doppelpunkten hat. (Nr. 289).

Dual bestimmt ein Punkt mit der Schar $\varphi(u, u) - \lambda\psi(u, u) = 0$ ein involutorisches Büschel von Tangentenpaaren, das die in ihm berührenden Tangenten der beiden durch ihn hindurchgehenden Kegelschnitte der Schar zu Doppelstrahlen hat.

Wenn insbesondere der eine der beiden festen Kegelschnitte, etwa $\psi(u, u) = 0$, in das Paar der imaginären Kreispunkte $\omega(u, u) = 0$ ausartet (Nr. 319), so sind die ihm mit dem andern festen Kegelschnitt $\varphi(u, u) = 0$ gemeinschaftlichen Tangenten die vier Verbindungslinien der imaginären Kreispunkte mit den Brennpunkten von $\varphi(u, u) = 0$ (vgl. Teil 1, Nr. 181), und $\varphi(u, u) - \lambda\omega(u, u) = 0$ ist dann *eine Schar von konfokalen Kegelschnitten* (Nr. 232). Auch von dieser Schar gehen durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte, während jede Gerade von einer Scharkurve berührt wird. Die Involution der Tangentenpaare der Schar an irgend einem Punkte hat rechtwinklige Doppelstrahlen, da diese mit jedem Paare, also auch mit dem zirkularen Geradenpaar, eine harmonische Gruppe bilden (Nr. 289, 12). Da die Doppelstrahlen die Tangenten der beiden durch den Punkt gehenden Kegelschnitte des Systems sind, schneiden sich konfokale Kegelschnitte rechtwinklig.

B. 1) Man bestimme die Koordinaten der Berührungspunkte einer Geraden $u_x = 0$ mit dem Büschel $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$.

Ordnet man die Determinante D nach den Potenzen und Produkten der u_1, u_2, u_3, so hat man für die Koordinaten x_i der betreffenden Berührungspunkte die Beziehungen

$$x_1 : x_2 : x_3 = D'(u_1) : D'(u_2) : D'(u_3).$$

2) Die Tangenten der Kurven des Büschels in ihren Schnitt-

punkten mit einer Geraden umhüllen eine Kurve dritter Klasse, die die gegebene Gerade zur Doppeltangente hat.

Man bildet die Gleichung dieser Kurve für $a_x = 0$ als die Gleichung der Geraden, $u_x = 0$ als die der Tangente und mit den drei Beziehungen $\varrho u_i = f'(x_i) - \lambda g'(x_i)$, indem man in die durch Elimination von ϱ und λ erhaltene Determinante dritten Grades für die x_i die Werte einsetzt, die aus der Gleichung der Tangente und der Gleichung der gegebenen Geraden gewonnen werden.

Stellt $a_x = 0$ die unendlich ferne Gerade dar, so ist die zugehörige Kurve dritter Klasse die Hüllkurve der Asymptoten aller Büschelkurven.

324. **Bestimmung der Kegelschnitte durch lineare Bedingungen.** Fünf Bedingungen bestimmen einen Kegelschnitt, so daß *im allgemeinen m Punkte und n Tangenten desselben gegeben sein können, sofern* $m + n = 5$ *ist.* Die besonderen Fälle der Lage eines dieser Bestimmungs-Elemente oder mehrerer von ihnen erfordern nur sehr einfache Umformungen der Konstruktion des entsprechenden allgemeinen Falles.

Wenn z. B. eine Parallele zu einer Asymptote gegeben ist, so vertritt dieselbe einen unendlich fernen Punkt, die Angabe der Richtung einer Asymptote ist also gleichbedeutend mit *einer* Bedingung. Eine Asymptote der Kurve ist mit *zwei* Bedingungen gleichbedeutend, sowohl mit zwei unendlich nahen Tangenten wie mit zwei unendlich nahen Punkten, weil eine Tangente und ihr Berührungspunkt gegeben sind. Die Bestimmung, daß die Kurve eine Parabel sein soll, ist *eine* Bedingung, denn es ist damit die unendlich ferne Tangente gegeben. Dagegen wiegt die Bezeichnung der Kurve als Kreis *zwei* Bedingungen auf, weil dann die Kurve durch zwei bestimmte unendlich ferne Punkte gehen muß. Die Angabe eines Brennpunktes ersetzt *zwei* Bedingungen, denn sie bestimmt zwei Tangenten der Kurve (Nr. 300 und 181), in der Tat bestimmt ein Brennpunkt mit drei andern Bedingungen den Kegelschnitt.

Die Angabe des Pols einer gegebenen Geraden in bezug auf den Kegelschnitt ist gleichbedeutend mit zwei Bedingungen, drei weitere Bedingungen bestimmen die Kurve. Denn (vgl. Fig. 75 in Teil I, S. 280) für P als den Pol von $R'R''$ in

bezug auf den Kegelschnitt und T als Punkt desselben ist auch T', der vierte harmonische Punkt zu T in bezug auf das Punktepaar P, R, ein Punkt des Kegelschnitts; und die Tangenten in T und T' schneiden sich in einem Punkte O der Polare $R'R''$. So bestimmt man aus einem gegebenen Pol und seiner Polare zu drei Punkten oder Tangenten drei weitere Punkte oder Tangenten derselben Kurve und damit diese selbst. Darum ist auch insbesondere die Angabe des Mittelpunktes als des Pols der unendlich fernen Geraden mit *zwei* Bedingungen gleichbedeutend. Brennpunkt und Leitlinie zählen für *vier* Bedingungen, weil zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte damit gegeben sind. (Vgl. Nr. 181.)

Dagegen ist die Angabe zweier Punkte als harmonischer Pole gleichbedeutend mit *einer* Bedingung. Hierher gehört auch die Bestimmung der Kurve als gleichseitige Hyperbel; denn sie sagt aus, daß die unendlich fernen Kreispunkte harmonische Pole sind. Somit ist die Bestimmung eines sich selbst konjugierten Dreiecks mit *drei* Bedingungen gleichbedeutend, wie auch die auf dasselbe bezogene Gleichung der Kurve nur zwei unabhängige Konstanten enthält (Nr. 299). Wenn für eine Parabel ein Tripel harmonischer Pole gegeben ist, so sind durch dasselbe drei endliche Tangenten der Kurve bestimmt und ist daher nur noch einer Bedingung zu genügen möglich. Bedingungen, die *linear* sind *für Punktkoordinaten, sind quadratisch für Linienkoordinaten,* insofern es sich um die Bestimmung der Koeffizienten der allgemeinen Gleichung handelt. Dual entsprechendes gilt für ein Paar harmonischer Polaren. Die Angabe eines Durchmessers ist ein besonderer Fall hiervon. Zwei konjugierte Durchmesser zählen für *drei* und die Involution konjugierter Durchmesser für *vier* Bedingungen; jede Involution harmonischer Pole für zwei Bedingungen, usw.

1. *Fünf Punkte.* Man hat zur Bestimmung der Koeffizienten von $f(x, x) = 0$ fünf lineare Gleichungen. Aus jenen Punkten können mit Hilfe des Lineals allein beliebig viele andere Punkte der Kurve konstruiert werden. Auch kann man durch dieselbe Konstruktion die Polare eines Punktes in bezug

auf den Kegelschnitt ermitteln. Die Polaren von zwei Punkten einer Geraden liefern als ihren Schnittpunkt den Pol derselben, insbesondere z. B. den Mittelpunkt. Die Tangente eines Punktes der Kurve bestimmt sich als die Verbindungsgerade desselben mit dem unendlich nahen Punkte der Kurve. Ob die durch fünf Punkte bestimmte Kurve elliptisch oder hyperbolisch ist, entscheidet sich durch die sich selbst entsprechenden *Richtungen* der Strahlenbüschel von zweien derselben nach den übrigen (Nr. 284).

2. *Fünf Tangenten.* Die Koeffizienten von $\varphi(u, u) = 0$ bestimmen sich durch fünf lineare Gleichungen, daher alle andern Tangenten durch lineare Konstruktion, zugleich die Berührungspunkte als Schnitte unendlich naher Tangenten (Nr. 269).

Der Pol einer Geraden g, insbesondere der Mittelpunkt der Kurve als Pol der unendlich fernen Geraden, bestimmt sich als der Schnittpunkt von zwei Geraden, die zu g polar-konjugiert sind (Nr. 318).

3. *Vier Punkte und eine Tangente* führen durch eine quadratische Gleichung zur Bestimmung für den Parameter der Kegelschnitte durch die vier gegebenen Punkte (Nr. 323). Man konstruiert nach der Eigenschaft des eingeschriebenen Vierecks durch seine Gegenseitenpaare auf jeder Geraden eine Involution, der auch die Schnittpunkte mit der Kurve angehören; die Berührungspunkte der Tangente sind die Doppelpunkte (Nr. 289, 8).

Weil diese Aufgabe zwei Lösungen hat, so kann eine lineare Konstruktion derselben nicht erwartet werden. Auch der Satz von *Carnot* läßt sich zur Auflösung des Problems verwenden (B. 1 in Nr. 314). Indem man bemerkt, daß durch vier Punkte des Kegelschnittes in dem Diagonalendreiseit des durch sie bestimmten Vierecks drei Pole und ihre Polaren gegeben sind, leitet man aus der einen bekannten Tangente drei andere Tangenten ab und gelangt so zu vier Punkten und vier Tangenten.

4. *Vier Tangenten und ein Punkt* bestimmen den Kegelschnitt durch die dualen Bedingungen und Konstruktionen.

5. *Drei Punkte a, b, c und zwei Tangenten.* Man hat für die a_{ik} drei lineare und zwei quadratische Bedingungen, und man schließt nach einem besonderen Falle des Satzes in Nr. 289, daß die Gerade ab den Kegelschnitt und zwei seiner Tangenten in Punktepaaren a, b und A, B einer Involution schneidet, der der Schnittpunkt mit der Berührungssehne der Tangenten als einer der Doppelpunkte der Involution angehört. Jede der drei Geraden ab, bc, ca bestimmt so in den Doppelpunkten der durch ihre Enden und ihre Schnitte mit den gegebenen Tangenten gebildeten Involution Punkte der Berührungssehne jener Tangenten; sie liegen viermal zu dreien in einer Geraden. Hierher gehört auch die Bestimmung der Kegelschnitte durch drei Punkte und einen Brennpunkt.

6. *Drei Tangenten und zwei Punkte.* Man hat die dualen Gleichungen und Konstruktionen; das Dreieck der drei Berührungssehnen hat seine Ecken in den gegebenen Tangenten und nach dem Vorigen gehen seine Seiten je durch einen festen Punkt der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte.

7. Die Angabe von zwei Punkten oder zwei Tangenten ist ein besonderer Fall der *doppelten Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt*; des allgemeineren Problems ist an verschiedenen Stellen des Vorigen gedacht worden. Für die Bestimmung durch drei Tangenten oder drei Punkte und die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt sehe man Nr. 298, 4; für die durch Punkt oder Tangente und die doppelte Berührung mit zwei gegebenen Kegelschnitten Nr. 312, 3; für die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt und die Berührung mit drei andern Kegelschnitten, die diesen selbst doppelt berühren, haben wir im Apollonischen Problem das elementare, aber vollgültige Analogon (vgl. Nr. 361 und Teil 1, Nr. 123).

8. Zwei Punkte oder Tangenten sind ersetzbar durch die dem Kegelschnitt entsprechende Involution harmonischer Pole bez. Polaren in ihrer Verbindungslinie bez. um ihren Schnittpunkt. So werden *die Fälle konjugiert imaginärer Paare* bestimmender Punkte oder Tangenten umfaßt.

Normalen als Bestimmungselemente gestatten keine Konstruktionen mit Lineal und Zirkel, ebenso die von berührenden Kegelschnitten im allgemeinen oder von Kegelschnitten, die unter gegebenen Winkeln geschnitten werden; usw.

Eine allgemeinere Art linearer Bedingtheit der Kegelschnitte, die alle bisher behandelten und noch weitere, z. B. die harmonische Teilung von Strecken und Winkeln, als Sonderfälle umfaßt, wird uns die Invariantentheorie kennen lehren. (Vgl. Nr. 349, 391 und 395, 6.)

Achtzehntes Kapitel.

Invariantentheorie der binären Formen.

325. **Binäre Gleichungen.** Jede Kurve n^{ter} Ordnung bestimmt mit einer beliebigen Geraden eine Gruppe von n Schnittpunkten (Nr. 27), jede Kurve n^{ter} Klasse mit einem beliebigen Punkte eine Gruppe von n Tangenten. Durch Transformation der Koordinaten kann die Gerade stets zu einer Seite, der Punkt zu einer Ecke eines Fundamentaldreiecks gemacht werden. Dann liefert die Substitution von $x_i = 0$ bez. $u_i = 0$ in die ternäre Gleichung der Kurve die binäre Gleichung des n-strahligen, zur Schnittpunktgruppe perspektiven Büschels aus der Gegenecke, bez. die Gleichung der n-punktigen, zum Tangentenbüschel perspektiven Reihe in der Gegenseite.

Nun brauchen wir zur Untersuchung der Punktreihen und Strahlenbüschel überhaupt nur zwei homogene Koordinaten. Sind in einer Reihe zwei Fundamentalpunkte gegeben, so können als die Koordinaten $x_1 \mid x_2$ eines beliebigen Punktes seine durch Konstanten $e_1 \mid e_2$ dividierten Abstände von jenen genommen werden (Nr. 87). Ebenso sind die Koordinaten $u_1 \mid u_2$ eines Strahls im Büschel in bezug auf zwei Fundamentalstrahlen die durch Konstanten $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$ dividierten Sinus seiner Winkel gegen diese. Definieren wir diese Konstanten als Koordinaten eines Einheitspunktes und einer Einheitsgeraden (Nr. 87), so ist die Bedeutung der Koordinaten in Reihe und Büschel dieselbe, d. h. eine Unterscheidung von Punkt- und Linienkoordinaten ist gegenstandslos.

Bei solcher Deutung sind die Schnittpunktreihen und Tangentenbüschel einer Kurve durch homogene Gleichungen mit zwei Veränderlichen analytisch ausgedrückt. Eine Unter-

suchung solcher binärer Gleichungen wird daher die Grundlage zu weiteren Ergebnissen des im vorigen Kapitel begonnenen Studiums der ternären Gleichungen zweiten Grades bilden.[60])

Die lineare binäre Form schreiben wir

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{1}$$

und die Form n^{ten} Grades symbolisch als n^{te} Potenz a_x^n. Die Transformation der Koordinaten zu neuen Fundamentalelementen wird vermittelt durch

$$\varrho x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2', \quad \varrho x_2 = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2'. \tag{2}$$

Bei unveränderter Koordinatendeutung ist dies zugleich der Ausdruck der projektiven Zuordnung zweier Reihen (Büschel) x_i und x_i'.

Die allgemeine binäre Gleichung n^{ten} Grades hat $n+1$ Koeffizienten oder n voneinander unabhängige Konstanten, die n Wurzeln $x_1^{(1)}:x_2^{(1)}, \ldots x_1^{(n)}:x_2^{(n)}$ oder $\alpha_1, \ldots \alpha_n$. Die Ausdrücke $x_2^{(i)} x_1 - x_1^{(i)} x_2$ nennt man die Linearfaktoren der Form.

326. **Diskriminante.** Projektive Punktreihen oder Strahlenbüschel sind durch drei Paare homologer Elemente bestimmt, denn die Koeffizienten der linearen Substitution sind dann bis auf einen konstanten gemeinsamen Faktor zu berechnen. Somit kann *im allgemeinen* jede quadratische bez. kubische Gleichung in jede andere quadratische bez. kubische Gleichung linear transformiert werden, da deren Koeffizientenzahl die der Substitution nicht übersteigt. Dagegen können Gleichungen höherer Grade im allgemeinen *nicht* ineinander linear transformiert werden. Zwei biquadratische Gleichungen stellen nur dann projektive Gruppen von je vier Punkten dar, wenn bei irgend einer Zuordnung derselben die Doppelverhältnisse gleich sind.

Wir haben auch schon erkannt, welche quadratische Gleichungen oder welche Punktepaare nicht linear verwandt sind. Da jeder einzelne Linearfaktor wieder in einen Linearfaktor transformiert wird, kann ein vollständiges Quadrat nur wieder in ein solches übergehen. Wenn also die Diskriminante Δ einer gegebenen quadratischen Gleichung Null ist,

so verschwinden auch die Diskriminanten aller ihrer linear transformierten Gleichungen. Daher kann die Diskriminante durch die Transformation nur durch den Zutritt eines von dieser abhängigen Faktors geändert werden. In der Tat wird $a_x^2 \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ durch die Transformation (2) mit $\varrho = 1$ übergeführt in

$$\begin{aligned} a'^2_{x'} &\equiv a_{11}'x_1'^2 + 2a_{12}'x_1'x_2' + a_{22}'x_2'^2 \\ &\equiv \{a_{11}\alpha_{11}^2 + 2a_{12}\alpha_{11}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{21}^2\}x_1'^2 \\ &+ \{a_{11}\alpha_{12}^2 + 2a_{12}\alpha_{12}\alpha_{22} + a_{22}\alpha_{22}^2\}x_2'^2 \\ + 2\{a_{11}\alpha_{11}\alpha_{12} &+ a_{12}(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) + a_{22}\alpha_{21}\alpha_{22}\}x_1'x_2' = 0, \end{aligned}$$

und nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten erhält man

$$(3)\quad \varDelta' = a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2 = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = \triangle^2 . \varDelta .$$

Die Diskriminante $\varDelta'$ der transformierten Form ist das Produkt aus der Diskriminante $\varDelta$ der ursprünglichen Form in das Quadrat des Substitutionsmoduls $\triangle$.

Allgemein versteht man unter der *Diskriminante* einer durch

$$(4)\quad U \equiv a_x^n \equiv a_0x_1^n + \binom{n}{1}a_1x_1^{n-1}x_2 + \binom{n}{2}a_2x_1^{n-2}x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n$$

dargestellten binären Form n^{ten} Grades diejenige Funktion der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ von (4), deren Verschwinden notwendig ist, wenn zwei Elemente der durch $U = 0$ bestimmten Gruppe von n Elementen zusammenfallen sollen. Im folgenden werden wir zeigen, daß man die Diskriminante durch Elimination von x_1 und x_2 aus

$$(5)\qquad U_1 \equiv \frac{1}{n}\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \text{ und } U_2 \equiv \frac{1}{n}\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$$

erhält.

Zum Beweise dieser Behauptung beachte man, daß ein in U *doppelt* enthaltener linearer Faktor $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2$ in U_1 und U_2 als *einfacher* Faktor auftritt; denn wenn U von der Form $(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^2 \cdot u$ ist, so wird

$$6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2\alpha_1(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)u + (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^2\frac{\partial u}{\partial x_1} \\ &= (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\left\{2\alpha_1u + (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\}, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\left\{2\alpha_2u + (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\}. \end{aligned} \right.$$

Für $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ verschwinden also neben U auch U_1 und U_2.

Umgekehrt kann man zeigen, daß die Form U durch $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2$ teilbar ist, wenn U_1 und U_2 den gemeinsamen Faktor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ haben. In diesem Falle ist nämlich auch U zunächst durch $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^1$ ohne Rest teilbar, denn auf Grund des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen ist

$$n U = x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \quad \text{oder} \quad U = x_1 U_1 + x_2 U_2. \tag{7}$$

Ein in U_1 und U_2 enthaltener Faktor ist daher auch Faktor von U, man kann also $U \equiv (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) v$ setzen, und hieraus folgt

$$\left\{\begin{aligned} n U_1 &= \frac{\partial U}{\partial x_1} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\left\{\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\alpha_1 v}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}\right\}, \\ n U_2 &= \frac{\partial U}{\partial x_2} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\left\{\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\alpha_2 v}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Da nun U_1 und U_2 *ganze* Funktionen von x_1 und x_2 mit dem Faktor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ sind, muß v durch $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ohne Rest teilbar sein, es ist etwa $v \equiv (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) u$, somit in der Tat $U \equiv (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 \cdot u$.[61])

Da man das Ergebnis der Elimination von x_1 und x_2 aus zwei in x_1, x_2 homogenen Gleichungen als *Resultante* dieser Gleichungen bezeichnet, *ist also die Diskriminante irgend einer binären Form allgemein die Resultante ihrer partiellen Ableitungen.*

Die Diskriminante einer *quadratischen* Form ist daher die Determinante ihrer linearen Ableitungen

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0, \quad a_{12} x_1 + a_{22} x_2 = 0;$$

als Funktion der Wurzeln α_1, α_2 lautet sie dann, wegen

$$\alpha_1 \alpha_2 = a_{22} : a_{11}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -2 a_{12} : a_{11},$$

$$4\Delta = -a_{11}^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2. \tag{9}$$

Die Ableitungen der transformierten quadratischen Form $a'^2_{x'}$ gehen aus den vorigen nicht einfach dadurch hervor, daß man die ursprünglichen Ableitungen transformiert, sondern es besteht die Identität

$$\begin{aligned} a_{11}' x_1' + a_{12}' x_2' &= \alpha_{11}(a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + \alpha_{21}(a_{12} x_1 + a_{22} x_2), \\ a_{12}' x_1' + a_{22}' x_2' &= \alpha_{12}(a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + \alpha_{22}(a_{12} x_1 + a_{22} x_2), \end{aligned}$$

sobald die x_i linear durch die x_i' ausgedrückt werden. Die neuen Ableitungen entstehen daher aus den ursprünglichen so, wie wenn diese als Elemente einer Transformation unterworfen würden, die zu der auf die x_i angewandten als die transponierte (Nr. 91) gehört.

327. **Invarianten.** Die Diskriminante gehört zu der Gattung wichtiger Funktionen, die man Invarianten nennt (Nr. 91). *Eine algebraische Funktion* $J(a)$ *der Koeffizienten* a *einer Form heißt Invariante, wenn nach linearer Transformation der Form dieselbe, in den transformierten Koeffizienten* a' *gebildete Funktion* $J(a')$ *ein Produkt von* $J(a)$ *in eine Potenz des Substitutionsmoduls ist:*

$$J(a') = \Delta^r \cdot J(a). \tag{10}$$

Man bezeichnet eine solche Funktion als unveränderlich oder invariant bis auf einen Faktor Δ^r, und insbesondere als *absolute Invariante*, wenn dieser Faktor Eins ($J(a') = J(a)$) ist.

Die Bildung solcher Invarianten ist von größter Wichtigkeit für die analytische Geometrie, denn *das Verschwinden einer Invariante drückt eine projektive Eigenschaft des durch die Gleichung dargestellten Gebildes aus.* In der Tat verschwindet dieselbe Koeffizientenfunktion für alle projektiven Gebilde gleichzeitig. Wir können dafür auch gleichbedeutend sagen, daß die definierte Eigenschaft des gegebenen Gebildes vom Koordinatensystem unabhängig ist, denn eine Koordinaten-Transformation ist eine lineare Transformation.

In dem Teil der Algebra, den man als Invariantentheorie oder Algebra der linearen Transformationen bezeichnet, wird gezeigt, wie man Invarianten bildet.

Hat eine Form mehr als eine Invariante, so hat sie auch absolute Invarianten, z. B. $J_1^s : J_2^r$, wenn zwei Invarianten $J_1(a') = \Delta^r \cdot J_1(a)$, $J_2(a') = \Delta^s \cdot J_2(a)$ vorhanden sind. *Damit zwei Formen linear verwandt seien, müssen auch ihre absoluten Invarianten übereinstimmen.* Nun können die Substitutionskoeffizienten stets so bestimmt werden, daß vier transformierte Koeffizienten gegebene Werte haben, also müssen im Falle einer binären Form n^{ten} Grades noch $n \dot{-} 3$ Beziehungen zwischen den Koeffizienten der beiden Formen erfüllt sein.

Diese Beziehungen lassen sich aber stets durch Gleichheiten absoluter Invarianten ersetzen.[62]) Demnach hat eine binäre Form n^{ten} Grades $n-3$ unabhängige absolute Invarianten, die biquadratische Form z. B. eine. Eine quadratische oder kubische Form kann daher überhaupt nicht mehr als eine Invariante haben, nämlich ihre Diskriminante.

Die Definition der *Invarianteneigenschaft* durch die Gleichung (10) ist nicht an Funktionen von Koeffizienten nur *einer* Form gebunden. *Eine algebraische Funktion* $\mathfrak{J}$ *der Koeffizienten* $a, b, \ldots$ *mehrerer Formen, die bei gleichzeitiger Transformation derselben invariant ist, heißt eine Simultaninvariante derselben* (Invariante des Systems simultaner Formen):

$$(11) \qquad \mathfrak{J}(a', b', \ldots) = \Delta^r \cdot \mathfrak{J}(a, b, \ldots).$$

Das Verschwinden einer Simultaninvariante definiert eine projektive Beziehung der gleichzeitig untersuchten Gebilde.

Zwei lineare Formen a_x, b_x *haben nur eine Simultaninvariante, ihre Determinante* $a_1 b_2 - a_2 b_1$. Denn es ist

$$a_1' b_2' - a_2' b_1' = \Delta \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1);$$

und es kann keine zweite Invariante geben, weil zwei getrennten Punkten irgend zwei andere getrennte Punkte projektiv zugeordnet werden können.

Ganz allgemein gilt der Satz: Gleichungen oder Gleichungssysteme derselben Grade sind äquivalent oder stellen projektive Gebilde dar, wenn gleichgebildete Invarianten gleichzeitig Null und alle gleichgebildeten absoluten Invarianten gleichwertig sind.

328. **Harmonische Invariante.** Zwei quadratische Gleichungen $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ können nicht simultan in zwei beliebige andere $a_x'^2 = 0$, $b_x'^2 = 0$ linear transformiert werden; als geometrische Bedingung hierfür ist notwendig und hinreichend die Gleichheit der Doppelverhältnisse der Elementenpaare. Bildet man aus den Wurzelpaaren α_1, α_2; β_1, β_2 der gegebenen Gleichungen das Doppelverhältnis

$$(12) \qquad d = (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2) = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2 - \beta_1} : \frac{\alpha_1 - \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2},$$

so ist

$$(13) \qquad \frac{1+d}{1-d} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) - 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)}$$

und in den Koeffizienten ausgedrückt

$$\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2 = \frac{1\{2a_{12}b_{12} - (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})\}^2}{4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}. \tag{14}$$

Somit ist die rechte Seite hier eine absolute Simultaninvariante des Gleichungspaares.

Der Nenner ist das Produkt der beiden Diskriminanten $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, ändert sich also um $\triangle^4$ bei der Transformation. Daher ist auch die Quadratwurzel aus dem Zähler eine Invariante, die sich um $\triangle^2$ ändert. Das Verschwinden des Nenners zeigt, daß zwei Elementenpaare nur dann $d = 1$ ergeben, wenn das eine von ihnen aus zusammenfallenden Elementen besteht (Nr. 83). Der Zähler dagegen verschwindet, wenn $d = -1$ ist, d. h. *die Bedingung für die harmonische Trennung der beiden Elementenpaare ist*

$$\Theta \equiv a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} = 0, \tag{15}$$

in der Tat die schon in Nr. 16 gefundene Beziehung.

Die linke Seite dieser Gleichung mag daher als die *harmonische Simultaninvariante* Θ bezeichnet werden. Algebraisch folgt ihre Invarianteneigenschaft unmittelbar daraus, daß sich Θ in der symbolischen Form $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$ schreiben läßt, d. h. als das Quadrat der Simultaninvariante der linearen Formen a_x, b_x (Nr. 327).

329. **Resultante.** Aus der absoluten Simultaninvariante (14) sind weitere Invarianten abzuleiten. Sowohl $d = 0$ als $d = \infty$ ergibt z. B. die Beziehung

$$\Theta^2 - 4\varDelta_1\varDelta_2 = 0 \tag{16}$$

als Bedingung dafür, daß die Gleichungen $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ eine gemeinsame Wurzel haben, d. h. als ihre *Resultante*. In der Tat lautet die linke Seite, in den Wurzeln geschrieben,

$$\{(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) - 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\}^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\beta_1 - \beta_2)^2$$
$$\text{oder } 4(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2).$$

Nun ist aber $\Theta^2 - 4\varDelta_1\varDelta_2$ eine Invariante, *denn jede rationale Funktion von $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, Θ hat die Invarianteneigenschaft.* Absolute Invarianten sind unter den rational gebrochenen Funktionen offenbar diejenigen, die bezüglich der Koeffizienten die nullte Dimension haben. Umgekehrt lehrt die Invarianten-

theorie, *daß sich überhaupt alle Invarianten des quadratischen Formenpaares durch Δ_1, Δ_2, Θ rational ausdrücken lassen.*

Die Resultante insbesondere kann man auch in Determinantenform bilden. Multipliziert man nämlich die beiden Formen a_x^2, b_x^2 mit den linearen Binomen β_x bez. α_x, die die nicht gemeinsamen in b_x^2 bez. a_x^2 enthaltenen linearen Faktoren darstellen, so müssen die Produkte $a_x^2\beta_x$ und $b_x^2\alpha_x$ identisch sein. Die viergliedrige Identität

$$a_x^2\beta_x - b_x^2\alpha_x \equiv 0$$

liefert somit die in α_1, α_2, β_1, β_2 linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_{11}\beta_1 \qquad\qquad - b_{11}\alpha_1 \qquad\qquad &= 0,\\
2a_{12}\beta_1 + a_{11}\beta_2 - 2b_{12}\alpha_1 - b_{11}\alpha_2 &= 0,\\
a_{22}\beta_1 + 2a_{12}\beta_2 - b_{22}\alpha_1 - 2b_{12}\alpha_2 &= 0,\\
a_{22}\beta_2 \qquad\qquad - b_{22}\alpha_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Resultante ist die Bedingung dafür, daß diese in β_1, β_2, α_1, α_2 homogenen und linearen Gleichungen nebeneinander bestehen, sie lautet also

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & b_{11} & 0\\ 2a_{12} & a_{11} & 2b_{12} & b_{11}\\ a_{22} & 2a_{12} & b_{22} & 2b_{12}\\ 0 & a_{22} & 0 & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

die man leicht umformt in

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} 2(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}), & a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}\\ a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}\ , & 2(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}) \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$(19)\quad 4(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}) - (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 = 0.$$

B. 1) Das Doppelverhältnis zweier Elementenpaare, als Funktion der Invarianten ausgedrückt, ist

$$\frac{\Theta - 2\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}{\Theta + 2\sqrt{\Delta_1\Delta_2}} \text{ bez. } \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}{\Theta - 2\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}.$$

2) Man soll den Ort eines Punktes so bestimmen, daß die von ihm an zwei feste Kegelschnitte gezogenen Tangenten ein harmonisches Büschel bilden.

Wir denken die beiden Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Polardreieck bezogen:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0, \quad b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0.$$

Dann wird das vom Punkte y an den ersten Kegelschnitt gehende Tangentenpaar nach Nr. 313 ausgedrückt durch

$$(a_{11}y_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot) - (a_{11}y_1x_1 + a_{22}y_2x_2 + a_{33}y_3x_3)^2 = 0$$

und für die Schnittpunkte des Tangentenpaares in der Fundamentallinie $x_3 = 0$ folgt

$$a_{11}(a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2)x_1^2 + a_{22}(a_{33}y_3^2 + a_{11}y_1^2)x_2^2$$
$$- 2a_{11}a_{22}y_1y_2x_1x_2 = 0.$$

Indem man die Bedingung bildet, unter der das so bestimmte Punktepaar mit dem ebenso aus der Gleichung des zweiten Kegelschnittes abgeleiteten Paare eine harmonische Teilung gibt, erhält man die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$a_{11}b_{22}(a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2)(b_{33}y_3^2 + b_{11}y_1^2)$$
$$+ a_{22}b_{11}(a_{33}y_3^2 + a_{11}y_1^2)(b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2) - 2a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}y_1^2y_2^2 = 0,$$

woraus nach Abscheidung des Faktors y_3^2 und nach Vertauschung der y_i mit laufenden Koordinaten x_i die Gleichung

$$a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 + a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})x_2^2$$
$$+ a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_3^2 = 0$$

hervorgeht.

Die wichtigen Beziehungen dieses Kegelschnittes $2k(x, x) = 0$, der sogenannten *harmonischen Kurve 2. Ordnung*, zu den gegebenen werden wir in Nr. 354 und 356 kennen lernen.

3) Wenn in die Gleichungen von zwei Kegelschnitten $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ für x_i die Ausdrücke $\lambda x_i + \mu y_i$ eingesetzt werden, so folgt aus den in der Form

$$\lambda^2 f(x, x) + 2\lambda\mu f(x, y) + \mu^2 f(y, y) = 0,$$
$$\lambda^2 g(x, x) + 2\lambda\mu g(x, y) + \mu^2 g(y, y) = 0$$

(Nr. 306) geschriebenen Substitutionsergebnissen nach den vorstehenden Betrachtungen, daß $g(y, y)f(x, x) + f(y, y)g(x, x) - 2f(x, y)g(x, y) = 0$ das durch den Punkt y_i gehende Geradenpaar darstellt, das von den beiden Kegelschnitten in harmonischen Punkten geschnitten wird. In demselben Falle ist die Gleichung des Systems der vier vom Punkte y_i nach den Schnittpunkten der Kegelschnitte gezogenen Geraden:

$$\{g(y, y)f(x, x) + f(y, y)g(x, x) - 2f(x, y)g(x, y)\}^2$$
$$- 4\{f(y, y)f(x, x) - f^2(x, y)\}\{g(y, y)g(x, x) - g^2(x, y)\} = 0,$$

und $f(y, y)f(x, x) - f^2(x, y) = 0$, $g(y, y)g(x, x) - g^2(x, y) = 0$ sind die Paare der von y_i an die Kegelschnitte gezogenen Tangenten.

4) Welches ist die Hüllkurve der Kegelschnitte, die durch drei gegebene Punkte gehen und eine feste Strecke harmonisch teilen?

Wir nehmen die drei Punkte als Fundamentalpunkte, der Kegelschnitt hat alsdann die Gleichung

$$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0;$$

y_i und z_i seien die Koordinaten der Streckenendpunkte. Dann haben

die dem Doppelverhältnis α entsprechenden Teilpunkte Koordinaten von der Form $y_i + \lambda z_i$ bez. $y_i + \mu z_i$, wobei $\mu = \lambda\alpha$ ist und λ einen veränderlichen Parameter bedeutet. Die Gleichung des durch diese Punkte und die Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Kegelschnittes wird

$$\begin{vmatrix} x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \\ (y_2+\lambda z_2)(y_3+\lambda z_3) & (y_3+\lambda z_3)(y_1+\lambda z_1) & (y_1+\lambda z_1)(y_2+\lambda z_2) \\ (y_2+\alpha\lambda z_2)(y_3+\alpha\lambda z_3) & (y_3+\alpha\lambda z_3)(y_1+\alpha\lambda z_1) & (y_1+\alpha\lambda z_1)(y_2+\alpha\lambda z_2) \end{vmatrix} =$$

oder, wenn man $k_i = y_j z_k - y_k z_j$ setzt:

$$\begin{aligned} &(y_1^2 k_1 x_2 x_3 + y_2^2 k_2 x_3 x_1 + y_3^2 k_3 x_1 x_2) \\ &+ \lambda(1+\alpha)\{y_1 z_1 k_1 x_2 x_3 + y_2 z_2 k_2 x_3 x_1 + y_3 z_3 k_3 x_1 x_2\} + \\ &+ \lambda^2\alpha(z_1^2 k_1 x_2 x_3 + z_2^2 k_2 x_3 x_1 + z_3^2 k_3 x_1 x_2) = 0. \end{aligned}$$

Demnach ist die Gleichung der Hüllkurve

$$\begin{aligned} &(1+\alpha)^2\{y_1 z_1 k_1 x_2 x_3 + y_2 z_2 k_2 x_3 x_1 + y_3 z_3 k_3 x_1 x_2\}^2 \\ &- 4\alpha(y_1^2 k_1 x_2 x_3 + y_2^2 k_2 x_3 x_1 + y_3^2 k_3 x_1 x_2) \\ &\qquad (z_1^2 k_1 x_2 x_3 + z_2^2 k_2 x_3 x_1 + z_3^2 k_3 x_1 x_2) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &(1-\alpha)^2\{y_1 z_1 k_1 x_2 x_3 + y_2 z_2 k_2 x_3 x_1 + y_3 z_3 k_3 x_1 x_2\}^2 \\ &- 4\alpha k_1 k_2 k_3 (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) x_1 x_2 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Diese ist also eine Kurve vierter Ordnung, die die Ecken des Fundamentaldreiecks zu Doppelpunkten hat und von der Geraden der Strecke in ihren beiden Endpunkten berührt wird. Für die harmonische Teilung insbesondere geht die Gleichung über in das Produkt der Kegelschnittgleichungen

$$y_1^2 k_1 x_2 x_3 + \cdot + y_3^2 k_3 x_1 x_2 = 0 \text{ und } z_1^2 k_1 x_2 x_3 + \cdot + z_3^2 k_3 x_1 x_2 = 0,$$

d. h. die Hüllkurve ist der vierte Punkt, der diesen beiden Kegelschnitten gemeinsam ist. *Alle einem festen Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitte, die eine feste Strecke harmonisch teilen, gehen durch einen vierten festen Punkt.* (Vgl. Nr. 349, 3 f.)

330. **Kovarianten.** In der Form (18) auf Seite 174 erscheint die Resultante zweier quadratischer Formen als die Diskriminante einer dritten quadratischen Gleichung

$$(20)\quad \begin{cases} (a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})x_1^2 + (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})x_1 x_2 \\ \qquad + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Diese definiert nach Nr. 17 das zu den beiden gegebenen gleichzeitig harmonisch konjugierte Elementenpaar.

Nun sind in der Projektivität, die $a_x'^2 = 0$, $b_x'^2 = 0$ den Paaren $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ zuordnet, auch die gemeinsamen harmonischen Paare homolog. Also muß der Ausdruck (20) durch

lineare Transformation gleichbedeutend werden mit dem Ausdruck, der ebenso aus dem transformierten Gleichungspaar $a_x'^2 = 0$, $b_x'^2 = 0$ gebildet ist. Wirklich ist die linke Seite des letztgenannten Ausdruckes gleich der mit $\triangle$ multiplizierten linken Seite von (20).

Man beweist dies durch die Darstellung der Gleichung (20) in Gestalt der *Funktionaldeterminante*:

$$(21) \qquad F \equiv \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2, & b_{12}x_1 + b_{22}x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

deren Elemente die mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten partiellen Ableitungen von a_x^2, b_x^2 nach x_1, x_2 sind. Sofern $x_1 | x_2$ und $x_1' | x_2'$ durch die Substitution (2), wobei $\varrho = 1$ sei, identisch verbunden sind, bestehen zwischen den Ableitungen einer Form S beliebigen Grades die Identitäten (Nr. 325):

$$\frac{\partial S}{\partial x_1'} = \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} = \alpha_{11} \frac{\partial S}{\partial x_1} + \alpha_{21} \frac{\partial S}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial S}{\partial x_2'} = \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} = \alpha_{12} \frac{\partial S}{\partial x_1} + \alpha_{22} \frac{\partial S}{\partial x_2}.$$

Da somit die Ableitungen invers transformiert werden, gilt allgemein für zwei binäre Formen S_1, S_2 die Determinantenbeziehung

$$(22) \qquad \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial x_1'} \frac{\partial S_2}{\partial x_2'} - \frac{\partial S_1}{\partial x_2'} \frac{\partial S_2}{\partial x_1'} = \triangle \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_1} \frac{\partial S_2}{\partial x_2} - \frac{\partial S_1}{\partial x_2} \frac{\partial S_2}{\partial x_1} \right), \right.$$

z. B. auch $F' = \triangle \cdot F$.

Kovariante einer Form oder mehrerer simultaner Formen heißt eine Funktion $\mathbf{C}(x, a)$ *der Veränderlichen und der Koeffizienten, wenn nach linearer Transformation dieselbe, in den transformierten Veränderlichen* x' *und Koeffizienten* a' *gebildete Funktion* $\mathbf{C}(x', a')$ *ein Produkt von* $\mathbf{C}(x, a)$ *in eine Potenz* $\triangle^r$ *des Substitutionsmoduls ist.* Somit ist die Funktionaldeterminante zweier binärer Formen eine simultane Kovariante derselben; man nennt sie die *Jacobische Kovariante.* Die Definition der Kovarianten umfaßt die Invarianten als Sonderfall.

Aus der definierenden Identität folgt auch die weitere

$$(23) \qquad \mathbf{C}(x, a') = \triangle^r \cdot \mathbf{C}(x', a).$$

Das Verschwinden einer Kovariante oder *eine kovariante Gleichung drückt daher ein geometrisches Gebilde aus, dessen Beziehung zu dem gegebenen oder den gegebenen projektiv ist.*

Also haben diese und das kovariante Gebilde notwendig gewisse verschwindende Simultaninvarianten, z. B. eines der Punktepaare mit $F = 0$ die harmonische $\Theta = 0$. *Eine Invariante einer Kovariante ist nach der Definition auch eine Invariante der Originalform,* z. B. ist die Diskriminante von F die Resultante von a_x^2, b_x^2.

Die Invariantentheorie lehrt, daß *eine* binäre quadratische Form keine von ihr selbst verschiedene, *zwei* solche Formen S, S' außer F und rationalen Funktionen von S, S', F keine anderen simultanen Kovarianten haben.

331. **Invariantentheorie der Involution.** Zwei Elementenpaare $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ bestimmen nach Nr. 17 eine Involution, deren Paare in der Gleichung

$$a_x^2 + \lambda b_x^2 = 0 \tag{24}$$

enthalten sind. Wir betrachten also eine Parameterverbindung von zwei quadratischen Formen wiederum als eine solche Form.

Setzt man die Diskriminante dieser Form gleich Null, so bestimmt die so entstehende Gleichung

$$(a_{11} + \lambda b_{11})(a_{22} + \lambda b_{22}) - (a_{12} + \lambda b_{12})^2 = 0 \tag{25}$$

die Parameter zweier je in einen Punkt zusammenfallender Paare, der beiden Doppelelemente (Nr. 17). Diese Funktion hat ihre Invarianteneigenschaft für jeden beliebigen Wert des Parameters, also unabhängig von λ. Daher sind schon die Koeffizienten der nach Potenzen von λ geordneten Diskriminante Invarianten. In der Tat lautet die Entwickelung

$$\Delta_1 + \lambda\Theta + \lambda^2\Delta_2, \tag{26}$$

führt also ausschließlich auf die Diskriminanten der einzelnen und die harmonische Simultaninvariante beider Paare*).

Die Parameter der Doppelelemente sind absolute Invarianten, nämlich

$$\lambda_1 = \frac{-\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 4\Delta_1\Delta_2}}{2\Delta_2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\Theta - \sqrt{\Theta^2 - 4\Delta_1\Delta_2}}{2\Delta_2}.$$

Deshalb haben die Doppelelemente eine projektive Beziehung

---

*) Ebenso ist die harmonische Invariante der Paare λ', λ'':

$$2\Delta_1 + (\lambda' + \lambda'')\Theta + 2\lambda'\lambda''\Delta_2.$$

zu den gegebenen Elementenpaaren. Das aus ihnen gebildete, der Involution nicht angehörige Elementenpaar ist also durch eine kovariante Gleichung darzustellen. Das Quadrat derselben läßt sich unmittelbar als das Produkt der die Doppelelemente einzeln definierenden Gleichungen bilden, als

$$(27)\qquad \begin{cases} \Delta_2(a_x^2+\lambda_1 b_x^2)(a_x^2+\lambda_2 b_x^2) \\ \equiv \Delta_2(a_x^2)^2-\Theta a_x^2 b_x^2+\Delta_1(b_x^2)^2=0\,. \end{cases}$$

Man bestätigt leicht, daß diese biquadratische Kovariante gleich $-F^2$ ist, wo F die frühere quadratische Kovariante ist. Also bilden die Doppelelemente das gemeinsame harmonische Paar zu den Involutionspaaren, in Übereinstimmung mit Nr. 17.

In einer Involution können die im allgemeinen getrennten Doppelelemente zu Fundamentalelementen gewählt werden. Bezeichnen wir sie als z_1, z_2 mit $a_x^2+\lambda_1 b_x^2=z_1^2$, $a_x^2+\lambda_2 b_x^2 = z_2^2$, $(\lambda_1 \gtrless \lambda_2)$, so kann die Gleichung der Involution in der Gestalt

$$(28)\qquad z_1^2-\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2}\,z_2^2=0$$

geschrieben werden, aus der die harmonische Trennung der Paare durch die Doppelelemente sofort hervorgeht.

Die Doppelelemente fallen zusammen $(\lambda_1=\lambda_2)$, die Involution ist parabolisch, wenn die Invariante $\Theta^2-4\Delta_1\Delta_2$ verschwindet. Denn für $(a_{11}+\lambda b_{11})(a_{22}+\lambda b_{22})-(a_{12}+\lambda b_{12})^2 = -(p_1+\lambda p_2)^2$ ist es erlaubt zu setzen

$$a_{11}+\lambda b_{11}=m\,\{(a_{12}+\lambda b_{12})+(p_1+\lambda p_2)\},$$
$$a_{22}+\lambda b_{22}=\frac{1}{m}\,\{(a_{12}+\lambda b_{12})-(p_1+\lambda p_2)\}.$$

Dann geht die Gleichung der Involution über in

$$(a_{12}+\lambda b_{12})(mx_1^2+2x_1x_2+\frac{1}{m}x_2^2)+(p_1+\lambda p_2)(mx_1^2-\frac{1}{m}x_2^2)=0$$

oder

$$(mx_1+x_2)\{(a_{12}+\lambda b_{12})(mx_1+x_2)+(p_1+\lambda p_2)(mx_1-x_2)\}=0\,.$$

Somit löst sich die parabolische Involution in einen Punkt und eine einfache Punktreihe, bez. in einen Strahl und ein einfaches Strahlenbüschel auf (Nr. 18).

B. 1) Nach Gleichung (80) in Nr. 17 ist

$$\begin{vmatrix} 1 & -(\alpha_1+\alpha_2) & \alpha_1\alpha_2 \\ 1 & -(\beta_1+\beta_2) & \beta_1\beta_2 \\ 1 & -(\gamma_1+\gamma_2) & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Elementenpaare α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 einer Involution angehören. Die Multiplikation dieser Bedingung mit

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_1^2 & \beta_1 & 1 \\ \gamma_1^2 & \gamma_1 & 1 \end{vmatrix} \text{ bez. } \begin{vmatrix} \delta^2 & \delta & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}$$

oder mit $-(\beta_1-\gamma_1)(\gamma_1-\alpha_1)(\alpha_1-\beta_1)$, bez. mit $-(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\delta)(\delta-\alpha_1)$ liefert Gleichungen, die die Doppelverhältnisgleichheiten

$$(A_1C_1B_2C_2) = (A_2C_2B_1C_1), \quad (A_1A_2B_1C_1) = (A_2A_1B_2C_2)$$

und die durch die Vertauschung von A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 unter sich, bez. von A_1A_2 mit B_1B_2 oder C_1C_2 daraus hervorgehenden aussprechen.

2) Man bestimme in zwei involutorischen Reihen auf derselben Geraden das beiden gemeinsame Paar entsprechender Punkte.

Sind jene durch die Punktepaare $a_x^2=0$, $b_x^2=0$, $a_x'^2=0$, $b_x'^2=0$ gegeben, so sind nach (74) in Nr. 17 die Paare ihrer sich selbst konjugierten Punkte:

$$(a_{12}b_{11}-a_{11}b_{12})x_1^2+(a_{22}b_{11}-a_{11}b_{22})x_1x_2+(a_{22}b_{12}-a_{12}b_{22})x_2^2=0,$$
$$(a'_{12}b'_{11}-a'_{11}b'_{12})x_1^2+(a'_{22}b'_{11}-a'_{11}b'_{22})x_1x_2+(a'_{22}b'_{12}-a'_{12}b'_{22})x_2^2=0.$$

Das gemeinsame Paar muß mit beiden zugleich harmonisch sein, d. h. seine Gleichung muß aus den beiden letzten Gleichungen ebenso gebildet sein, wie diese aus den Paaren der gegebenen. Wann ist es nicht reell? (Nr. 18.)

332. **Projektivität.** Wenn vier Paare von Elementen A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; D_1, D_2, die wir durch die Wurzelpaare α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; δ_1, δ_2 von vier Gleichungen zweiten Grades dargestellt denken, die beiden Gruppen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ von gleichem Doppelverhältnis bestimmen, so folgt aus der Parametergleichung der Projektivität in Nr. 93 die schon dort aufgestellte *Bedingung der Projektivität von acht Elementen*

$$(29) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man in der Determinante die mit $\beta_1\delta_2$, $-\delta_2$, $-\beta_1$ bez. multiplizierten ersten Zeilen zur letzten addiert, nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt, die Determinantenfaktoren zu Determinanten zweiter Ordnung umformt, so lautet die Bedingung einfacher

$$(30) \qquad \begin{aligned} &(\alpha_2-\beta_2)(\beta_1-\gamma_1)(\gamma_2-\delta_2)(\delta_1-\alpha_1) \\ &= (\alpha_1-\beta_1)(\beta_2-\gamma_2)(\gamma_1-\delta_1)(\delta_2-\alpha_2), \end{aligned}$$

zum direkten Ausdruck der Doppelverhältnisgleichheit

$$(31) \qquad \frac{C_1B_1}{A_1B_1}:\frac{C_1D_1}{A_1D_1} = \frac{C_2B_2}{A_2B_2}:\frac{C_2D_2}{A_2D_2}$$

entsprechender Elemente.

Auf dieselbe Weise kann *die Projektivität zweier Reihen von beliebig vielen Elementen* ausgedrückt werden. Denn die Doppelverhältnisgleichheit aller homologen Elementenquadrupel kann durch das Verschwinden der Matrix

$$(32) \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & .. \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & .. \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & .. \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & .. \end{matrix} \right\| = 0$$

angezeigt werden, wenn dies bedeutet, daß *jede* der aus vier Spalten derselben Matrix gebildeten Determinanten verschwindet. Daß zwei projektive Systeme durch das eine und drei Paare entsprechender Punkte aus beiden vollkommen und auf lineare Weise bestimmt sind (Nr. 93, 288), ist daraus ersichtlich, daß alle Determinanten, die die zwei ersten Spalten enthalten, in den fehlenden Elementen linear sind.

Ebenso sind beliebige Paare α_1, α_2; β_1, β_2; usw. desselben Trägers in *Involution*, wenn die Beziehungen

$$(33) \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & .. \\ \alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2 & \gamma_1+\gamma_2 & .. \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & .. \end{matrix} \right\| = 0$$

erfüllt sind, denn jede der aus drei Spalten dieses Systems gebildeten Determinanten gibt durch ihr Verschwinden die involutorische Beziehung (80) in Nr. 17 der drei in sie eintretenden Paare.

Die Gleichung, die bei Berücksichtigung der drei ersten Spalten von (33) entsteht, ist aber auch eine einfache Um-

formung der Beziehung der *Projektivität* zwischen den beiden durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1$ bestimmten Gruppen. Man hat nämlich

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2 & \gamma_1+\gamma_2 & \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix},$$

und durch Subtraktion der Elemente der letzten Spalte von den entsprechenden Elementen der ersten folgt

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2 & \gamma_1+\gamma_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Involution der Paare $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ und Projektivität der aus vier Elementen derselben gebildeten Quadrupel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1$ sind daher geometrisch gleichbedeutende Bedingungen.

B. 1) Doppelelemente von zwei vereinigten projektiven Reihen. Sind $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1\, \gamma_2$ die zur Bestimmung hinreichenden Paare homologer Punkte, und ist durch δ einer der Doppelpunkte bestimmt, so hat man für δ die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \delta & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta^2 & \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Doppelelemente einer Involution sind in Nr. 331 gegeben.

2) Sind irgend sechs Elemente 1, 2, ..., 6 eines Elementargebildes gegeben und konstruiert man die drei Elementenpaare, die bez. zu 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 gleichzeitig harmonisch konjugiert sind, so bilden diese Paare eine Involution.

333. **Polaren.** Die durch $a_x^{\,2} = 0$ bestimmten Elemente können als Doppelelemente einer Involution aufgefaßt werden. In dieser sind $y_1 \,|\, y_2$ und $z_1 \,|\, z_2$ homologe Elemente, wenn die Doppelelemente durch $m_2 y_1 \pm m_1 z_1 \,|\, m_2 y_2 \pm m_1 z_2$ darstellbar sind. Die Einsetzung dieser Werte in $a_x^{\,2} = 0$ ergibt zur Bestimmung von $m_1 : m_2$

$$a_{11}(m_2 y_1 \pm m_1 z_1)^2 + 2 a_{12}(m_2 y_1 \pm m_1 z_1)(m_2 y_2 \pm m_1 z_2) \\ + a_{22}(m_2 y_2 \pm m_1 z_2)^2 = 0.$$

Dazu ist notwendig und hinreichend das Verschwinden der Differenz dieser Gleichungen oder

$$(34)\qquad a_{11}y_1z_1 + a_{12}(y_1z_2 - y_2z_1) + a_{22}y_2z_2 = 0.$$

Man erkennt in ihr einerseits die Parametergleichung der Involution wieder (Nr. 17 und 94), andrerseits die sogenannte *Polarform oder Polare von $a_x^2 = 0$*. In der symbolischen Schreibweise erscheint sie als ein Produkt $a_y a_z$, das für $y = z = x$ mit a_x^2 identisch wird.

Auch die Polare muß gemäß ihrer projektiven Bedeutung Invarianteneigenschaft besitzen. In der Tat zeigt dies die Anordnung

$$(35)\qquad y_1(a_{11}z_1 + a_{12}z_2) + y_2(a_{12}z_1 + a_{22}z_2) = 0,$$

da die Klammergrößen die transponierte Substitution erleiden, wenn $y_1 \mid y_2$ und $z_1 \mid z_2$ gleichzeitig und gleichartig transformiert werden (Nr. 330).

Somit müssen wir die Definition in Nr. 330 dadurch erweitern, daß wir auch *Kovarianten mit mehreren Reihen von kogredienten Veränderlichen* zulassen. Die Polarentheorie bietet die wichtigsten Beispiele mit zweierlei Veränderlichen.

Die Polare der Gleichung $a_x^2 + \lambda b_x^2 = 0$ enthält den Parameter ebenfalls linear:

$$(36)\qquad a_y a_z + \lambda b_y b_z = 0.$$

Einem Elemente oder Pole y entspricht also eine Reihe konjugierter Pole und diese Reihen sind projektiv, wenn sich y ändert. Man nennt diese Reihen auch zu der Involution projektiv, weil in jeder die Zuordnung der Elemente und der Paare eindeutig ist. Indessen ist der Satz in voller Allgemeinheit nur wahr, wenn der Fall singulärer Projektivität mit eingeschlossen wird. Denn für einen Doppelpunkt reduziert sich die Reihe konjugierter Pole offenbar auf den anderen Doppelpunkt.

B. 1) Um zu finden, für welche $y_1 \mid y_2$ die konjugierten Pole in einen $z_1 \mid z_2$ zusammenfallen, ist nur auszudrücken, daß die Polare unabhängig von k in ein Produkt

$$(\varrho y_1 - y_2)\{(a_{12} + kb_{12})z_1 + (a_{22} + kb_{22})z_2\} = 0$$

zerfalle. Man erhält als Bedingung

$$(a_{11} + \varrho a_{12})(b_{12} + \varrho b_{22}) = (a_{12} + \varrho a_{22})(b_{11} + \varrho b_{12}),$$

deren Identität mit der Kovariante (20) von Nr. 330 offenbar ist.

2) Wenn die Elementenpaare α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; δ_1, δ_2 eine Involution bilden, so haben die in bezug auf die einzelnen Paare konjugiert harmonischen Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ eines beliebigen Elementes ω ein von ω unabhängiges Doppelverhältnis d, d. h. die zu einem anderen Elemente ω' in gleicher Weise gehörigen $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ haben dasselbe Doppelverhältnis d. Nach Nr. 332 ist also

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}' & \mathfrak{b}' & \mathfrak{c}' & \mathfrak{d}' \\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}' & \mathfrak{b}\mathfrak{b}' & \mathfrak{c}\mathfrak{c}' & \mathfrak{d}\mathfrak{d}' \end{vmatrix} = 0.$$

Zum Beweise beachte man, daß die Gültigkeit dieser Gleichung durch Koordinatentransformation nicht gestört wird, man kann daher $\omega = 0$, $\omega' = \infty$ setzen und erhält (Nr. 328)

$$\mathfrak{a} = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \mathfrak{b} = \frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}, \text{ usw.}; \quad \mathfrak{a}' = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \mathfrak{b}' = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \text{ usw.}$$

Die vorausgesetzte Gleichung geht über in die neue

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} & \dfrac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} & \dfrac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} & \dfrac{\delta_1\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 & \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

die, nach den Elementen der zweiten Zeile entwickelt, tatsächlich nach (80) in Nr. 17 nur eine Folge der involutorischen Beziehung der Paare ist.[63])

334. **Höhere Polaren.** Wir verfolgen diese Betrachtungen wenigstens in einigen Hauptzügen auf das Gebiet der binären Formen höheren Grades.[64]) Es sei

$$(37) \qquad \begin{cases} U_x \equiv a_x^n \equiv a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 \\ \quad + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n \end{cases}$$

eine allgemeine Form n^{ten} Grades; alsdann bestimmt $U_x = 0$ *eine Gruppe von n Elementen x.* Wir können nun das Ergebnis der Einsetzung von $m_2 y_i + m_1 z_i$ statt x_i in die Gleichung nach dem Taylorschen Theorem angeben. Es soll hierbei die symbolische Schreibweise (Nr. 325) auch auf die Bildung der höheren Ableitungen ausgedehnt werden, so daß die r^{te} Potenz des Differentiationszeichens das Symbol der r^{ten} Differentiation ist, z. B.

$$\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 U_z = y_1^2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial z_1^2} + 2 y_1 y_2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial z_1 \partial z_2} + y_2^2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial z_2^2}, \text{ usw.}$$

Dann hat das Ergebnis die gleichbedeutenden Formen

$$(38) \qquad m_2^n U_y + \frac{n}{1} m_2^{n-1} m_1 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) U_y$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} m_2^{n-2} m_1^2 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 U_y + \cdots + m_1^n U_z = 0$$

und

$$(39) \qquad m_2^n U_y + \frac{n}{1} m_2^{n-1} m_1 \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-1} U_z$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} m_2^{n-2} m_1^2 \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-2} U_z + \cdots + m_1^n U_z = 0.$$

Notwendig sind die Entwickelungskoeffizienten beidemal dieselben; man nennt sie *Polarformen* von U_x und sieht, daß es $n-1$ solche gibt. Ist $r < n$, so gibt es eine Polarform, die in z_i von der r^{ten} und zugleich in y_i von der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

Demnach ordnet die Gleichung

$$(40) \quad \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^r U_y = 0 \text{ oder } \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-r} U_z = 0$$

jedem Elemente y_i r Elemente z_i und jedem Elemente z_i umgekehrt $n-r$ Elemente y_i zu. Jenachdem ein Element y oder z gegeben ist, definiert die Gleichung *die Polare r^{ter} Ordnung des Pols y* oder *die Polare $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung des Pols z* in bezug auf die Gruppe $U_x = 0$. *Gehört also z zur Polare r^{ter} Ordnung von y, so gehört auch y zur Polare $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung von z.*

Nun bestimmt die Taylorsche Entwickelung durch ihre Wurzeln $m_2 : m_1$ die n Teilverhältnisse*) der einzelnen Elemente von $U_x = 0$ mit angenommenen Elementen y und z, also

$$\frac{zx'}{yx'}, \frac{zx''}{yx''}, \ldots \text{ oder } \frac{\sin zx'}{\sin yx'}, \frac{\sin zx''}{\sin yx''}, \ldots,$$

jenachdem $U_x = 0$ als Gruppe von Punkten oder von Strahlen gedeutet wird. Wenn der Koeffizient von $m_2^{n-r} m_1^r$ verschwindet, *so hat die Summe aller Produkte von je r Teilverhältnissen $zx : yx$ der n Elemente x mit zwei Polen z, y den Wert Null:* diese Zuordnung von r Elementen z ist die geometrische Bedeutung der Polare r^{ter} Ordnung von y. So ist für den

*) Im allgemeinen ein konstantes Vielfache derselben.

Punkt z der Polare erster Ordnung von y die Summe der Teilverhältnisse

$$\frac{zx'}{yx'} + \frac{zx''}{yx''} + \cdots = 0 .$$

Die entwickelten Ausdrücke jener Polaren lassen sich durch Symbole von der Form

$$a_y^{n-r} a_z^r = 0 \tag{41}$$

darstellen, wenn in dem ausgeführten Produkt der Polynome jedes symbolische Glied $a_1^{n-k} a_2^k$ durch a_k ersetzt wird. Geht man von a_y^n aus und bildet nacheinander $a_y^{n-1} a_z$, $a_y^{n-2} a_z^2$, usw., so nennt man die Polare $(n-1)^{\text{ter}}$, $(n-2)^{\text{ter}}, \ldots$ Ordnung von z auch bez. die erste, zweite, ..., also $a_y^{n-r} a_z^r$ die r^{te} Polare von z. Weil nun $a_y^p a_z^q a_z^r = a_y^p a_z^{q+r}$ ist, gilt der Satz: *Bildet man die q^{te} und die $(q+r)^{\text{te}}$ Polare von z in bezug auf die gegebene Gruppe, so ist die letzte zugleich die r^{te} Polare von z in bezug auf die erste.* Dagegen erhält man $a_y^p a_z^q a_u^r$ als r^{te} Polare eines neuen Elementes u in bezug auf die q^{te} Polare $a_y^p a_z^q$ von z oder als die q^{te} Polare von z in bezug auf die r^{te} Polare $a_y^p a_u^r$ von u. So liest man überhaupt eine Reihe von Eigenschaften daraus ab, daß die symbolische Darstellung $a_y^p a_z^q a_u^r \ldots$ ungeändert bleibt, wenn die Elemente $y, z, u \ldots$ und zugleich die Ordnungszahlen $p, q, r \ldots$ der für sie gebildeten Polare vertauscht werden.

Denkt man die gegebene Gruppe aus einem Elemente $b_x = 0$ und einer Gruppe von $(n-1)$ Elementen $c_x^{n-1} = 0$ gebildet, so ist $n a_y a_z^{n-1} = b_y c_z^{n-1} + (n-1) b_z c_y c_z^{n-2}$; für $b_y = 0$ und $c_y c_z^{n-2} = 0$ ist also auch $a_y a_z^{n-1} = 0$, d. h. die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare einer Gruppe von $(n-1)$ Elementen ist auch die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare der Gruppe, die aus jenen $(n-1)$ Elementen und ihm selbst gebildet wird.

Fallen p Elemente der gegebenen Gruppe zusammen, so enthält die r^{te} Polare eines beliebigen Elementes $a_y^{n-r} a_z^r = 0$ das betreffende Element $(p-r)$ mal. Ist das vielfache Element c_z zugleich der Pol, so folgt aus $a_x^n = c_x^p b_x^{n-p}$ durch Bildung der r^{ten} Polare $a_y^{n-r} a_z^r = \lambda c_y^p b_y^{n-p-r} b_z^r$, d. h. *die r^{te} Polare des vielfachen Elementes selbst besteht aus diesem Element als einem p-fachen und aus der r^{ten} Polare desselben*

in bezug auf die übrigen $(n-p)$ *Elemente der Gruppe*, so lange $p+r<n$ ist.

335. Jacobische und Hessesche Determinante. Alle Polaren sind Kovarianten mit mehreren Paaren kogredienter Veränderlicher, da die durch $y_1\frac{\partial}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial}{\partial z_2}$ angedeutete Operation Invarianteneigenschaft hat (Nr. 333). Die Betrachtung der Polaren erster und zweiter Ordnung führt zu einigen wichtigen Kovarianten mit nur einem Paar von Veränderlichen. Wenn die ersten und zweiten Ableitungen einer Form durch Indizes bezeichnet werden, so daß[65])

$$(42)\qquad U_i=\frac{1}{n}\frac{\partial U_y}{\partial y_i},\qquad U_{ik}=\frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_i \partial y_k},$$

so lautet die *lineare* und die *quadratische Polare* von y

$$(43)\quad U_1z_1+U_2z_2=0 \text{ und } U_{11}z_1^2+2U_{12}z_1z_2+U_{22}z_2^2=0.$$

Nehmen wir gleichzeitig die lineare Polare eines Punktes y in bezug auf zwei Gruppen $U_x=0$, $V_x=0$ von n und m Punkten, so können die durch $U_1z_1+U_2z_2=0$, $V_1z_1+V_2z_2=0$ bestimmten Elemente z nur dann zusammenfallen, wenn y die Bedingung erfüllt

$$(44)\qquad U_1V_2-U_2V_1=0.$$

Die Jacobische Determinante $J\equiv U_1V_2-U_2V_1$ *der Funktionen* U *und* V *ist eine Kovariante* $(n+m-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung derselben*, denn sie ist die Determinante von Ausdrücken, die sich wie die Koeffizienten linearer Formen transformieren.

Die *quadratische Polare* von y kann zwei vereinigte Elemente oder ein Doppelelement z bestimmen, wenn ihre Diskriminante

$$(45)\qquad H\equiv U_{11}U_{22}-U_{12}^2=0$$

verschwindet. Diese Funktion H der zweiten Ableitungen einer Form heißt *die Hessesche Determinante der Form und ist eine Kovariante* $(2n-4)^{\text{ter}}$ *Ordnung derselben*, da sie eine Invariante einer Kovariante ist (Nr. 327). Für eine quadratische Form U sind die zweiten Ableitungen die Koeffizienten, H ist in diesem Fall die Diskriminante von U; wie für diese, so gilt allgemein der Satz, daß analog die Hessesche Determinante sich bei einer linearen Transformation um den Faktor Δ^2 ändert.

Die $2n-4$ Elemente y der kovarianten Gruppe $H=$ deren quadratische Polaren Doppelelemente sind, gehören sel als Doppelelemente zu den ersten Polaren von $2n-4$ Punkten Denn soll $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$ zu einem z zwei vereinigte E mente y liefern, so ist notwendig und hinreichend, daß (Ableitungen gleichzeitig verschwinden: $U_{11} z_1 + U_{12} z_2 =$ $U_{21} z_1 + U_{22} z_2 = 0$. *Also ist die Hessesche Determinante ei Form einfach die Jacobische Determinante ihrer ersten A leitungen.*

Man kann nun neue Kovarianten von U bilden als K varianten von H oder von U und H. So ist die Jacobisc Kovariante von U und H

$$T \equiv U_1 H_2 - U_2 H_1 = 0 \tag{46}$$

von der $(3n-6)^{\text{ten}}$ Ordnung. Sie ist das Ergebnis der E mination von z zwischen $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$ und $H_1 z_1 + H_2 z_2 =$ Also gibt es $3n-6$ Elemente z, deren erste Polaren in bez auf $U=0$ und $H=0$ ein gemeinsames Element haben, u $T=0$ ist die Gleichung dieser gemeinsamen Elemente.

336. **Involutionen höheren Grades.** Denken wir dur $U \equiv a_x^n = 0$, $V \equiv b_x^n = 0$ zwei Gruppen von je n Element im Gebilde erster Stufe bestimmt, so gibt die Gleichung

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0 \tag{47}$$

für λ als einen veränderlichen Parameter eine Reihe v Gruppen, die je aus n Elementen bestehen; jede dieser Gru pen ist durch *eines* ihrer Elemente bestimmt, während offe bar das ganze System durch irgend *zwei* seiner Gruppen v n Elementen bestimmt wird. Man nennt es eine *Involuti n^{ten} Grades.* (Unter Involution schlechtweg verstehen wir d jenige zweiten Grades.) So bilden die ersten Polaren $c_x^n c_y =$ einer gegebenen Gruppe $c_x^{n+1} = 0$ von $n+1$ Elementen ei Involution n^{ten} Grades.

Unter den Gruppen der Involution n^{ten} Grades gibt solche, die Doppelelemente enthalten; mit der Indexbezeic nung (42) der Ableitungen entsprechen jene der gleichzeitig Erfüllung der beiden Gleichungen $U_1 + \lambda V_1 = 0$, $U_2 + \lambda V_2 =$ Also sind sie bestimmt durch die Gleichung $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grad

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = 0. \tag{48}$$

Diese Gleichung der Doppelelemente ist die gleich Null gesetzte Jacobische Kovariante der Funktionen U und V; die Bestimmung der Doppelelemente in der quadratischen Involution (Nr. 331) ist der einfachste Fall hiervon.

Man nennt zwei *Involutionen projektiv*, wenn derselbe veränderliche Parameter λ in beiden die homologen Gruppen bestimmt:

$$(49) \qquad a_x^n + \lambda b_x^n = 0, \quad a_x'^m + \lambda b_x'^m = 0.$$

So bilden die ersten Polaren irgend zweier Systeme projektive Involutionen, in denen zwei homologe Gruppen demselben Pol entsprechen. Allgemeiner gilt der Satz: Wenn man für alle Gruppen einer Involution, eine beliebige Zahl *fester* Pole benutzend, die Polaren derselben Ordnung bildet, so sind alle Reihen dieser Systeme involutorisch und diese Involutionen zueinander projektiv. Da die $(n-1)^{\text{ten}}$ Polarsysteme insbesondere einfache Punktreihen (Strahlenbüschel) sind, so soll das Doppelverhältnis von irgend vier Elementen dieser Reihe auch das der entsprechenden Gruppen der gegebenen Involution oder der für ein beliebiges Element gebildeten Polaren heißen (Nr. 334). Da dasselbe nur von den Werten der λ abhängig ist, erhält man den Satz: *Das Doppelverhältnis einer Involution von vier Gruppen, die durch Polarenbildung oder Polarisierung aus vier Gruppen einer gegebenen Involution entstanden sind, ist gleich dem Doppelverhältnis dieser Gruppen und von dem als Pol benutzten Element unabhängig.*

In projektiven Involutionen gibt es homologe Gruppen, die ein Element gemein haben. Sie werden durch die Gleichung $a_x^n \cdot b_x'^m - b_x^n \cdot a_x'^m = 0$ bestimmt, die aus der Elimination des Parameters zwischen den Gleichungen der Involutionen entspringt. Also ist ihre Anzahl für zwei Involutionen von den Graden m bez. n gleich $(m+n)$.

Man darf dies auch so aussprechen: *Wenn sich in einem Elementargebilde zwei Reihen von Elementen gegenseitig so entsprechen, daß jedem Element der ersten Reihe n Elemente der zweiten und jedem Element der zweiten m Elemente der ersten entsprechen, so gibt es $(m+n)$ Elemente, die mit ihren jedesmaligen entsprechenden zusammenfallen.* Denn für λ, λ' als die

Teilverhältnisse entsprechender Elemente in bezug auf zwei feste Elemente des Systems ist der algebraische Ausdruck der ausgesprochenen Beziehung von der Form

$$(a_0 \lambda'^m + a_1 \lambda'^{m-1} + \text{usw.}) \lambda^n + \text{usw.} = 0$$

und liefert für $\lambda = \lambda'$ eine Gleichung vom Grade $(m + n)$ zur Bestimmung von λ.

Haben die Formen $a_x{}^n$ und $b_x{}^n$ einen Faktor vom Grade p gemeinsam, so gehören dessen p Elemente jeder Gruppe der Involution an, so daß diese aus p festen Elementen und einer Involution vom $(n - p)^{\text{ten}}$ Grade besteht. Wenn das nämliche mit den Formen $a_x'^m$ und $b_x'^m$ für einen Faktor vom Grade p' der Fall ist, so zerfällt die Gleichung der beiden Involutionen der gemeinschaftlichen Elemente $a_x{}^n \cdot b_x'^m - b_x{}^n \cdot a_x'^m = 0$ in die Faktoren von den Graden p und p' und einen Faktor vom Grade $m + n - (p + p')$, der die gemeinsamen Elemente liefert.

Enthält eine bestimmte Gruppe der einen involutorischen Reihe einen Faktor $p$fach, die entsprechende Gruppe der andern *denselben* Faktor $q$fach, so tritt das betreffende Element mit der Vielfachheit der kleineren von diesen beiden Zahlen in die Gruppe der gemeinsamen Elemente der Involutionen ein.[66])

337. **Diskriminante der kubischen Form.** Eine *kubische Gleichung* zwischen den Veränderlichen x_1, x_2

$$U \equiv a_0 x_1{}^3 + 3 a_1 x_1{}^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2{}^2 + a_3 x_2{}^3 = 0 \tag{50}$$

ist der algebraische Ausdruck eines Punktetripels x', x'', x''' in einer Geraden oder eines Strahlentripels x', x'', x''' aus einem Punkte.

Zwei Elemente des Tripels fallen nach Nr. 326 zusammen, wenn die Diskriminante $\varDelta$ von (50), also die Resultante der zwei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} U_1 &= a_0 x_1{}^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2{}^2 = 0, \\ U_2 &= a_1 x_1{}^2 + 2 a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2{}^2 = 0 \end{aligned}\right. \tag{51}$$

verschwindet. Man findet

$$\varDelta \equiv (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1{}^2)(a_1 a_3 - a_2{}^2) = 0, \tag{52}$$

oder entwickelt

$$\varDelta \equiv a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 = 0 .$$

Für $\frac{1}{2}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_0} = A_0, \quad \frac{1}{6}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_1} = A_1, \quad \frac{1}{6}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_2} = A_2, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_3} = A_3$ wird $2\varDelta = a_0 A_0 + 3 a_1 A_1 + 3 a_2 A_2 + a_3 A_3$.

Im Falle $\varDelta = 0$ finden die Beziehungen statt

$$A_0 A_2 = A_1^2, \quad A_0 A_3 = A_1 A_2, \quad A_1 A_3 = A_2^2;$$

für das Doppelelement $z_1 \mid z_2$ ergibt sich daher

$$z_1 : z_2 = A_0 : A_1 = A_1 : A_2 = A_2 : A_3. \tag{53}$$

In den Koordinaten $x_1' \mid x_2'$, $x_1'' \mid x_2''$, $x_1''' \mid x_2'''$ der durch die kubische Gleichung dargestellten Elemente wird die Diskriminante, da

$$U \equiv (x_1 x_2' - x_1' x_2)(x_1 x_2'' - x_1'' x_2)(x_1 x_2''' - x_1''' x_2), \tag{54}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varDelta = -\tfrac{1}{27}(x_1' x_2'' - x_1'' x_2')^2 (x_1'' x_2''' - x_1''' x_2'')^2 \\ (x_1''' x_2' - x_1' x_2''')^2. \end{aligned} \right. \tag{55}$$

In der Theorie der kubischen Gleichungen wird gezeigt, daß die Wurzeln von (50) reell und verschieden, reell und paarweise gleich oder endlich paarweise imaginär sind, jenachdem die Diskriminante negativ, gleich Null oder positiv ist. *Die Diskriminante ist eine Invariante der kubischen Form und zwar die einzige* (Nr. 327).

Die *Gleichheit aller Wurzeln* fordert die gleichzeitige Erfüllung der Beziehungen

$$U_{11} = a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0, \; U_{12} = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \; U_{22} = a_2 x_1 + a_3 x_2 = 0,$$

oder der durch Elimination von $x_1 \mid x_2$ entstehenden Bedingungen

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0, \quad a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0, \quad a_1 a_3 - a_2^2 = 0, \tag{56}$$

von denen je zwei die dritte nach sich ziehen; man kann hierfür auch $a_0 : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3$ schreiben.

338. **Kovarianten der kubischen Form.** Die lineare Polare von y in bezug auf eine durch (50) bestimmte Gruppe von drei Elementen hat die Gleichung

$$(a_0 y_1^2 + 2 a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2) z_1 + (a_1 y_1^2 + 2 a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2) z_2 = 0,$$

und die quadratische Polare ist

$$(a_0 y_1 + a_1 y_2) z_1^2 + 2(a_1 y_1 + a_2 y_2) z_1 z_2 + (a_2 y_1 + a_3 y_2) z_2^2 = 0.$$

Jedem Element y ordnet die erste ein einziges z, die letzte zwei Elemente z zu, so daß die Teilverhältnisbeziehungen stattfinden:

$$\frac{zx'}{yx'}+\frac{zx''}{yx''}+\frac{zx'''}{yx'''}=0 \text{ bez. } \frac{zx''}{yx''}\frac{zx'''}{yx'''}+\frac{zx'''}{yx'''}\frac{zx'}{yx'}+\frac{zx'}{yx'}\frac{zx''}{yx''}=0.$$

Wenn also y mit einem der Elemente x zusammenfällt, so ist mit ihm auch ein z vereinigt.

Die quadratische Polare liefert ein Doppelelement z für *zwei* Pole y, die durch die Hessesche Kovariante $H\equiv$

$$(57)\quad (a_0 a_2 - a_1^2)y_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)y_1 y_2 + (a_1 a_3 - a_2^2)y_2^2 = 0$$

bestimmt sind.

Nach Nr. 335 gibt es ferner drei Elemente, deren erste Polaren in bezug auf $U=0$ und $H=0$ ein gemeinsames Element haben, und die Gleichung dieser gemeinsamen Elemente ist $2(U_1 H_2 - U_2 H_1) = 0$ oder

$$(58)\left\{\begin{array}{l} T\equiv(a_0^2 a_3 + 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2)y_1^3 + 3(a_1^2 a_2 + a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2)y_1^2 y_2 \\ +3(2a_1^2 a_3 - a_0 a_2 a_3 - a_1 a_2^2)y_1 y_2^2 + (3a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3 - a_0 a_3^2)y_2^3 = 0. \end{array}\right.$$

Wenn man die Elemente der Hesseschen Kovariante η_1, η_2 zu den fundamentalen wählt, so daß sich H auf das Produkt $y_1 y_2$ reduziert, so muß $a_1 = a_2 = 0$ sein und man erhält die einfacheren Ausdrücke der kubischen Form, ihrer Diskriminante und ihrer Kovarianten

$$(59)\qquad \left\{\begin{array}{ll} U = a_0 y_1^3 + a_3 y_2^3, & \Delta = a_0^2 a_3^2, \\ T = a_0 a_3(a_0 y_1^3 - a_3 y_2^3), & H = a_0 a_3 y_1 y_2, \end{array}\right.$$

aus ihnen aber die allgemeingültige Beziehung

$$(60)\qquad \Delta U^2 = T^2 + 4H^3.$$

Mit T und U ist die Bildung von Kovarianten hier abzuschließen, denn es gilt der Satz: *Jede Kovariante der kubischen Form ist eine ganze Funktion von Δ, U, H, T mit numerischen Koeffizienten.*

Zugleich liefert jene reduzierte Form eine geometrische Beziehung der beiden Elemente der Hesseschen Kovariante zu denen der ursprünglich gegebenen Form. Denn für $\sqrt[3]{-a_3 : a_0} = \alpha$ und ε, ε^2 als die beiden komplexen Kubikwurzeln der Einheit sind $y_1 - \alpha y_2 = 0$, $y_1 - \alpha\varepsilon y_2 = 0$, $y_1 - \alpha\varepsilon^2 y_2 = 0$ die Elemente des gegebenen Tripels, und die drei fundamen-

ɔn Doppelverhältnisse, die das Tripel mit η_1 bez. η_2 benmt, sind sämtlich gleich $-\varepsilon$ bez. $-\varepsilon^2$. *Die Elemente der sseschen Kovariante bilden daher mit denen des Tripels teme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen.* Da Zeichenänderung von α die Elemente der kubischen Koiante T liefert, wie aus (59) folgt, so bilden *die Elemente kubischen Form und die ihrer kubischen Kovariante drei are von Elementen, die in bezug auf das Paar der quadrahen Kovariante einander harmonisch konjugiert sind.* Jene hs Elemente bilden also eine Involution, die diese letzten Doppelelementen hat. Und überdies erkennt man, *daß die ɔische Kovariante die drei Elemente darstellt, von denen jedes einem Elemente des Tripels in bezug auf seine beiden ann Elemente konjugiert harmonisch ist.* Denn das Element, s zu $y_1 - \alpha y_2 = 0$ konjugiert harmonisch ist in bezug auf $-\alpha\varepsilon y_2 = 0$ und $y_1 - \alpha\varepsilon^2 y_2 = 0$, ist $y_1 + \alpha y_2 = 0$.

Die Diskriminante von H ist, wie (57) zeigt, zugleich Diskriminante Δ von U. Im Falle $\Delta = 0$ haben die rmen U und H einen zweifachen linearen Faktor, und zwar nn man zeigen, daß dieser für beide derselbe ist; nach (60) alsdann T die dritte Potenz des linearen Faktors.

Das identische Verschwinden von H hat das identische rschwinden von Δ und T zur Folge; dann ist U eine dritte tenz.

B. 1) Wenn ein Kegelschnitt einem Dreieck so umgeschrieben , daß die drei Geraden, die den Tangenten desselben in den ken des Dreiecks in bezug auf die anstoßenden Seiten harmonisch njugiert sind, in einem Punkte zusammentreffen, so bestimmen von diesem Punkte ausgehenden Tangenten des Kegelschnittes t jenen zwei Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältsen.[67])

Für den Kegelschnitt $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ sind die den ngenten in den Ecken harmonisch konjugierten Geraden: $x_2 - x_3 = 0$, $-x_1 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$; diese gehen durch den Punkt $x_1 = x_2 = x_3$, d ihre Schnitte mit $x_3 = 0$ sind durch $x_1x_2(x_1 - x_2) = 0$ dargellt. Das Tangentenpaar von jenem Punkte an den Kegelschnitt (Nr. 313)

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = 0,$$

ne Schnitte mit $x_3 = 0$ sind also durch $x_1{}^2 - x_1x_2 + x_2{}^2 = 0$

ausgedrückt. Dies ist aber die Hessesche Kovariante einer kubischen Form für $a_0 = a_3 = 0$, $3a_1 = 1$, $3a_2 = -1$; also gerade der Form $x_1 x_2(x_1 - x_2)$. Der dual entsprechende Satz kann ebenso bewiesen werden.

2) Wenn zwei projektive Gruppen von Elementen desselben Grundgebildes, von denen die eine aus einfachen Elementen, die andere aus Paaren in Involution besteht, so gelegen sind, daß die Doppelelemente des involutorischen Systems mit den drei gemeinschaftlichen Elementen beider Gruppen Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bilden, so entspricht jedes der Doppelelemente als Element der zweiten Gruppe dem anderen Element der ersten Gruppe.

Die Gruppen sind darstellbar durch

$$x_1 + \lambda x_2 = 0, \quad (a_1 + \lambda a_2) y_1^2 + (b_1 + \lambda b_2) y_2^2 = 0,$$

die gemeinschaftlichen Elemente also durch

$$a_2 x_1^3 - a_1 x_1^2 x_2 + b_2 x_1 x_2^2 - b_1 x_2^3 = 0.$$

Damit ihre Hessesche Kovariante

$$(3a_2 b_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_1 b_2 - 9 a_2 b_1) x_1 x_2 + (3 a_1 b_1 - b_2^2) x_2^2 = 0$$

sich auf $x_1 x_2 = 0$ reduziere, müssen die Bedingungen $3a_2 b_2 = a_1^2$, $3a_1 b_1 = b_2^2$ erfüllt sein, was nur durch $a_1 = 0$, $b_2 = 0$ geschehen kann, während a_2 und b_1 von Null verschieden sein müssen. Dann wird aber die Gleichung der gemeinschaftlichen Elemente

$$a_2 x_1^3 - b_1 x_2^3 = 0,$$

und diese beweist den Satz.

3) Die Jacobische Determinante der beiden Hesseschen Kovarianten zweier kubischer Formen ist eine Kovariante derselben, durch deren Verschwinden das Elementenpaar bestimmt ist, das zu beiden Paaren der Hesseschen Kovarianten harmonisch konjugiert ist, oder deren jedes mit den Elementen der kubischen Formen selbst Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bildet.

Folgt aus Nr. 330 und Nr. 338.

4) Sind U, V, W drei kubische Formen in Involution, und werden die Koeffizienten derselben bez. durch a, b, c bezeichnet, so verschwinden die Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|.$$

339. Invarianten der biquadratischen Form

$$(61) \quad U \equiv a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4.$$

Die Gleichung $U = 0$ bestimmt vier Elemente einer Reihe

oder eines Büschels, ein Quadrupel P_1, P_2, P_3, P_4 von den Koordinaten $x_1' \mid x_2'; \ldots x_1'''' \mid x_2''''$. Für

$$(x_1'' x_2''' - x_1''' x_2'')(x_1' x_2'''' - x_1'''' x_2') = D_1,$$
$$(x_1''' x_2' - x_1' x_2''')(x_1'' x_2'''' - x_1'''' x_2'') = D_2,$$
$$(x_1' x_2'' - x_1'' x_2')(x_1''' x_2'''' - x_1'''' x_2''') = D_3$$

ist $D_1 + D_2 + D_3 = 0$. Die Quotienten $-D_2 : D_1$, $-D_3 : D_2$, $-D_1 : D_3$ drücken die drei fundamentalen Doppelverhältnisse des Quadrupels, nämlich $(P_1 P_2 P_3 P_4)$, $(P_2 P_3 P_1 P_4)$, $(P_3 P_1 P_2 P_4)$ aus. Die drei Wurzeln θ_1, θ_2, θ_3 der Gleichung

$$(62) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta^3 + 3(D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2)\theta \\ - (D_2 - D_3)(D_3 - D_1)(D_1 - D_2) = 0 \end{array} \right.$$

sind die Größen $D_1 - D_2$, $D_2 - D_3$, $D_3 - D_1$, die Koeffizienten sind aber symmetrische Funktionen der Wurzeln, also auch ganze Funktionen der Koeffizienten von U. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$(63) \qquad \left\{ \begin{array}{l} J_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \\ J_3 = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 \end{array} \right.$$

erhält (62) die Gestalt

$$(64) \qquad \theta^3 - 36 J_2 \theta - 432 J_3 = 0.$$

Die Größen J_2 und J_3 sind, da die Doppelverhältnisse durch lineare Transformationen ihre Werte nicht ändern, *Invarianten der biquadratischen Form* und zwar ist J_2 die quadratische und J_3 die kubische Invariante. Für $J_3 = 0$ werden notwendig zwei der Größen D einander gleich, so daß eines der drei fundamentalen Doppelverhältnisse den Wert -1 hat; *die Gleichung stellt eine harmonische Gruppe dar.* Für $J_2 = 0$ ist notwendig $D_3 : D_2 = D_2 : D_1 = D_1 : D_3$, so daß alle drei fundamentalen Doppelverhältnisse den nämlichen Wert haben: *die Gleichung stellt eine äquianharmonische Gruppe dar* (vgl. Teil 1, S. 160).

Der Gleichheit zweier Werte von θ endlich entspricht nach Nr. 337 die Beziehung

$$J_2^3 - 27 J_3^2 = 0, \text{ d. i. } \tfrac{1}{256} D_1^2 D_2^2 D_3^2 = 0$$

und das Zusammenfallen zweier Wurzeln der biquadratischen Gleichung $U = 0$; daher ist die zusammengesetzte Invariante

(65) $$\Delta = J_2^3 - 27 J_3^2$$

die *Diskriminante* der Form U. Ihr entwickelter Ausdruck ist

(66) $$\left\{\begin{aligned} &\Delta \equiv a_0^3 a_4^3 - 12 a_0^2 a_1 a_3 a_4^2 - 18 a_0^2 a_2^2 a_4^2 + 54 a_0^2 a_2 a_3^2 a_4 \\ &- 27 a_0^2 a_3^4 + 54 a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 - 6 a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 - 180 a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 \\ &+ 108 a_0 a_1 a_2 a_3^3 + 81 a_0 a_2^4 a_4 - 54 a_0 a_2^3 a_3^2 - 27 a_1^4 a_4^2 \\ &+ 108 a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 64 a_1^3 a_3^3 - 54 a_1^2 a_2^3 a_4 + 36 a_1^2 a_2^2 a_3^2 . \end{aligned}\right.$$

Man erhält auch $J_2^3 : J_3^2 =$
$$-108 (D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2)^3 : (D_2 - D_3)^2 (D_3 - D_1)^2 (D_1 - D_2)^2$$
und für s als die Summe eines Paares $\alpha_i + \alpha_i^{-1}$ der reziproken fundamentalen Doppelverhältnisse der Gruppe der P_i:

(67) $$108 J_3^2 (s-1)^3 - J_2^3 (s+2)(2s-5)^2 = 0 .$$

Bei Einführung von $k = \frac{3(108 J_3^2 + 5 J_2^3)}{4(27 J_3^2 - J_2^3)}$ läßt sich diese Gleichung auch in der Form schreiben:

(68) $$s^3 - 3s^2 + ks + 5 - 2k = 0 .$$

Also hängen die Doppelverhältnisse der Gruppe nur von dem Verhältnis des Kubus und des Quadrats der beiden Invarianten, d. i. der absoluten Invariante der biquadratischen Form ab (vgl. Nr. 327). Die sechs verschiedenen Doppelverhältnisse, die nach Nr. 83 den vier Elementen P_1, P_2, P_3, P_4 zugehören, sind Wurzeln der Gleichung 6. Grades:

(69) $$\alpha^6 - 3\alpha^5 + m\alpha^4 + (5 - 2m)\alpha^3 + m\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0,$$

wobei
$$m = 3 + k = \frac{3(216 J_3^2 + J_2^3)}{4(27 J_3^2 - J_2^3)} .$$

Man sieht sofort, *daß die Summe der sechs Doppelverhältnisse gleich* 3 *ist**), so lange $\Delta = J_2^3 - 27 J_3^2 \neq 0$.

Die Gleichung (67) geht übrigens bei Einführung von $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ an Stelle von s über in:

(69a) $$108 J_3^2 (\alpha^2 - \alpha + 1)^3 - J_2^3 (\alpha + 1)^2 (2\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)^2 = 0 .$$

---

*) Diese elementare Tatsache, die man sofort durch Addieren der sechs Werte λ, $1:\lambda$, $1-\lambda$, $1:(1-\lambda)$, $(\lambda-1):\lambda$, $\lambda:(\lambda-1)$ der Doppelverhältnisse (vgl. Teil 1, S. 158) bestätigen kann, scheint noch kaum bemerkt worden zu sein; jedenfalls wird sie in den Lehrbüchern der Geometrie nicht erwähnt.

340. **Kovarianten der biquadratischen Form.** In bezug auf ein Quadrupel $U=0$ gibt es eine lineare, eine quadratische und eine kubische Polare, nämlich bez.

$$\begin{gathered}(a_0y_1^3+3a_1y_1^2y_2+3a_2y_1y_2^2+a_3y_2^3)z_1\\ +(a_1y_1^3+3a_2y_1^2y_2+3a_3y_1y_2^2+a_4y_2^3)z_2=0,\\ (a_0y_1^2+2a_1y_1y_2+a_2y_2^2)z_1^2+2(a_1y_1^2+2a_2y_1y_2+a_3y_2^2)z_1z_2\\ +(a_2y_1^2+2a_3y_1y_2+a_4y_2^2)z_2^2=0,\\ (a_0y_1+a_1y_2)z_1^3+3(a_1y_1+a_2y_2)z_1^2z_2+3(a_2y_1+a_3y_2)z_1z_2^2\\ +(a_3y_1+a_4y_2)z_2^3=0.\end{gathered}$$

Die Diskriminante der quadratischen Polare ist zugleich die Hessesche Kovariante

$$(70)\left\{\begin{gathered}H\equiv(a_0a_2-a_1^2)y_1^4+2(a_0a_3-a_1a_2)y_1^3y_2\\ +(a_0a_4+2a_1a_3-3a_2^2)y_1^2y_2^2+2(a_1a_4-a_2a_3)y_1y_2^3\\ +(a_2a_4-a_3^2)y_2^4=0\end{gathered}\right.$$

der gegebenen biquadratischen Form U. Die Diskriminante der kubischen Polare ist gleich J_2H-J_3U.

Die Jacobische Kovariante T von U und H (Nr. 335) lautet in entwickelter Form:

$$(71)\quad\left\{\begin{gathered}(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)y_1^6\\ +(a_0^2a_4+2a_0a_1a_3-9a_0a_2^2+6a_1^2a_2)y_1^5y_2\\ +(5a_0a_1a_4-15a_0a_2a_3+10a_1^2a_3)y_1^4y_2^2\\ +(10a_1^2a_4-10a_0a_3^2)y_1^3y_2^3\\ +(15a_1a_2a_4-5a_0a_3a_4-10a_1a_3^2)y_1^2y_2^4\\ +(9a_2^2a_4-a_0a_4^2-2a_1a_3a_4-6a_2a_3^2)y_1y_2^5\\ +(3a_2a_3a_4-a_1a_4^2-2a_3^3)y_2^6=0.\end{gathered}\right.$$

Für $a_1=a_3=0$ reduzieren sich die Form U und ihre Invarianten und Kovarianten auf:

$$(72)\quad\left\{\begin{gathered}U=a_0y_1^4+6a_2y_1^2y_2^2+a_4y_2^4,\\ J_2=a_0a_4+3a_2^2,\quad J_3=a_0a_2a_4-a_2^3,\\ H=a_0a_2y_1^4+(a_0a_4-3a_2^2)y_1^2y_2^2+a_2a_4y_2^4,\\ T=(a_0a_4-9a_2^2)(a_0y_1^4-a_4y_2^4)y_1y_2.\end{gathered}\right.$$

Man findet aus diesen reduzierten Formen die allgemein gültige Beziehung

$$(73)\qquad T^2=J_2HU^2-J_3U^3-4H^3.$$

Die reduzierten Formen von U und H zeigen, daß diese Aus-

drücke in Faktoren von der Gestalt $y_1^2 - \mu y_2^2 = 0$, $y_1^2 - \nu y_2^2 = 0$ zerlegbar sind, während zugleich die Kovariante T *drei* Paare $y_1 y_2 = 0$, $y_1^2 - \lambda y_2^2 = 0$, $y_1^2 + \lambda y_2^2 = 0$ darstellt. Dies gibt den Satz: *Die vier Elemente einer biquadratischen Form und ebenso die ihrer Hesseschen Kovariante bestimmen je drei Involutionen, und die drei Paare ihrer Doppelelemente — die für beide dieselben, $T = 0$, sind — stehen in solcher gegenseitiger Beziehung, daß jedes von ihnen für die Involution der beiden anderen das Paar der Doppelelemente ist.*

Mit den zwei Invarianten J_2, J_3 und den zwei Kovarianten H, T ist die Invariantentheorie der biquadratischen Form im Sinne von Nr. 339 erledigt. Überhaupt aber ist der Nachweis erbracht worden,[68]) *daß jede binäre Form ein endliches Formensystem hat: Alle Invarianten und Kovarianten einer Form (oder simultaner Formen) sind als ganze Funktionen einer endlichen Anzahl von solchen, mit numerischen Koeffizienten, darstellbar.*

Neunzehntes Kapitel.

Invariantentheorie der Kegelschnitte.

341. **Invarianten ternärer Formen.** Die Begriffe und Benennungen des vorigen Kapitels lassen sich unmittelbar auf das Gebiet der ternären Formen und homogenen Gleichungen übertragen. Die ternäre lineare Substitution $x_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k'$, deren Modul $\triangle$ nicht Null ist, drückt einerseits die allgemeine Koordinatentransformation, andrerseits die kollineare Zuordnung ebener Gebilde aus (Nr. 92). Transformieren wir eine oder gleichzeitig mehrere gegebene ternäre Formen linear, so kann eine gleich Null gesetzte Koeffizientenfunktion $J(a)$ nur dann eine projektive Eigenschaft des Gebildes oder der Gebilde ausdrücken, wenn dieselbe Funktion der transformierten Koeffizienten $J(a')$ gleichzeitig verschwindet. Alsdann zeigt sich, daß dies Invarianten, d. h. wieder Funktionen der Koeffizienten einer oder mehrerer Formen sind, die sich bei linearer Transformation derselben nur um eine Potenz des Substitutionsmoduls als Faktor ändern:

$$(1) \quad J(a') = \triangle^r \cdot J(a) \quad \text{oder} \quad J(a', b', \ldots) = \triangle^r \cdot J(a, b, \ldots).$$

Soll insbesondere ein gegebenes Formensystem, das von k Konstanten abhängt, in ein anderes System von Formen derselben Grade transformiert werden können, so muß natürlich die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen kleiner als die der verfügbaren Konstanten der Substitution sein. Also muß entweder $k \lesseqgtr 8$ sein, oder falls i Koeffizientenbeziehungen stattfinden, muß $k - i \leqq 8$ sein. Demnach hat das Formensystem mindestens $k - 8$ absolute Invarianten, eine Form n^{ter} Ordnung also deren $n\frac{n+3}{2} - 8$. *Unter den ternären allgemeinen Formen haben (außer den linearen) nur die quadratischen* ($k = 5$) *keine absolute, also nicht mehr als eine gewöhnliche Invariante* (Nr. 327).

Man pflegt den Namen Invarianten vorzugsweise auf die *allgemeinen* linearen Umformungen zu beziehen. Jedoch kann man offenbar auch *relative Invarianten* bilden, die nur gegenüber Substitutionen besonderen Charakters die Invarianteneigenschaft haben. So gibt es z. B Transformationen, bei denen die unendlich ferne Gerade in sich selbst übergeführt wird und im Endlichen gelegene Elemente (Punkte oder Geraden) wieder in solche derselben Art übergehen. Parallele Geraden werden hierbei wieder in Parallelen übergeführt, nicht parallele Geraden bleiben solche mit Schnittpunkt im Endlichen. Man bezeichnet Transformationen dieser Art als *affin.*

Für zwei auf Cartesische Koordinaten bezogene Geraden $a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$ und $b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$ ist $a_1 b_2 - a_2 b_1$ eine „*Affinitäts- oder Parallelinvariante*". Ebenso ist das durch das Vorzeichen von $A_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}{}^2$ bestimmte Verhalten eines Kegelschnitts $f(x, y, z) = 0$ zur unendlich fernen Geraden $z = 0$ eine affine Eigenschaft (vgl. Teil 1, S. 299).

Einen besonderen Fall der affinen Substitutionen bilden die *Ähnlichkeitstransformationen*, also die *orthogonalen Substitutionen.* Bei ihnen werden Paare rechtwinkliger Geraden wieder in solche übergeführt, irgend welche Figuren in ähnliche Figuren. Auf die entsprechenden *metrischen oder Orthogonalinvarianten* wird später besonders einzugehen sein (Nr. 370).

Aus der allgemeinen Invariantentheorie der ternären Formen heben wir hier *nur* die Grundzüge derjenigen der *quadratischen* Formen heraus

342. **Diskriminante.** Eine quadratische Form U hat nur *eine* Invariante, nämlich ihre Diskriminante A. Diese ist invariant, da ihr Verschwinden eine projektive Bedingung, das Zerfallen in ein Geradenpaar ausdrückt. In der Tat sind alle nichtzerfallenden Kegelschnitte untereinander kollinear, d. h. ihre Gleichungen können durch lineare Transformationen ineinander übergeführt werden.

Den Invariantencharakter der Diskriminante A erkennen wir rein analytisch, da

$$A' = \triangle^2 \cdot A \tag{2}$$

ist, wenn A' dieselbe Determinante der Koeffizienten a_{ik}' der transformierten Form U' ist, wie die aus den a_{ik} gebildete Determinante A. Man hat nämlich zuerst

$$\triangle \cdot A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix}$$

für $\mathfrak{a}_{ik} = \alpha_{1k}a_{i1} + \alpha_{2k}a_{i2} + \alpha_{3k}a_{i3}$ (vgl. Teil I, S. 176/7) und sodann

$$\triangle^2 \cdot A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{31} \\ \mathfrak{a}_{12} & \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{32} \\ \mathfrak{a}_{13} & \mathfrak{a}_{23} & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{21}' & a_{31}' \\ a_{12}' & a_{22}' & a_{32}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{vmatrix}$$

für $a_{ik}' = \alpha_{1k}\mathfrak{a}_{1i} + \alpha_{2k}\mathfrak{a}_{2i} + \alpha_{3k}\mathfrak{a}_{3i}$. Durch die Determinantenmultiplikation erhält man so

$$(3) \qquad a_{ik}' = \sum_l \alpha_{lk}\mathfrak{a}_{li} = \sum_l \alpha_{lk} \sum_m \alpha_{mi} a_{lm} = \sum_{l,m} \alpha_{lk}\alpha_{mi}a_{lm}$$

d. h. genau dasselbe, wie für den Koeffizienten $x_i'x_k'$ in der Entwickelung

$$(4) \qquad \sum_{l,m} a_{lm}x_l x_m = \sum_{l,m} a_{lm}\Big(\sum_k \alpha_{lk}x_k'\Big)\Big(\sum_i \alpha_{mi}x_i'\Big).$$

Diese können wir auch durch Benutzung der symbolischen Methode ersetzen, wonach $U \equiv a_x^2$ ist, falls das Produkt der Symbole a_i und a_k den Koeffizienten a_{ik} nur vertritt. Denn die Symbole a_i werden, verglichen mit den Veränderlichen x_i, *invers* transformiert; also ist

$$(5) \qquad a_i'a_k' = (\Sigma \alpha_{li}a_l)(\Sigma \alpha_{mk}a_m).$$

Offenbar begründet derselbe Beweisgang die Invarianteneigenschaft der analog gebildeten Diskriminante für quadratische Formen von beliebig vielen Veränderlichen.

Die Bedingung $A = 0$ wurde in Nr. 137 als diejenige erhalten, die ausdrückt, daß die Polaren von willkürlichen Punkten in bezug auf $U = 0$ durch einen Punkt gehen. Nun ist die Büschelbildung dreier Geraden $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ eine projektive Eigenschaft; *also ist die Koeffizientendeterminante dreier linearer Formen eine Simultaninvariante derselben.* Wirklich ist

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \alpha_{31} a_3 & \cdot & \cdot \\ \alpha_{11} b_1 + \alpha_{21} b_2 + \alpha_{31} b_3 & \cdot & \cdot \\ \alpha_{11} c_1 + \alpha_{21} c_2 + \alpha_{31} c_3 & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \triangle \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Die Diskriminante ändert sich dagegen um das Quadrat des Moduls, weil die Determinante der transformierten Koeffizienten nicht einfach die Resultante der transformierten Ableitungen ist, sondern diejenige der Ableitungen der transformierten Form; diese sind lineare Aggregrate der ersten, und zwar beweist man nach Nr. 330 allgemein: *Die Ableitungen einer Form von beliebig vielen Veränderlichen werden kontragredient zu diesen transformiert* (Nr. 91).

343. **Simultane Invarianten zweier Kegelschnitte.** *Aus der Diskriminante entspringen auch die Simultaninvarianten zweier und dreier Kegelschnitte,* wie in Nr. 328 für Elementenpaare.

Es seien

$$(6)\quad \begin{cases} f(x, x) \equiv a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{13} x_1 x_3 \\ \qquad + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0, \\ g(x, x) \equiv b_{11} x_1^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2 + 2b_{13} x_1 x_3 \\ \qquad + 2b_{23} x_2 x_3 + b_{33} x_3^2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier auf dasselbe Koordinatendreieck bezogenen Kurven zweiter Ordnung. Durch sie ist mit Hilfe des Parameters λ das Kegelschnittbüschel

$$(7)\quad \begin{cases} f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0 \quad \text{oder} \\ c_{11} x_1^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2 + 2c_{13} x_1 x_3 + 2c_{23} x_2 x_3 + c_{33} x_3^2 = 0, \\ c_{ik} = a_{ik} - \lambda b_{ik}, \end{cases}$$

bestimmt, dessen Diskriminante schon in Nr. 251 aufgestellt wurde. Sie ist

$$(8)\quad C(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{32} - \lambda b_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix}$$

oder bei Entwicklung nach Potenzen von λ:

$$(9)\quad C(\lambda) = A - 3\mathrm{H}\lambda + 3\Theta\lambda^2 - B\lambda^3,$$

wo A und B die Diskriminanten von $f(x, x)$ und $g(x, x)$ bedeuten, während H und Θ durch

$$(10)\ 3\mathsf{H} = b_{11}A_{11} + 2b_{12}A_{12} + b_{22}A_{22} + 2b_{13}A_{13} + 2b_{23}A_{23} + b_{33}A_{33},$$
$$(11)\ 3\Theta = a_{11}B_{11} + 2a_{12}B_{12} + a_{22}B_{22} + 2a_{13}B_{13} + 2a_{23}B_{23} + a_{33}B_{33}$$

bestimmt sind; hierbei sind die A_{ik} und B_{ik} die Unterdeterminanten der Elemente a_{ik} bez. b_{ik} in den Determinanten A und B.

Die Gleichung $C(\lambda) = 0$ bestimmt, wie schon in Nr. 251 erwähnt wurde, die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der drei in dem Büschel (7) enthaltenen Geradenpaare.[69])

Durch Elimination von λ mit Hilfe der Gleichung $f - \lambda g = 0$ erhält man *die Gleichung dieser drei Geradenpaare:*

$$(12)\quad \begin{cases} Ag^3(x,x) - 3\mathsf{H}f(x,x)\cdot g^2(x,x) + 3\Theta f^2(x,x)\cdot g(x,x) \\ \qquad\qquad - Bf^3(x,x) = 0. \end{cases}$$

Nun sind aber die drei Wurzeln der kubischen Gleichungen von Kollineationen des Büschels *unabhängig*, d. h. geht durch Transformation $f(x,x)$, $g(x,x)$ in $f'(x,x)$ bez. $g'(x,x)$ über, so sind auch für jeden Wert von λ die Kegelschnitte $f - \lambda g = 0$, $f' - \lambda g' = 0$ kollinear. Wenn also unter den Koeffizienten der kubischen Gleichung zwei nur durch den vortretenden Faktor $\triangle^2$ geändert werden, so müssen auch die beiden andern dieselbe Änderung erfahren. Somit ist $\mathsf{H}' = \triangle^2 \cdot \mathsf{H}$, $\Theta' = \triangle^2 \cdot \Theta$ und H, Θ *sind zwei Simultaninvarianten der Formen f, g oder Kegelschnitte $f(x,x) = 0$, $g(x,x) = 0$* (nicht aber Invarianten des Büschels). Die Bedeutung ihres Verschwindens wird in Nr. 348 näher erläutert.

B. Man soll den Ort des Schnittpunktes derjenigen Normalen eines Kegelschnittes finden, die in den Enden einer durch den Punkt $\alpha \mid \beta$ gehenden Sehne errichtet werden.

Sei $\varphi(x,y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ die Gleichung der gegebenen Kurve in rechtwinkligen Parallelkoordinaten. Alsdann liegen nach Nr. 178 die Fußpunkte der durch einen gegebenen Punkt $\xi \mid \eta$ gehenden Normalen in den Schnittpunkten von $\varphi(x,y) = 0$ mit der Hyperbel $\chi(x,y) \equiv 2(c^2xy + b^2\eta x - a^2\xi y) = 0$. Man bildet dann nach dem Texte die Gleichung der sechs Verbindungsgeraden dieser Fußpunkte und drückt aus, daß diese Gleichung durch die Koordinaten $\alpha \mid \beta$ erfüllt werde. Im gegenwärtigen Falle ist

$$A = -\frac{1}{a^2b^2}, \quad \mathsf{H} = 0, \quad 3\Theta = -(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4),$$
$$B = -2a^2b^2c^2\xi\eta;$$

die Gleichung des Ortes wird also in laufenden Koordinaten $\xi \mid \eta$:

$$\frac{8}{a^2 b^2}(a^2\beta\xi - b^2\alpha\eta - c^2\alpha\beta)^3 + 2a^2b^2c^2\xi\eta\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)^3$$

$$+ 2(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)(a^2\beta\xi - b^2\alpha\eta - c^2\alpha\beta)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)^2 = 0,$$

und er ist daher im allgemeinen eine *Kurve dritter Ordnung.*

Für $\alpha = 0$, d. h. wenn der gegebene Punkt in der y-Achse liegt, zerfällt die Kurve in diese Achse und einen Kegelschnitt; analog ist es für $\beta = 0$. Wenn der gegebene Punkt unendlich entfernt ist, d. h. wenn der Schnittpunkt der Normalen in Punkten zu bestimmen ist, die in den Enden paralleler Sehnen liegen, zerfällt die Kurve in die unendlich ferne Gerade und einen Kegelschnitt.

344. Da das Büschel nur *eine*, von λ abhängige, Invariante hat, liegt der Schluß nahe, daß das Kurvenpaar $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ keine Invarianten hat, die sich nicht auf A, B, H, Θ zurückführen ließen. In der Tat wird in der Invariantentheorie bewiesen, daß *alle Invarianten des Kegelschnittpaares rationale Funktionen von A, B, H, Θ mit numerischen Koeffizienten sind.*

Offenbar sind umgekehrt nur solche rationale Funktionen der vier Größen, die sie homogen enthalten, Invarianten. Denn nur solche ändern sich um eine Potenz des Moduls, da sich A, B, H, Θ ganz gleichartig ändern. *Ferner muß jede Invariante in den Koeffizienten jeder einzelnen Grundform homogen sein*, während A, H, Θ, B in denen von $f(x, x)$ bez. vom dritten, zweiten, ersten, nullten Grade sind. Diese beiden Anforderungen erleichtern die Aufstellung des Invariantenausdrucks einer projektiven Beziehung der beiden Kegelschnitte, denn eine leichte Überlegung zeigt, daß eine ganze Funktion von bestimmten Graden in den a_{ik} und b_{ik} nur eine endliche Anzahl von Produkten jener vier fundamentalen Invarianten enthalten kann.

Diese Gradverhältnisse in den Koeffizienten werden *unkenntlich*, wenn wir die Invarianten für Formen mit *numerischen* Koeffizienten bilden, bleiben aber stets zu berücksichtigen. Für besondere Beziehungen der Kegelschnitte zum Koordinatensystem gehen die vier Invarianten in einfachere Ausdrücke über. Gerade diese erleichtern es oft sehr, ge-

gebenenfalls homogene Beziehungen zwischen den Invarianten, d. h. projektive Beziehungen zu erkennen. Eine jede solche Beziehung gilt dann, ihrer analytischen Natur gemäß, nicht nur für die besondere Abhängigkeit vom Koordinatensystem, sondern für *jede* Koordinatenwahl.

Zwei Kegelschnitte haben nach Nr. 253 ein gemeinsames Polardreieck und ihre Gleichungen können in den Normalformen angenommen werden (Nr. 301):

$$(13)\qquad f(x,x) \equiv \Sigma a_{ii} x_i^2 = 0, \quad g(x,x) \equiv \Sigma x_i^2 = 0.$$

Alsdann sind die vier Invarianten

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{l} A = a_{11} a_{22} a_{33}, \quad 3\mathsf{H} = a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22}, \\ \qquad 3\Theta = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad B = 1 \end{array} \right.$$

einfach die elementarsymmetrischen Funktionen der a_{ik}. Als Parameter der drei Geradenpaare folgen also a_{11}, a_{22}, a_{33} (Nr. 343).

B. 1) Wenn $g(x,x) = 0$ so wie in (13) vorausgesetzt wird, aber $f(x,x) = 0$ die allgemeine Gleichung bedeutet, so ist

$$3\mathsf{H} = (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + (a_{33} a_{11} - a_{31}^2) + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$
$$3\Theta = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

2) Für zwei Kreise, die durch

$$\varphi(x,y) \equiv x^2 + y^2 - \varrho_1^2 = 0, \quad \chi(x,y) \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \varrho_2^2 = 0$$

dargestellt sind, ist

$$A = -\varrho_1^2, \quad 3\mathsf{H} = \alpha^2 + \beta^2 - 2\varrho_1^2 - \varrho_2^2,$$
$$3\Theta = \alpha^2 + \beta^2 - \varrho_1^2 - 2\varrho_2^2, \quad B = -\varrho_2^2.$$

Ist daher $d = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise voneinander, so stellt $\varphi(x,y) - \lambda\chi(x,y)$ Geradenpaare dar für diejenigen Werte λ, die wir aus

$$-\varrho_1^2 + (2\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - d^2)\lambda - (\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 - d^2)\lambda^2 + \varrho_2^2\lambda^3 = 0$$

erhalten. Da nun wie bekannt $\varphi(x,y) - \chi(x,y) = 0$ die Potenzlinie zusammen mit der unendlich fernen Geraden darstellt, so ist 1 eine Wurzel dieser Gleichung, und die Gleichung ist daher durch $\lambda - 1$ teilbar; der Quotient ist $\varrho_1^2 - (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - d^2)\lambda + \varrho_2^2\lambda^2 = 0$.

3) Wenn

$$\varphi(x,y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$\chi(x,y) \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \varrho^2 = 0,$$

so ist

$$\varDelta = -\frac{1}{a^2 b^2}, \quad 3\mathsf{H} = \frac{1}{a^2 b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - \varrho^2),$$

$$3\Theta = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - \varrho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \quad B = -\varrho^2.$$

4) Für die Parabel $\varphi(x, y) \equiv y^2 - 4mx = 0$ und $\chi(x, y) = 0$ als die allgemeine Gleichung des Kreises wie vorher ist

$$\varDelta = -4m^2, \quad 3\mathsf{H} = -4m(\alpha + m), \quad 3\Theta = \beta^2 - 4m\alpha - \varrho^2, \quad B = -\varrho^2.$$

5) Berechne die Invarianten für zwei Kegelschnitte, die demselben Dreieck bez. ein- und umgeschrieben sind. Für

$$f(x, x) \equiv (a_1^2 x_1^2 - 2a_2 a_3 x_2 x_3) + \cdots = 0,$$

$$g(x, x) \equiv 2(b_{23} x_2 x_3 + b_{31} x_3 x_1 + b_{12} x_1 x_2) = 0$$

ist $\varDelta = -4a_1^2 a_2^2 a_3^2, \quad 3\mathsf{H} = 4a_1 a_2 a_3(a_1 b_{23} + a_2 b_{31} + a_3 b_{12}),$

$$B = 2b_{23} b_{31} b_{12}, \quad 3\Theta = -(b_{23} a_1 + b_{31} a_2 + b_{12} a_3)^2.$$

345. **Taktinvariante.** Wenn von den vier Schnittpunkten A, B, C, D der Kegelschnitte zwei, A und B, zusammenfallen, so ist offenbar das Geradenpaar AC, BD mit dem Paar BC, AD identisch, und die kubische Gleichung

$$C(\lambda) \equiv \varDelta - 3\mathsf{H}\lambda + 3\Theta\lambda^2 - B\lambda^3 = 0 \tag{15}$$

muß ein Paar gleiche Wurzeln haben. Man findet die Bedingung dafür im Verschwinden der Diskriminante der kubischen Gleichung (Nr. 337), nämlich

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathsf{H}\Theta - \varDelta B)^2 - 4(B\mathsf{H} - \Theta^2)(\varDelta\Theta - \mathsf{H}^2) = 0 \quad \text{oder} \\ \varDelta^2 B^2 + 4\varDelta\Theta^3 + 4B\mathsf{H}^3 - 3\mathsf{H}^2\Theta^2 - 6\varDelta B\mathsf{H}\Theta = 0. \end{array}\right. \tag{16}$$

Dies ist *die invariante Bedingung der Berührung zwischen den beiden Kegelschnitten.*

Man beweist in der Theorie der Gleichungen, daß die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene linke Seite von (16), die sog. *Taktinvariante*, zu dem Produkt der Quadrate der Differenzen der Wurzeln proportional ist, die die Gleichung (15) hat: ist die linke Seite von (16) negativ, so sind diese Wurzeln sämtlich reell, ist sie positiv, so sind zwei von ihnen komplex. Im letzten Falle schneiden sich (vgl. Nr. 254) die beiden Kegelschnitte in zwei reellen und zwei imaginären Punkten, im ersten Falle schneiden sie einander entweder in vier reellen oder in vier imaginären Punkten. Diese beiden letzten Unterfälle unterscheiden sich nicht durch ein einfaches Kennzeichen.[70])

Wenn die drei Schnittpunkte A, B, C zusammenrücken oder die Kegelschnitte einander oskulieren, so sind die Geradenpaare AB, CD; BC, AD; CA, BD identisch. Also muß die linke Seite der kubischen Gleichung (15) ein vollständiger Kubus sein, und dies erfordert nach Nr. 337, daß die drei eingeklammerten Größen der Taktinvariante gleichzeitig verschwinden. *Die Invariantenbedingungen der Oskulation sind daher*

(17) $$A : \mathsf{H} = \mathsf{H} : \Theta = \Theta : B.$$

Die Bedingung der Doppelberührung ist anderer Art und wird später erhalten (Nr. 356 und 362, 3).

B. 1) Man soll nach der Methode des Textes die Bedingung finden, unter der sich zwei Kreise berühren.

Soll die reduzierte Schlußgleichung von Nr. 344, 2 gleiche Wurzeln haben, so muß $\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 - d^2 = \pm 2\varrho_1\varrho_2$ oder $d = \varrho_1 \pm \varrho_2$ sein, wie es geometrisch offenbar ist.

2) Die Berührungsbedingungen für zwei Kegelschnitte mit dreigliedrigen Gleichungen

$$\text{a)}\; a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0,$$
$$\text{b)}\; \sqrt{b_1x_1} + \sqrt{b_2x_2} + \sqrt{b_3x_3} = 0,$$
$$\text{c)}\; a_1x_1{}^2 + a_2x_2{}^2 + a_3x_3{}^2 = 0$$

lauten für Berührung zwischen a) und b), b) und c), c) und a) bez.

$$(a_{23}b_1)^{\frac{1}{3}} + (a_{31}b_2)^{\frac{1}{3}} + (a_{12}b_3)^{\frac{1}{3}} = 0, \quad \left(\frac{b_1{}^2}{a_1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{b_2{}^2}{a_2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{b_3{}^2}{a_3}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,$$
$$(a_1a_{23}{}^2)^{\frac{1}{3}} + (a_2a_{31}{}^2)^{\frac{1}{3}} + (a_3a_{12}{}^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Sie können natürlich auch erhalten werden durch Identifikation der Gleichungen der Tangenten in einem Punkte (Nr. 299, 302, 303 und 344, 5).

3) Man bestimme den *Ort des Mittelpunktes für einen Kreis von konstantem Radius, der stets einen gegebenen Kegelschnitt berührt.*

Dazu setzen wir in den gleich Null gesetzten Ausdruck für die Taktinvariante die Werte von A, B, H, Θ ein, die in Nr. 344, 3) und 4) gegeben wurden, und betrachten sodann $\alpha \mid \beta$ als die laufenden Koordinaten. Der Ort ist im allgemeinen eine *Kurve achter Ordnung,* im Falle der *Parabel* eine Kurve *sechster* Ordnung. Dieselbe Kurve erhält man als den Ort der Endpunkte, wenn man auf allen Normalen der Kurve von dieser aus eine konstante Länge ϱ nach beiden Seiten abträgt. Man nennt sie die *Parallelkurve des Kegelschnittes.* Sie hat mit dem Kegelschnitt selbst die nämliche Evolute (Nr. 245). Ihre Gleichung liefert auch die Bestimmung

der normalen Entfernungen, die von einem beliebigen Punkte aus zum Kegelschnitt gemessen werden. In voller Entwickelung ist sie für die Parabel $y^2 = 4mx$:

$$\begin{gathered}\varrho^6 - (3y^2 + x^2 + 8mx - 8m^2)\varrho^4 \\ + \{3y^4 + y^2(2x^2 - 2mx + 20m^2) + 8mx^3 + 8m^2x^2 - 32m^3x + 16m^4\}\varrho^2 \\ - (y^2 - 4mx)^2\{y^2 + (x-m)^2\} = 0;\end{gathered}$$

und für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn man $c^2 = a^2 - b^2$ setzt:

$$\begin{gathered}c^4\varrho^8 - 2c^2\varrho^6\{c^2(a^2+b^2) + (a^2 - 2b^2)x^2 + (2a^2 - b^2)y^2\} \\ + \varrho^4\{c^4(a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 2c^2(a^4 - a^2b^2 + 3b^4)x^2 \\ + 2c^2(3a^4 - a^2b^2 + b^4)y^2 + (a^4 - 6a^2b^2 + 6b^4)x^4 \\ + (6a^4 - 6a^2b^2 + b^4)y^4 + (6a^4 - 10a^2b^2 + 6b^4)x^2y^2\} \\ + \varrho^2\{-2a^2b^2c^4(a^2+b^2) + 2b^2c^2(3a^4 - a^2b^2 + b^4)x^2 \\ - 2a^2c^2(a^4 - a^2b^2 + 3b^4)y^2 - b^2(6a^4 - 10a^2b^2 + 6b^4)x^4 \\ - a^2(6a^4 - 10a^2b^2 + 6b^4)y^4 + (4a^6 - 6a^4b^2 - 6a^2b^4 + 4b^6)x^2y^2 \\ + 2b^2(a^2 - 2b^2)x^6 - 2(a^4 - a^2b^2 + 3b^4)x^4y^2 \\ - 2(3a^4 - a^2b^2 + b^4)x^2y^4 + 2a^2(b^2 - 2a^2)y^6\} \\ + (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^2\{(x-c)^2 + y^2\}\{(x+c)^2 + y^2\} = 0.\end{gathered}$$

Hiernach ist der Ort eines Punktes, für den die Summe der Quadrate seiner senkrechten Abstände von der Parabel bez. Ellipse konstant gleich k^2 sein soll, ein Kegelschnitt, dargestellt durch

$$x^2 + 3y^2 + 8m(x - m) = k^2$$

bez. $$(a^2 - 2b^2)x^2 + (2a^2 - b^2)y^2 + a^4 - b^4 = k^2.$$

Auch bei diesem Orte haben die Fälle $a^2 = b^2$, $a^2 = -b^2$, $2b^2 = 2c^2 = a^2$ (die besondere Ellipse von Nr. 187, 3) Interesse.

Wenn wir die Bedingung bilden, unter der die Gleichung in ϱ^2 gleiche Wurzeln hat, so erhalten wir das Produkt aus den Quadraten der linken Seiten der Gleichungen der Achsen und der unendlich fernen Geraden in den Kubus der linken Seite der Gleichung der Evolute. Für $\varrho = 0$ finden wir die Kurve selbst doppelt gezählt, und außerdem

$$y^2 + (x-m)^2 = 0 \quad \text{bez.} \quad \{(x-c)^2 + y^2\}\{(x+c)^2 + y^2\} = 0,$$

also die Verbindungsgeraden der beiden imaginären Kreispunkte mit dem Brennpunkt der Parabel bez. mit den reellen Brennpunkten der Ellipse (Verbindungsgeraden je einer reellen und eines imaginären Brennpunktes der Ellipse). Der Voraussetzung $a = b$ entspricht als Parallelkurve des Kreises ein Paar von konzentrischen Kreisen

$$x^2 + y^2 - (a \pm \varrho)^2 = 0$$

und $(x^2 + y^2)^2 = 0$, also doppelt zählend das imaginäre Asymptotenpaar (vgl. Nr. 103).

Endlich lehrt die allgemeine Form der Gleichung (16), daß die Parallelkurve von den Kurven vierter Ordnung $B\mathsf{H} - \Theta^2$, $A\Theta - \mathsf{H}^2$ ($\alpha \mid \beta$ laufende Koordinaten) in den Punkten berührt wird, in denen sie die Kurve vierter Ordnung $\mathsf{H}\Theta - AB = 0$ schneidet (Nr. 258), d. h. in den Punkten, die zu den Punkten der Krümmungshalbmesser ϱ gehören.[71])

4) *Bestimmung der Krümmungskreise ϱ des Kegelschnittes.*

Setzen wir in die Bedingungen (17) der Oskulation dieselben Werte ein wie in 3), so bestimmen zwei derselben die vier Krümmungsmittelpunkte $\alpha \mid \beta$ zu dem gegebenen Krümmungsradius ϱ. Man erhält sie aus $\mathsf{H} = (A^2B)^{\frac{1}{3}}$, $\Theta = (AB^2)^{\frac{1}{3}}$ als die Schnittpunkte von

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - \varrho^2 = -3(ab\varrho)^{\frac{2}{3}} \quad \text{und}$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 - \varrho^2(a^2 + b^2) = -3(ab\varrho)^{\frac{4}{3}} \quad \text{(vgl. 3)}.$$

Für die Parabel findet man die zwei Schnittpunkte von

$$4m(x + m) = 3(4m^2\varrho)^{\frac{2}{3}}, \quad y^2 - 4mx - \varrho^2 = -3(2m\varrho^2)^{\frac{2}{3}}.$$

5) *Gleichung der Evolute der Ellipse.*

Man hat die Bedingung auszudrücken, unter der sich die Kurven $\varphi(x,y) = 0$, $\chi(x,y) = 0$ in Nr. 343, B. berühren. Für $\mathsf{H} = 0$ geht aber die Bedingung (16) für ein Paar gleicher Wurzeln von $A - 3\mathsf{H}\lambda + 3\Theta\lambda^2 - B\lambda^3 = 0$ über in $AB^2 + 4\Theta^3 = 0$, d. h. die Gleichung der Evolute ist (vgl. Nr. 222)

$$(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4\xi^2\eta^2 = 0.$$

6) *Gleichung der Evolute der Parabel.*

Weil

$$\varphi(x,y) \equiv y^2 - 4mx, \quad \chi(x,y) \equiv 2xy + 2(2m - \xi)y - 4m\eta,$$
$$A = -4m^2, \quad \mathsf{H} = 0, \quad \Theta = 4m(\xi - 2m), \quad B = 4m\eta$$

ist, so wird die Gleichung der Evolute $27m\eta^2 = 4(\xi - 2m)^3$. Es ist zu bemerken, daß die Schnittpunkte von $\varphi(x,y) = 0$, $\chi(x,y) = 0$ nicht nur die Fußpunkte der drei Normalen liefern, die von einem beliebigen Punkte $\xi \mid \eta$ ausgehen (Nr. 205), sondern auch den unendlich fernen Punkt der Achse $y = 0$. Die sechs Sehnen zwischen diesen Schnittpunkten sind also die Seiten des Dreiecks der Fußpunkte und die drei Parallelen zur Achse durch diese Punkte. Darum ist die in Nr. 343 B. angewendete Methode für die Lösung des entsprechenden Problems bei der Parabel nicht die einfachste; man erhält zwar die Gleichung (Nr. 213, 9, in der natürlich nun x, y durch ξ, η und x', y' durch x, y zu ersetzen ist), aber multipliziert mit dem Faktor

$$y^3 - 4m(\xi - 2m)y - 8m^2\eta,$$

der gleich Null gesetzt jene drei Parallelen darstellt.

346. **Kegelschnitt und Geradenpaar.** Wenn von den beiden Kegelschnitten $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ der zweite in ein Geradenpaar ausartet, so ist $B = 0$, und wir dürfen den Kegelschnitt $g(x, x) = 0$ durch $x_1 x_2 = 0$ und das Büschel daher durch $f(x, x) - 2\lambda x_1 x_2 = 0$ dargestellt ansehen. Die Diskriminante des Büschels findet man, indem man in A den Koeffizienten a_{12} durch $a_{12} - \lambda$ ersetzt, in der Form

$$A - 2\lambda(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) - a_{33}\lambda^2.$$

Es ist also

$$3\mathsf{H} = 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) = 2A_{12}, \quad 3\Theta = -a_{33},$$

d. h. Θ verschwindet zugleich mit a_{33} und H für $a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}$ oder $A_{12} = 0$; jenes bedingt, daß der Punkt $x_1 = x_2 = 0$ in der Kurve $f(x, x) = 0$ liegt, dieses, daß die beiden Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in bezug auf $f(x, x) = 0$ konjugiert sind. (Nr. 137 B.)

Nun gilt aber diese Invariantenbeziehung auch bei allgemeiner Koordinatenwahl. Also ergibt sich: *Wenn $g(x,x) = 0$ ein Geradenpaar darstellt ($B = 0$), so ist $\Theta = 0$ die Bedingung, unter der der Schnittpunkt der beiden Geraden in der Kurve $f(x, x) = 0$ liegt; $\mathsf{H} = 0$ aber die Bedingung, unter der diese beiden Geraden in bezug auf $f(x, x) = 0$ harmonische Polaren sind.*

Die Diskriminante $9\mathsf{H}^2 - 12A\Theta$ der Gleichung $A - 3\mathsf{H}\lambda + 3\Theta\lambda^2 = 0$ gibt durch ihr Verschwinden nach Nr. 345 die Bedingung dafür, daß *eine* der Geraden des Geradenpaares $g(x, x) = 0$ den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ berührt. In dem oben gewählten Beispiel bestätigt man dies leicht, da dann

$$9\mathsf{H}^2 - 12A\Theta = 4(A_{12}^2 + Aa_{33}) = 4A_{11}A_{22} \text{ ist.}$$

Sind $\varphi(u, u) \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \cdots + \alpha_{33}u_3^2 = 0$ und $\psi(u, u) \equiv \beta_{11}u_1^2 + 2\beta_{12}u_1u_2 + \cdots + \beta_{33}u_3^2 = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte in Linienkoordinaten und artet $\psi(u, u) = 0$ in ein Punktepaar aus ($\mathsf{B} = 0$), so ist analog zum vorhergehenden $\alpha_{11}\mathsf{B}_{11} + 2\alpha_{12}\mathsf{B}_{12} + \cdots + \alpha_{33}\mathsf{B}_{33} = 0$ die Bedingung, unter der die Verbindungslinie des Punktepaares eine Tangente von $\varphi(u, u) = 0$ ist, und $\beta_{11}\mathsf{A}_{11} + 2\beta_{12}\mathsf{A}_{12} + \cdots + \beta_{33}\mathsf{A}_{33} = 0$ drückt aus, daß die beiden Punkte $\psi(u, u) = 0$ harmonische

le in bezug auf $\varphi(u, u) = 0$ sind. Die A_{ik} und B_{ik} sind
rbei die Unterdeterminanten von α_{ik} und β_{ik} in den Deter-
nanten A bez. B von $\varphi(u, u)$ und $\psi(u, u)$.

347. Ist insbesondere $g(x, x)$ ein vollständiges Quadrat,
kann man das Büschel transformieren zu $f(x, x) - \lambda x_1^2 = 0$.
e Diskriminante desselben wird $A - \lambda A_{11}$, also ist $3\mathrm{H} = A_{11} = 0$
Bedingung der Berührung des Kegelschnittes $f(x, x) = 0$
t der Geraden $g(x, x) = 0$. Dies weist auf einen Zusammen-
ng der Invariante H mit der Tangentialform von $f(x, x)$ hin.

Wir können leicht die Gleichung der Tangenten des Kegel-
mittes $f(x, x) = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der Geraden
$= 0$ bestimmen. Diese Tangenten bilden unter den den Kegel-
mitt $f(x, x) = 0$ in diesen Punkten doppelt berührenden
gelschnitten $f(x, x) - \lambda u_x^2 = 0$ denjenigen, der in ein
radenpaar ausartet. Man hat in diesem Falle wegen $g(x, x) \equiv u_x^2$
cht nur $B = 0$, sondern es verschwinden auch alle Unter-
terminanten von B, also ist nach Nr. 343 auch $\Theta = 0$. Man
det so für die kubische Gleichung $A - 3\mathrm{H}\lambda = 0$; d. h.
ßer der doppelt zu zählenden Wurzel $\lambda = \infty$, die der Geraden
$= 0$ selbst entspricht, liefert sie nur *einen* Wert von λ,
r eben die gesuchten Tangenten bestimmen muß. Nun hat
n aber $b_{ik} = u_i u_k$, also 3H

$$A_{11} u_1^2 + A_{22} u_2^2 + A_{33} u_3^2 + 2A_{23} u_2 u_3 + 2A_{31} u_3 u_1 + 2A_{12} u_1 u_2,$$

h. 3H *ist mit dem Ausdruck $F(u, u)$, der gleich Null ge-
zt die Tangentialgleichung des Kegelschnittes $f(x, x) = 0$
fert, identisch* (Nr. 309). Aus $A - 3\mathrm{H}\lambda = 0$ ergibt sich
her die Gleichung des Tangentenpaares:

$$F(u, u) f(x, x) - A u_x^2 = 0. \tag{3)}$$

Wenn $u_x = 0$ den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ berührt, fällt
s Tangentenpaar mit dieser Geraden selbst zusammen,
d die Bedingung hierfür ist eben $3\mathrm{H} = 0$ oder $F(u, u) = 0$.
nd insbesondere die u_i die Koordinaten der unendlich fer-
n Geraden ($u_i = p_i$, vgl. Nr. 317 und 318), so ist (18) die
eichung des Asymptotenpaares des Kegelschnittes $f(x, x) = 0$
i projektiven Koordinaten. Vgl. hierzu die andere Ableitung
ser Gleichung am Ende von Nr. 318.

B. 1) Für $f^{(1)}(x, x) = 0$, $f^{(2)}(x, x) = 0, \ldots$ als Gleichungen von fünf festen Kegelschnitten ist es immer auf unendlich viele Arten möglich, fünf Konstanten $k_1, k_2, \ldots$ so zu bestimmen, daß die Summe

$$k_1 f^{(1)}(x, x) + k_2 f^{(2)}(x, x) + \cdots + k_5 f^{(5)}(x, x) = 0$$

entweder ein vollständiges Quadrat L^2, oder das Produkt von zwei linearen Faktoren MN ist. Man soll zeigen, *daß die Gerade* $L = 0$ *einen festen Kegelschnitt* $h(x, x) = 0$ *umhüllt, und daß die Geraden* $M = 0$, $N = 0$ *in bezug auf diesen einander konjugiert sind.*

Wir können $h(x, x) = 0$ so bestimmen, daß die für $h(x, x)$ und jeden der fünf Kegelschnitte gebildeten Invarianten H verschwinden, weil dies für A_{ij} als die Koeffizienten der zu $h(x, x)$ gehörigen Gleichung in Linienkoordinaten durch fünf Gleichungen von der Form bedingt wird

$$A_{11}a_{11}^{(i)} + A_{22}a_{22}^{(i)} + A_{33}a_{33}^{(i)} + 2A_{23}a_{23}^{(i)} + 2A_{31}a_{31}^{(i)} + 2A_{12}a_{12}^{(i)} = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

die zur Bestimmung der Verhältnisse der sechs A_{ij}, der Koffizienten der Tangentialgleichung von $h(x, x)$, hinreichen.

Aus der Erfüllung dieser Gleichungen folgt aber zugleich

$$\Sigma A_{ik}(k_1 a_{ik}^{(1)} + k_2 a_{ik}^{(2)} + k_3 a_{ik}^{(3)} + k_4 a_{ik}^{(4)} + k_5 a_{ik}^{(5)}) = 0,$$

d. h. H verschwindet für $h(x, x) = 0$ und einen beliebigen Kegelschnitt des Systems $\Sigma k_i f^{(i)}(x, x) = 0$, womit der Satz bewiesen ist. Wenn die Gerade $M = 0$ gegeben ist, so geht $N = 0$ durch einen festen Punkt, nämlich durch den Pol von $M = 0$ in bezug auf $h(x, x) = 0$.

2) Wenn sechs Geraden $x_1 = 0, \ldots, x_6 = 0$ Tangenten desselben Kegelschnittes sind, so sind die Quadrate der linken Seiten ihrer Gleichungen durch eine lineare Beziehung

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 + k_5 x_5^2 + k_6 x_6^2 = 0$$

verbunden.[72]) Dies ist ein Sonderfall des vorigen, ergibt sich aber direkt, wie folgt:

Man schreibt nach (9) in Nr. 309 die sechs Bedingungen für die Berührung der sechs Geraden mit dem Kegelschnitt und eliminiert die unbekannten Koeffizienten A_{ik} seiner Gleichung; die Bedingung des Satzes ist das Verschwinden der Determinante aus den sechs Zeilen $(i = 1, \ldots, 6)$

$$u_1^{(i)2},\ u_2^{(i)2},\ u_3^{(i)2},\ u_2^{(i)}u_3^{(i)},\ u_3^{(i)}u_1^{(i)},\ u_1^{(i)}u_2^{(i)},$$

und dies ist auch die Bedingung, unter der die sechs Quadrate der $u_1^{(i)}x_1 + u_2^{(i)}x_2 + u_3^{(i)}x_3$ durch eine lineare Beziehung verbunden sind.

3) Sind nur vier Kegelschnitte $f^{(1)}(x, x) = 0, \ldots, f^{(4)}(x, x) = 0$ gegeben und soll der Kegelschnitt $h(x, x) = 0$ so bestimmt werden,

daß die Beziehung $\mathsf{H} = 0$ für ihn und jeden der vier erfüllt wird, so bleibt einer der Koeffizienten A_{ik} unbestimmt, aber alle andern können durch ihn ausgedrückt werden. Also ist die zu $h(x, x) = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten von der Form $\varphi(u, u) - \lambda\psi(u, u) = 0$, d. h. der Kegelschnitt berührt vier feste Geraden. Wir zeigen später direkt (Nr. 368, Schluß), daß Konstanten k_1, k_2, k_3, k_4 auf vier Arten so bestimmt werden können, daß $k_1 f^{(1)}(x, x) + k_2 f^{(2)}(x, x) + k_3 f^{(3)}(x, x) + k_4 f^{(4)}(x, x)$ ein vollständiges Quadrat ist. Indem wir $M = 0$ als die unendlich ferne Gerade auffassen, erkennen wir ferner, daß die Aufgabe eine bestimmte und eine lineare ist, für eine gegebene Gerade $M = 0$ die Konstanten so zu bestimmen, daß $k_1 f^{(1)}(x, x) + \cdots + k_4 f^{(4)}(x, x)$ von der Form MN wird. Nach 1) ist $N = 0$ der Ort des Pols von $M = 0$ in bezug auf $\varphi(u, u) - \lambda\psi(u, u) = 0$. (Vgl. Nr. 304, 1.)

348. **Bedeutung der Beziehungen $\mathsf{H} = 0$ und $\Theta = 0$.** Auch im Falle der allgemeinen Kegelschnitte $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ liegt es nun nahe, das Verschwinden einer ihrer Simultaninvarianten auf binäre harmonische Beziehungen zurückzuführen. Den Weg dazu bietet die Betrachtung der Tangentenpaare aus einem Punkte oder der Schnittpunktpaare in einer Geraden.

Nehmen wir irgend einen Punkt A_3 von $g(x, x) = 0$ als Ecke $x_1 = x_2 = 0$ des Koordinatendreiecks und seine Polare in bezug auf $f(x, x) = 0$ als $x_3 = 0$, so bedingt dies $b_{33} = 0$, $a_{13} = a_{23} = 0$ und $A_{11} = a_{22}a_{33}$, $A_{22} = a_{33}a_{11}$, $A_{23} = A_{31} = 0$, $A_{12} = -a_{33}a_{12}$. Also ist dann der Wert der Invariante

$$3\mathsf{H} = \Sigma A_{ik} b_{ik} = a_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}),$$

und dieser wird, solange der gewählte Fundamentalpunkt A_3 keiner der Schnittpunkte der Kurven ist ($a_{33} \gtrless 0$), nur dann Null, wenn die *binäre* Invariante $a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}$ verschwindet. Daher besteht — und zwar offenbar auch noch für die Schnittpunkte gültig — mit Rücksicht auf Nr. 328 der Satz: *Wenn $\mathsf{H} = 0$ ist, so schneidet die Polare eines jeden Punktes von $g(x, x) = 0$ in bezug auf $f(x, x) = 0$ beide Kegelschnitte harmonisch.* Bei $\Theta = 0$ gilt dasselbe für die Polaren der Punkte von $f(x, x) = 0$ bezüglich $g(x, x) = 0$.

Sind A_1 und A_2 die Schnittpunkte der Polare von A_3 mit $g(x, x) = 0$, so ist $A_1A_2A_3$ ein Polardreieck in bezug auf $f(x, x) = 0$, falls $\mathsf{H} = 0$ ist. Zu jedem Punkt von $g(x, x) = 0$

gibt es ein solches Polardreieck, d. h. es gibt unendlich viele solche, wenn *eines* vorhanden ist. *Umgekehrt hat die Invariante* H *den Wert Null, wenn ein Polardreieck von* $f(x, x) = 0$ *in* $g(x, x) = 0$ *eingeschrieben ist.* Denn die beiden Gleichungen haben dann die Formen

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0, \quad b_{23}x_2x_3 + b_{31}x_3x_1 + b_{12}x_1x_2 = 0$$

und bei $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0,\ b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$ verschwindet H.

Das Verschwinden der Simultaninvariante H *ist notwendig und hinreichend, damit unendlich viele Polardreiecke von* $f(x, x) = 0$ *in* $g(x, x) = 0$ *eingeschrieben werden können.*

Der dual entsprechende Satz lautet: *Das Verschwinden der Simultaninvariante* Θ *ist notwendig und hinreichend, damit unendlich viele Polardreiecke von* $f(x, x) = 0$ *um* $g(x, x) = 0$ *umgeschrieben werden können.* In der Tat kann man die ganze Entwickelung dual deuten, wenn man statt x_i, a_{ik}, b_{ik} setzt u_i, A_{ik}, B_{ik}. Alsdann gehen aber die früheren A_{ik}, B_{ik} über in Aa_{ik}, Bb_{ik}, also $\Sigma A_{ik}b_{ik}$ in $A\Sigma a_{ik}B_{ik}$, d. h. H in $A \cdot \Theta$ und ebenso Θ in $B \cdot \mathsf{H}$, ein wohl zu beachtender Wechsel. In der Tat bestätigt man sofort, daß $\mathsf{H} = 0$ ist, wenn $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$ und $b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0$ ist.

Wir können daher die Bedeutung der Bedingungen $\mathsf{H} = 0$ bez. $\Theta = 0$ folgendermaßen zusammenfassen:

Sind $f(x, x) \equiv \Sigma a_{ik}x_ix_k = 0$ *und* $g(x, x) \equiv \Sigma b_{ik}x_ix_k = 0$ *die Gleichungen zweier Kegelschnitte in Punktkoordinaten,* $F(u, u) \equiv \Sigma A_{ik}u_iu_k = 0$ *bez.* $G(u, u) \equiv \Sigma B_{ik}u_iu_k = 0$ *ihre Gleichungen in Linienkoordinaten, so sagt die Bedingung* $3\mathsf{H} = A_{11}b_{11} + \cdots + 2A_{23}b_{23} + \cdots = 0$ *aus, daß unendlich viele Poldreiecke von* $f(x, x) = 0$ *der Kurve* $g(x, x) = 0$ *eingeschrieben und unendlich viele Poldreiseite von* $g(x, x) = 0$ *der Kurve* $f(x, x) = 0$ *umgeschrieben werden können. Die Bedingung* $3\Theta = B_{11}a_{11} + \cdots + 2B_{23}a_{23} + \cdots = 0$ *sagt aus, daß unendlich viele Poldreiecke von* $g(x, x) = 0$ *der Kurve* $f(x, x) = 0$ *eingeschrieben und unendlich viele Poldreiseite von* $f(x, x) = 0$ *der Kurve* $g(x, x) = 0$ *umgeschrieben werden können.*

Man sagt auch im Falle $\mathsf{H} = 0$: der Kegelschnitt ist der Kurve g *harmonisch eingeschrieben* oder g ist der Kurve f

3) Zwei Tripel harmonischer Pole in bezug auf einen Kegelschnitt $g(x, x) = 0$ liegen auf einem Kegelschnitt, der der Kurve $g(x, x) = 0$ harmonisch umgeschrieben ist (Nr. 299, 2). Zwei Tripel harmonischer Polaren berühren einen anderen.

Das eine Tripel harmonischer Pole werde durch die Ecken des Koordinatendreiecks gebildet; $g(x, x) = 0$ kann alsdann in der Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ angenommen werden (Nr. 344, 1). Durch das zweite Tripel und die Ecken A_1, A_2 des Koordinatendreiecks legen wir einen Kegelschnitt $f(x, x) \equiv a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$; da dieser durch die Ecken eines Poldreiecks von $g(x, x) = 0$ geht, ist $3\Theta = 0$. Mit Rücksicht auf $a_{11} = a_{22} = 0$ (weil A_1 und A_2 auf $f(x, x) = 0$ liegen) wird nun $3\Theta = a_{33}$, daher folgt $a_{33} = 0$, d. h. die Kurve f geht auch durch das zweite Tripel harmonischer Pole. Ebenso beweist man den zweiten Teil des Satzes.

349. **Konjugierte Kegelschnitte.** Das Verschwinden einer der beiden Invarianten H und Θ kann als eine lineare Bedingung für den einen Kegelschnitt als Ort eines Punktes oder für den anderen als Hüllkurve einer Geraden angesehen werden, je nach der Reihe von Koeffizienten, die man als gegeben ansieht. Offenbar kann man so jede lineare Beziehung zwischen den sechs Koeffizienten einer Gleichung in Punkt- oder Linienkoordinaten sowohl mit H als mit Θ identifizieren, indem man die sechs *gegebenen* Koeffizienten als diejenigen einer gegebenen Hüllkurve von Geraden oder Ortskurve von Punkten auffaßt.

Die allgemeine lineare Bedingung für einen Kegelschnitt bedeutet geometrisch, daß er zu einem gegebenen Kegelschnitt konjugiert ist.[73]) Dieser durch die numerischen Koeffizienten der Bedingung gegebene Kegelschnitt kann natürlich von ganz besonderer Art sein, also z. B. ein Punktepaar (auch Doppelpunkt) oder ein Geradenpaar (auch Doppelgerade). In diesen Besonderheiten sind die in Nr. 324 gedeuteten linearen Bestimmungen enthalten. Bilden wir nämlich die Bedingung, daß zwei gegebene Punkte y_i, z_i in bezug auf $g(x, x) = 0$ konjugierte Pole seien, so besteht für sie die Gleichung von Nr. 307, also folgt die nach $\mathsf{H} = 0$ konjugierte Hüllkurve $F(u, u) \equiv \Sigma A_{ik}u_{ik} = 0$ aus

$$\frac{A_{11}}{y_1 z_1} = \frac{A_{22}}{y_2 z_2} = \frac{A_{33}}{y_3 z_3} = \frac{2A_{23}}{y_2 z_3 + y_3 z_2} = \frac{2A_{31}}{y_3 z_1 + y_1 z_3} = \frac{2A_{12}}{y_1 z_2 + y_2 z_1},$$

und dies sind dieselben Bedingungen, die ausdrücken, daß $F(u, u) = 0$ mit $u_y \cdot u_z = 0$ identisch ist. Also ist dann $g(x, x) = 0$ dem aus den beiden Polen gebildeten Kegelschnitt $F(u, u) = 0$ harmonisch umgeschrieben, wie auch geometrisch klar ist. Das Punktepaar y_i, z_i kann insbesondere in einen doppelt zählenden Punkt übergehen, durch den der Kegelschnitt einfach hindurchgeht.

Sind die Koeffizienten der Gleichung $\varphi(u, u) = 0$ einer Kurve zweiter Klasse $r + 1$ linearen Bedingungen unterworfen ($r + 1 < 5$), so sind alle Kurven zweiter Klasse, deren Koeffizienten diesen Bedingungen genügen, $r + 1$ gegebenen Kegelschnitten $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots f^{(r+1)}$ harmonisch eingeschrieben. Dieselbe Eigenschaft hat ein solcher Kegelschnitt $\varphi(u, u) = 0$ in bezug auf alle Kurven des linearen Gebildes r^{ter} Stufe

(19) $\lambda_1 f^{(1)}(x, x) + \lambda_2 f^{(2)}(x, x) + \cdots + \lambda_{r+1} f^{(r+1)}(x, x) = 0$

(Nr. 271). Umgekehrt bilden alle jene Kurven zweiter Klasse ein lineares System $(4 - r)^{\text{ter}}$ Stufe, und wenn $\varphi^{(1)}(u, u)$, $\varphi^{(2)}(u, u), \ldots \varphi^{(5-r)}(u, u)$ die Polynome der Gleichungen linear unabhängiger Kurven des Systems sind, lautet seine Gleichung:

(20) $\mu_1 \varphi^{(1)}(u, u) + \mu_2 \varphi^{(2)}(u, u) + \cdots + \mu_{5-r} \varphi^{(5-r)}(u, u) = 0.$

Alsdann sind die Kurven $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots f^{(r+1)}$ den Kurven $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots \varphi^{(5-r)}$ harmonisch umgeschrieben. *Somit sind alle Kegelschnitte des Systems* r^{ter} *Stufe* (19) *allen Kegelschnitten des Systems* s^{ter} *Stufe* (20) *harmonisch umgeschrieben, wobei* $r + s = 4$ *ist.* Die letztgenannten sind sämtlich den ersten harmonisch eingeschrieben. Solche Systeme werden wir später *kontravariante lineare Gebilde* nennen (Nr. 353); sie heißen auch *konjugierte* lineare Kegelschnittsysteme.

So bilden also alle Kegelschnitte, die Polardreiecken eines gegebenen Kegelschnittes ein- bez. umgeschrieben werden können, ein System vierter Stufe von Kurven zweiter Klasse bez. zweiter Ordnung. Die konjugierten Pole bez. Polaren der gegebenen Kurve bilden die ausgearteten Kurven dieser Systeme. Die zu einem Büschel konjugierten Kurven bilden ein Gewebe (System zweiter Stufe von Kurven zweiter Klasse), die zu einer Schar konjugierten Kurven bilden ein Netz (System zweiter Stufe von Kurven zweiter Ordnung), und umgekehrt.

B. 1) In einem Büschel $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ gibt es immer einen und nur einen Kegelschnitt, der durch die Ecken eines Poldreiecks eines beliebigen Kegelschnittes $h(x, x) \equiv \Sigma c_{ik} x_i x_k = 0$ hindurchgeht.

Setzt man

$$3\Theta_1 = a_{11} C_{11} + 2 a_{12} C_{12} + \cdots + a_{33} C_{33},$$
$$3\Theta_2 = b_{11} C_{11} + 2 b_{12} C_{12} + \cdots + b_{33} C_{33},$$

wo die C_{ik} die Unterdeterminanten der aus den c_{ik} gebildeten Determinante dritten Grades bedeuten, so muß $\Theta_1 - \lambda \Theta_2$ verschwinden; die Gleichung des gesuchten Kegelschnittes wird daher

$$\Theta_2 f(x, x) - \Theta_1 g(x, x) = 0.$$

2) Wenn zwei Kegelschnitte $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ durch die Ecken je eines Poldreiecks von $h(x, x) = 0$ hindurchgehen, so liegen auf jedem Kegelschnitt des Büschels $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ solche Tripel harmonischer Pole von $h(x, x) = 0$. Denn aus dem Verschwinden der für f und h, andererseits für g und h gebildeten Invarianten $\Sigma C_{ik} a_{ik}$ und $\Sigma C_{ik} b_{ik}$ folgt das Verschwinden der für $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ und $h(x, x) = 0$ gebildeten Invariante

$$3\Theta' = C_{11}(a_{11} - \lambda b_{11}) + 2 C_{12}(a_{12} - \lambda b_{12}) + \cdots + C_{33}(a_{33} - \lambda b_{33}).$$

(Vgl. Nr. 348, 1, 3.) Reziprok: Wenn zwei Kegelschnitte die Seiten je eines Poldreiseits eines festen Kegelschnittes berühren, so gilt entsprechendes für alle Kegelschnitte ihrer Schar.

3) Man soll einen Kegelschnitt bestimmen, der drei gegebene Punkte A, B, C und je ein Tripel harmonischer Pole des Kegelschnittes k_1 und des Kegelschnittes k_2 enthält.

Sind $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ die polaren Dreiecke (im Sinne von Nr. 113) zu ABC in bezug auf die Kegelschnitte k_1 und k_2, so sind die polaren Zentra (Nr. 348, 1) des Dreiecks ABC, also der gemeinsame Schnittpunkt der drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 und der Schnittpunkt der drei Geraden AA_2, BB_2, CC_2, zwei Punkte des gesuchten Kegelschnittes, der somit durch fünf Punkte bestimmt ist.

Infolgedessen bilden die Kegelschnitte, die der Bedingung genügen, je ein Tripel harmonischer Pole für zwei gegebene Kegelschnitte zu enthalten, ein Gebilde dritter Stufe von Kegelschnitten.

4) Man konstruiere den Kegelschnitt, der zwei gegebene Punkte A, B und je ein Tripel harmonischer Pole für drei feste Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 enthält.

Wenn C_1, C_2, C_3 die Pole der Geraden AB in bezug auf k_1, k_2, k_3 sind und eine Gerade aus A von den Polen P_1, P_2, P_3 in P den gesuchten Kegelschnitt zum zweitenmal trifft, so liegen nach Nr. 348, 1 die drei Punkte PC_1, BP_1; PC_2, BP_2; PC_3, BP_3 mit A, B und P auf dem gesuchten Kegelschnitt, die Büschel $(P \cdot AC_1 C_2 C_3)$ und $(B \cdot AP_1 P_2 P_3)$ sind also projektiv. Da hier-

nach P auf dem durch A, C_1, C_2, C_3 gehenden Kegelschnitt liegt, für den das Doppelverhältnis dieser vier Punkte gleich dem von $(B \cdot AP_1P_2P_3)$ ist, so ist P linear bestimmt und man hat sechs Punkte des gesuchten Kegelschnittes.

5) Man bestimme den Kegelschnitt durch einen Punkt A und durch je ein Tripel harmonischer Pole in bezug auf vier gegebene Kegelschnitte k_1, k_2, k_3, k_4. Wir ziehen dazu durch A zwei Geraden, die in bezug auf keinen der vier Kegelschnitte k_i konjugiert sind, und denken P, Q als die Punkte, wo sie den gesuchten Kegelschnitt k zum zweitenmal schneiden; seien P_1, P_2, P_3, P_4 und bez. $Q_1, .. Q_4$ die Pole dieser Geraden AP, AQ in bezug auf die $k_1, .. k_4$, so liefert das Dreieck APQ als k eingeschrieben die Doppelverhältnisgleichheit $(P \cdot AQ_1Q_2Q_3Q_4) = (Q \cdot AP_1P_2P_3P_4)$, nach der man P und Q durch folgendes Verfahren bestimmen kann. Man wähle in AP einen Punkt X als eine Lage von P und bestimme in AQ die entsprechende Lage Y von Q durch die Gleichungen $(Y_3 \cdot AP_1P_2P_3) = (X \cdot AQ_1Q_2Q_3)$, $(Y_4 \cdot AP_1P_2P_4) = (X \cdot AQ_1Q_2Q_4)$. Wird nun die Lage von X auf AP geändert, so beschreiben die zwei so erhaltenen Lagen von Y projektive Reihen 3 und 4 und von ihren Doppelpunkten ist der eine der Schnitt von AQ und P_1P_2; der andere Doppelpunkt, die wahre Lage von Q, kann daher linear bestimmt werden — die entsprechende Lage von X ist der Punkt P. Damit sind sieben Punkte von k gefunden, nämlich außer A, P, Q noch die vier Schnittpunkte je eines der vier Geradenpaare PQ_i und QP_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Diese linearen Konstruktionen ersetzen die Auflösung der fünf linearen Gleichungen, deren eine der reelle Punkt A liefert, während die anderen vier die $\Theta_i = 0$ sind.

6) Die Bestimmung des Kegelschnittes k, der Tripel harmonischer Pole in bezug auf fünf gegebene Kegelschnitte $k_1, \ldots k_5$ enthält, veranlaßt zu folgenden Überlegungen: Da kein reelles Element der Peripherie von k bekannt ist, können auf beliebigen Geraden gelegene Punktepaare dieser Peripherie nur durch die zugehörigen Polinvolutionen bestimmt und durch Konstruktionen zweiten Grades erhalten werden, also auch nicht mit der Sicherheit der Realität. Die zu k in einer Geraden g gehörige Polinvolution kann aber nach 2) linear bestimmt werden aus den Schnitten von g mit je zweien der Kegelschnitte, die dem Quadrupel k_2, k_3, k_4, k_5 und bez. dem Quadrupel k_1, k_3, k_4, k_5 harmonisch umgeschrieben sind, weil diese je ein Büschel bilden, so daß durch jeden Punkt A von g einer von ihnen geht. Das gemeinsame Paar dieser beiden Polinvolutionen gibt die Doppelpunkte der Polinvolution von k und damit wird die Lösung quadratisch. (Vgl. die Theorie des Polarsystems in Nr. 391 f.)

7) Weil Punktepaare und Geradenpaare ausgeartete Kegel-

schnitte sind nach der Polarität von Nr. 310, so treten zu den vorigen als besondere Fälle die Aufgaben, deren allgemeinste lautet: Man konstruiere den Kegelschnitt, der fünf gegebene Strecken oder fünf gegebene Winkel durch seine ihren Geraden angehörigen Punkte bez. durch seine aus den Scheiteln dieser Winkel gezogenen Tangenten harmonisch teilt. (Vgl. den Text.) Die Aufgabe 6) umfaßt die vorhergehenden als Sonderfälle.

350. **Harmonische Kreise zu einem Kegelschnitte** sind besonders interessant. Bezogen auf rechtwinklige Koordinaten x, y sei

$$(21)\quad f(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes k. Die Tangentialgleichung des Kreises vom Mittelpunkt $\alpha | \beta$ und vom Radius ϱ ist alsdann nach Nr. 105:

$$(22)\qquad G(u, v) \equiv (\alpha u + \beta v + 1)^2 - \varrho^2(u^2 + v^2) = 0.$$

Also ist für diese beiden Kurven die Invariante 3Θ gleich

$$a_{11}(\alpha^2 - \varrho^2) + a_{22}(\beta^2 - \varrho^2) + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33}$$

$$(23)\qquad \text{oder} \qquad 3\Theta = f(\alpha, \beta) - (a_{11} + a_{22})\varrho^2.$$

Daher ist

$$(24)\qquad f(\alpha, \beta) - (a_{11} + a_{22})\varrho^2 = 0$$

die Bedingung dafür, daß der Kreis (22) *der Kurve* (21) *harmonisch eingeschrieben sei, also die Seiten von unendlich vielen Poldreiseiten der Kurve* (21) *berühre.*

Somit gibt es zu jedem Punkt als Mittelpunkt einen einzigen dem Kegelschnitt harmonisch eingeschriebenen Kreis; sein Radius folgt aus (24). Die sämtlichen Kreise dieser Art bilden also ein Netz (Nr. 122). Das Ergebnis *der Substitution eines Koordinatenpaares* $x = \alpha$, $y = \beta$ *in ein Polynom* $f(x, y)$ *ist daher proportional zum Radiusquadrat des zum Mittelpunkt* $\alpha | \beta$ *gehörigen,* $f(x, y) = 0$ *harmonisch eingeschriebenen Kreises.* (Vgl. Nr. 178, Teil 1, S. 351 unten.)

Das Verschwinden der für die Kurve zweiter Klasse

$$(25)\quad F(u,v) \equiv A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0$$

und den Kreis

$$(26)\quad g(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \pi = 0,\ \pi = \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2$$

gebildeten Invariante

(27) $\quad 3\mathsf{H} = A_{11} + A_{22} + A_{33}\pi - 2A_{13}\alpha - 2A_{23}\beta$

liefert *die Bedingung dafür, daß der Kreis* (26) *der Kurve* (25) *harmonisch umgeschrieben sei, also durch die Ecken unendlich vieler Poldreiecke der Kurve* (25) *hindurchgehe.*

Die Bedingung $\mathsf{H} = 0$ zeigt, daß die Kreise (26) ebenfalls ein Netz bilden und zwar mit dem Orthogonalkreise

(28) $\quad A_{33}(x^2 + y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} = 0.$

Dies ist nach Nr. 313, 2 die Gleichung des Hauptkreises des Kegelschnittes $F(u, v) = 0$. *Also sind alle Kreise, die Poldreiecken eines Kegelschnittes umgeschrieben sind, orthogonal zu dessen Hauptkreis;* die von dem Mittelpunkt des Kegelschnittes an einen harmonisch umgeschriebenen Kreis gezogenen Tangenten sind daher gleich dem Radius des dem Kegelschnitt zugehörigen Hauptkreises.[74])

Aus (27) und (28) folgt ferner, daß die Mittelpunkte der der Kurve $F(u, v) = 0$ harmonisch umgeschriebenen Kreise bei gegebenem Radius auf einem mit dem Hauptkreis dieser Kurve konzentrischen Kreise liegen, der im Falle einer Parabel ($A_{33} = 0$) in die Leitlinie der Parabel übergeht. (Vgl. auch Nr. 213, 1.)

Diesen Sätzen gibt man einen scheinbar verschiedenen Ausdruck, indem man bedenkt, daß nun die Kreise des ersten bez. zweiten Netzes auch Polardreiecke haben, denen der gegebene Kegelschnitt um- bez. eingeschrieben ist. Der Kreismittelpunkt ist aber (vgl. Teil 1, S. 225) stets Höhenschnittpunkt in diesen Dreiecken. Die Gleichung (24) zeigt, daß die Mittelpunkte der einem gegebenen Kegelschnitt k harmonisch eingeschriebenen Kreise bei gegebenem Radius auf einem mit k koachsialen und ähnlichen Kegelschnitt k_1 liegen, der insbesondere mit k zusammenfällt, wenn k eine gleichseitige Hyperbel ($a_{11} + a_{22} = 0$) ist. Vgl. auch Nr. 165, 2 und Nr. 344, 3 für $b^2 = -a^2$.

B. 1) Wenn das Rechteck aus den Abschnitten der Höhen des einem Kegelschnitte $F(u, v) \equiv a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0$ umgeschriebenen Dreiecks konstant und gleich ϱ^2 ist, so ist der Ort des Höhenschnittpunktes der Kreis $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + \varrho^2$.

Wenn nämlich das Produkt aus den Abschnitten der Höhen

konstant und gleich ϱ^2 ist, so folgt aus Teil 1, S. 219, daß ϱ der Radius des Kreises ist, der das gegebene Dreieck zum Poldreieck hat, und zwischen den Koeffizienten der Gleichung des Kreises $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\varrho^2=0$ und denen der Gleichung $F(u,v)=0$ besteht nun die Beziehung $3\mathsf{H}=a^2+b^2-(\alpha^2+\beta^2-\varrho^2)=0$, für die Koordinaten $\alpha=x$, $\beta=y$ des Kreismittelpunktes ist daher $x^2+y^2=a^2+b^2+\varrho^2$. (Vgl. Nr. 344, 3.) Im Falle $\varrho=0$ erhält man den Hauptkreis des Kegelschnittes.

2) Wenn das Rechteck unter den Abschnitten der Höhen für ein in den Kegelschnitt $f(x,y)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ eingeschriebenes Dreieck konstant und gleich ϱ^2 ist, so ist der Ort des Höhenschnittpunktes der mit $f(x,y)=0$ koachsiale und ähnliche Kegelschnitt[75] $f(x,y)-\varrho^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0$.

Folgt ähnlich wie die Lösung von B. 1 unter Rücksicht auf (23) und (24).

3) Man soll den Ort des Höhenschnittpunktes für ein Dreieck finden, das einem Kegelschnitt eingeschrieben und zugleich einem anderen Kegelschnitt umgeschrieben ist.[76])

Wenn man den Mittelpunkt des letzten Kegelschnittes (Halbachsen a, b) zum Koordinatenanfang wählt und die Werte von ϱ^2 einander gleich setzt, die sich aus 2) und 3) ergeben, so ist für

$$f'(x,y)\equiv a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2+2a'_{13}x+2a'_{23}y+a'_{33}=0$$

als Gleichung des Kegelschnittes, in den das Dreieck eingeschrieben ist, die Gleichung des gesuchten Ortes

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)(a'_{11}+a'_{22})-f'(x,y)=0.$$

Der Ort ist daher ein Kegelschnitt, dessen Achsen denen von $f'(x,y)=0$ parallel sind, und der mit $f'(x,y)=0$ zugleich ein Kreis wird.

4) Der Höhenschnitt eines Dreiecks, das einer Parabel umgeschrieben ist, liegt in der Leitlinie.

Folgt leicht aus den beiden letzten Abschnitten des Textes. Vgl. auch Nr. 213, 1.

5) Bei dem eingeschriebenen Kreis eines Polardreiecks der Parabel ist die vom Fußpunkt seiner Mittelpunktsordinate in der Achse an ihn zu legende Tangente der zugehörigen Parabelordinate gleich.

Der Beweis liegt in der Beziehung $\Theta=0$ in Nr. 344, 4.

6) Wenn der Radius des einem Polardreieck einer Parabel eingeschriebenen Kreises gegeben ist, so ist der Ort seines Mittelpunktes eine Parabel von gleichem Parameter mit der gegebenen.

7) Der Ort der Mittelpunkte $\xi \mid \eta$ der den Kegelschnitten eines schels harmonisch eingeschriebenen Kreise ist die gleichseitige perbel des Büschels.

Denn sind $f'(x, y) = 0$, $f''(x, y) = 0$ zwei Kegelschnitte, so d nach (23) die Gleichungen $f'(\xi, \eta) - (a'_{11} + a'_{22})\varrho^2 = 0$ und $(\xi, \eta) - (a''_{11} + a''_{22})\varrho^2 = 0$ die Bedingungen dafür, daß ein eis vom Mittelpunkt $\xi \mid \eta$ und vom Radius ϱ den Kegelschnitten $x, y) = 0$ und $f''(x, y)$, somit allen Kegelschnitten des Büschels $x, y) - \lambda f''(x, y) = 0$ harmonisch eingeschrieben sei. Durch eichsetzen der Werte von ϱ^2 erhält man als Ort des Mittelpunk- $\xi \mid \eta$ die Kurve $(a''_{11} + a''_{22})f'(\xi, \eta) - (a'_{11} + a'_{22})f''(\xi, \eta) = 0$, in dem Büschel enthaltene gleichseitige Hyperbel.

8) Die den Kegelschnitten einer Schar harmonisch umgeschrie- ıen Kreise bilden ein Büschel, dessen Potenzlinie die Leitlinie · Parabel der Schar ist.

Die Hauptkreise der Kegelschnitte bilden daher das konjugierte schel (Teil 1, S. 243/4).

9) Zwei gleiche Kreise, deren Schnittsehne so groß wie ihr ıdius ist, bilden zwei Kegelschnitte, für die die Invarianten H d Θ verschwinden.[77])

Die Gleichungen solcher Kreise sind z. B. $x^2 + y^2 \mp 2ax - \frac{a^2}{3} = 0$.

gl. Nr. 395, 3.

351. *Es ist im allgemeinen nicht möglich, dem einen von zei beliebigen Kegelschnitten ein Dreieck einzuschreiben, das gleich dem anderen umgeschrieben ist.* Wenn aber zwischen iden Kegelschnitten eine gewisse Beziehung stattfindet, kön- n unendlich viele solche Dreiecke gefunden werden.

Ist nämlich ein solches Dreieck möglich und ist es zum ındamentaldreieck gewählt, so lassen sich die Gleichungen ider Kegelschnitte in die einfachen Formen

$$f(x, x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0,$$

$$g(x, x) \equiv 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

erführen (vgl. Nr. 344, 5), und wir erhalten für ihre Inva- ınten die Werte

$$A = -4, \quad B = 2a_{23}a_{31}a_{12}, \quad 3\mathsf{H} = 4(a_{23} + a_{31} + a_{12}),$$

$$3\Theta = -(a_{23} + a_{31} + a_{12})^2.$$

wischen diesen besteht aber die Beziehung[78])

9) $$3\mathsf{H}^2 = 4A\Theta,$$

eine Gleichung solcher Art, daß sie, wie in Nr. 344 gezeigt wurde, durch eine Veränderung der Koordinatenbeziehung ungestört bleibt. Also muß dieselbe Beziehung unter den Koeffizienten der Gleichungen beider Kegelschnitte immer stattfinden, wenn es überhaupt möglich sein soll, sie in die vorher angenommenen einfachen Formen überzuführen. Die Gleichung (29) ist so die analytische Bedingung der geforderten geometrischen Beziehung.

In der Tat gehört umgekehrt, unter Voraussetznng der Beziehung (29) auch die dritte Ecke eines dem Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ umgeschriebenen Dreiecks dem Kegelschnitt $g(x, x) = 0$ an, wenn seine zwei ersten Ecken auf ihm liegen. Denn ergänzen wir den Ausdruck $g(x, x)$ zu $g(x, x) + a_{33}x_3^2$, so geht 3Θ über in $3\Theta - a_{12}a_{33}$; aber die frühere Beziehung ist mit der jetzt erforderlichen $3\mathrm{H}^2 = 4A(\Theta - a_{12}a_{33})$ nur verträglich, wenn $a_{33} = 0$ ist (im Falle $a_{12} = 0$ würde $g(x,x) = 0$ ein Geradenpaar darstellen).

Man kann auch Beziehungen zwischen Invarianten benutzen, um die Gleichungen der Kegelschnitte auf einfachere Formen zu bringen. So folgt z. B., daß Kegelschnitte von der durch $9\mathrm{H}\Theta = AB$ ausgedrückten Beziehung allgemein auf

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_1^2 - x_2^2 + cx_3^2 = 0$$

reduziert werden können.

Damit überhaupt ein Kurvenpaar $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ in ein anderes $f'(x, x) = 0$, $g'(x, x) = 0$ übergeführt werden könne, müssen nach unserer Abzählung *zwei absolute Invarianten bez. gleich* sein. Die einfachsten sind die Quotienten

$$\mathrm{H}^2 : A\Theta = \mathrm{H}'^2 : A'\Theta', \quad \Theta^2 : B\mathrm{H} = \Theta'^2 : B'\mathrm{H}'.$$

Nur von ihren Werten müssen also Doppelverhältniswerte abhängen, wie z. B. die der Schnittpunktpaare in den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks, von denen wirklich nur zwei unabhängig sind.

B. 1) Man bestimme die Bedingung für diejenige Lage von zwei Kreisen, bei der dem einen ein Dreieck eingeschrieben werden kann, das zugleich dem anderen umgeschrieben ist.

Setzt man in Nr. 344, 2 das Quadrat der Zentraldistanz der beiden Kreise $\alpha^2 + \beta^2$ gleich d^2 und $d^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2 = e^2$, so wird nach (29) und Nr. 344, 2 die gesuchte Bedingung

$^2 - \varrho_1^2)^2 + 4\varrho_1^2(e^2 - \varrho_2^2) = 0$ oder $(e^2 + \varrho_1^2)^2 = 4\varrho_1^2\varrho_2^2,$

$$d^2 = \varrho_2^2 \pm 2\varrho_1\varrho_2,$$

ei ϱ_2 den Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises be-
anet. Es ist dies der bekannte Ausdruck, den bereits *Euler* für
Entfernung zwischen den Mittelpunkten des einem Dreieck um-
hriebenen und eines ihm eingeschriebenen Kreises gegeben hat:
esondere bei konzentrischer Lage ist $\varrho_2 = 2\varrho_1$.

Der Ort der Höhenschnittpunkte aller solcher Dreiecke ist ein
is, der den Überschuß des Radius vom umgeschriebenen Kreis
r den Durchmesser des eingeschriebenen zum Radius hat.

2) Für einen Mittelpunktskegelschnitt steht der um einen
nnpunkt mit der Hauptachse als Radius beschriebene Kreis zu
gegebenen Kegelschnitt in der Beziehung (29) des Textes —
äß den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad (x + c)^2 + y^2 = 4a^2$$

nach den Werten in Nr. 344, 3.

3) Man soll den Ort des Mittelpunktes für einen Kreis von
ebenem Halbmesser finden, der einem dem Kegelschnitt
$, x) = 0$ umgeschriebenen Dreieck umgeschrieben oder einem
eingeschriebenen Dreieck eingeschrieben ist.

Die fraglichen Orte sind Kurven vierter Ordnung, ausgenom-
i den Fall vom Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises für
Dreieck der Parabeltangenten; dieser Ort ist ein Kreis, der den
nnpunkt zum Mittelpunkt hat, wie auch sonst geschlossen wer-
kann.

4) Unter welcher Bedingung kann in den Kegelschnitt
$, x) = 0$ ein Dreieck eingeschrieben werden, dessen Seiten der
he nach die Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 eines Büschels $f(x, x) +$
$x, x) = 0$ berühren?

Setzen wir $g(x, x) \equiv 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$,
$, x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(1 + k_1a_{23})x_2x_3 - 2(1 + k_2a_{31})x_3x_1$
$2(1 + k_3a_{12})x_1x_2 = 0$, so wird $f(x, x) + k_ig(x, x) = 0$ durch
$= 0$ berührt und die Invarianten von $f(x, x)$ und $g(x, x)$ sind

$$A = -(2 + k_1a_{23} + k_2a_{31} + k_3a_{12})^2 - 2k_1k_2k_3a_{23}a_{31}a_{12},$$

$$3\mathrm{H} = 2(a_{23} + a_{31} + a_{12})(2 + k_1a_{23} + k_2a_{31} + k_3a_{12}) + 2a_{23}a_{31}a_{12}(k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2),$$

$$3\Theta = -(a_{23} + a_{31} + a_{12})^2 - 2(k_1 + k_2 + k_3)a_{23}a_{31}a_{12},$$

$$B = 2a_{23}a_{31}a_{12},$$

sie erfüllen die verlangte Bedingung

$$\{3\mathrm{H} - B(k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2)\}^2 = 4(A + k_1k_2k_3B)\{3\Theta + B(k_1 + k_2 + k_3)\}.$$

352. **Kovarianten, Kontravarianten, Zwischenformen.** Die Definition der Kovarianten in Nr. 330 ist auch auf ternäre Formen anwendbar. Bildet man aus der allgemeinen Gleichung einer Kurve oder den Gleichungen der Kurven eines Systems *die Gleichung* $\mathsf{C} = 0$ *eines Ortes, der zur Kurve oder zu dem System eine durch lineare Transformation (Verwandtschaft) unzerstörbare gesetzmäßige Beziehung hat, so ist* $\mathsf{C} = 0$ *eine kovariante Kurve zu der oder den Gegebenen.* Die Gleichung der bei einer gegebenen Kollineation einer Kurve $\mathsf{C} = 0$ entsprechenden Kurve $\mathsf{C}' = 0$ wird erhalten, indem man die Gleichung $\mathsf{C} = 0$ selbst transformiert, oder auch dadurch, daß man die gegebene Gleichung oder das gegebene Gleichungssystem transformiert und nun dieselbe Funktion C mit den transformierten Koeffizienten bildet. Die beiden so entstehenden Ausdrücke sind alsdann nur um eine Potenz des Transformationsmoduls als Faktor verschieden, denn es ist

(30) $$\mathsf{C}(a', x') = \Delta^r \cdot \mathsf{C}(a, x).$$

Eine quadratische Form $f(x, x)$ hat *keine* von $c \cdot f(x, x)$ verschiedene Kovariante, dagegen haben zwei oder mehr quadratische Formen *simultane* Kovarianten.

Im ternären Gebiet gehören zu den drei Veränderlichen x_i drei kontragrediente Veränderliche u_i. Wenn eine gegebene kollineare Punktverwandtschaft durch die Substitution $x_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k'$ bestimmt ist, so wird die Strahlenverwandtschaft gleichzeitig durch $\Delta u_i = \Sigma \mathsf{A}_{ik} u_k'$ ausgedrückt. Bei gleichzeitiger Anwendung beider Substitutionen besteht dann die Identität

(31) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \equiv u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3'.$$

Demnach kann man Invarianten eines aus Kurven und Geraden $u_i, v_i, \ldots$ bestehenden Systems als homogene Funktionen der kontragredienten Veränderlichen auffassen. Wenn wir eine solche Invariante $\mathsf{K}(a, b, u)$ aus den Koeffizienten des transformierten Formensystems bilden $\mathsf{K}(a', b', u')$, so ist auch

(32) $$\mathsf{K}(a, b, u) \equiv \Delta^r \cdot \mathsf{K}(a', b', u').$$

Man nennt solche Formen kontragredienter Veränderlicher, die die Invarianteneigenschaft haben, *zugehörige Formen oder Kontravarianten*[79]) der gegebenen Formen oder des ge-

ənen Systems. *Eine zu Ortskurven kontravariante Kurve eine Hüllkurve oder Enveloppe, deren Gleichung eine pro- ve Beziehung einer beweglichen Geraden zu dem System lrückt.* Denn dieselbe Funktion der transformierten Koef- nten des Systems wird bis auf einen konstanten Faktor ı erhalten, wenn man in der ursprünglichen Kontravariante Veränderlichen selbst invers transformiert. Sie gleicht n einer Kovariante, nur sind nicht die ursprünglichen, lern die transformierten Substitutionen auf ihre Veränder- en anzuwenden.*)

Ihrer geometrischen Bedeutung nach sind die *Reziprokal- ıen Kontravarianten der ursprünglichen Formen,* also Orts- chung und Tangentialgleichung sind kontravariant. Die ıgen Kontravarianten stehen zur Tangentialgleichung in selben Verhältnis, wie die Kovarianten zur Ortsgleichung. e einzelne quadratische Gleichung $f(x, x) = 0$ hat *keine* ere Kontravariante als die Tangentialgleichung $F(u, u)$ $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$, wo bei linearer Transformation die Identität eht $F'(u, u) \equiv \Delta^2 \cdot F(u, u)$.

Endlich können für ein aus Kurven und Geraden be- endes System wiederum Kovarianten gebildet werden, die it außer den laufenden Koordinaten x_i nicht nur die Ko- ienten der Gleichungen jener Kurven, sondern auch die rdinaten der Geraden u_i enthalten. *Solche Funktionen von erlei Veränderlichen nennt man Zwischenformen, wenn sie arianteneigenschaft haben,* d. h. ihren Wert nicht oder nur ch Hinzutritt eines konstanten Faktors ändern, wenn man eine Reihe der Veränderlichen durch die ursprüngliche, die ere Reihe aber durch die transponierte Substitution trans- niert. Also sind z. B. alle Produkte von Kovarianten und ıtravarianten Zwischenformen.

Die entsprechende Form u_x oder x_u dieser Definition lt *die identische Zwischenform. Eine quadratische Form*

*) Man kann daher die Veränderlichen u_i auch durch die Ablei- ;en nach den gleich benannten x_i ersetzen, um aus der Kontra- ınte eine neue Kovariante entstehen zu lassen (Nr. 342).

$f(x, x)$ hat nur solche Zwischenformen, die sich als ganze Funktionen von $f(x, x)$, $F(u, u)$, A und u_x darstellen lassen. Diese vier invarianten Formen bilden also das vollständige System der quadratischen Form im früheren Sinne.

353. **Kontravarianter Kegelschnitt H zu zwei gegebenen.** Nach dem vorstehenden knüpft die Bildung der simultaninvarianten Formen zu zwei gegebenen an die Tangentialform an. Diese wird nach Nr. 149 von irgend einem Kegelschnitt des Büschels $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ gebildet, indem man in

$$(33)\qquad -F(u, u) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(Nr. 309)}$$

die Koeffizienten a_{ik} durch $a_{ik} - \lambda b_{ik}$ ersetzt. Die so entstehende Determinante läßt sich nach der binomischen Zusammensetzung von drei Reihen ihrer Elemente in sieben andere Determinanten als Summanden zerlegen, von denen die erste keine der Spalten b enthält und daher mit $-F(u, u)$ identisch ist, drei weitere je eine Spalte der b und damit den Faktor λ enthalten, die drei letzten je zwei Spalten der b und damit den Faktor λ^2. Die Summe dieser letzten erweist sich als die mit $-F(u, u)$ ganz gleich gebildete Determinante der b und soll durch $-G(u, u)$ bezeichnet werden. Daher ist das Ergebnis, d. h. die Tangentialgleichung des Kegelschnittes $f(x, x) - \lambda g(x, x)$, von der Form

$$(34)\qquad F(u, u) - 2\lambda H(u, u) + \lambda^2 G(u, u) = 0,$$

wenn wir durch $2H(u, u)$ die negative Summe der drei Partialdeterminanten mit dem Faktor $-\lambda$ bezeichnen. So ist

$$(35)\qquad -2H \equiv \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & 0 & u_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

oder

$$(36)\qquad -2H \equiv 3\sum \frac{d\mathrm{H}}{d a_{ik}} u_i u_k = 3\sum \frac{d\Theta}{d b_{ik}} u_i u_k,$$

$$(37)\quad \begin{cases} 2H \equiv (a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})u_1^2 \\ \qquad + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33} - 2a_{31}b_{31})u_2^2 \\ \qquad + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})u_3^2 \\ + 2(a_{13}b_{12} + a_{12}b_{13} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})u_2u_3 \\ + 2(a_{21}b_{23} + a_{23}b_{21} - a_{22}b_{31} - a_{31}b_{22})u_3u_1 \\ + 2(a_{32}b_{31} + a_{31}b_{32} - a_{33}b_{12} - a_{12}b_{33})u_1u_2. \end{cases}$$

Nun besteht die Invarianteneigenschaft dieser Tangentialform für jeden beliebigen Parameter λ, also haben die drei Koeffizienten F, H, G diese Eigenschaft. *Somit ist H eine simultane Kontravariante des Formenpaares $f(x, x)$, $g(x, x)$ und $H(u, u) = 0$ ein kontravarianter Kegelschnitt.*

354. **Kovarianter Kegelschnitt $k(x, x)$ zu zwei gegebenen.** Genau dual verfahrend geht man von der Gleichung der Kegelschnitte einer Schar $F(u, u) - \lambda G(u, u) = 0$ zu ihrer Gleichung in Punktkoordinaten über (Nr. 311). Diese lautet

$$(38)\quad -\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & A_{12} - \lambda B_{12} & A_{13} - \lambda B_{13} & x_1 \\ A_{21} - \lambda B_{21} & A_{22} - \lambda B_{22} & A_{23} - \lambda B_{23} & x_2 \\ A_{31} - \lambda B_{31} & A_{32} - \lambda B_{32} & A_{33} - \lambda B_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

mit ganz derselben Entwickelung wie vorhin, nur daß statt der a_{ik}, b_{ik}, u_i die A_{ik}, B_{ik}, x_i stehen. Daher ist das von λ freie Glied nunmehr $Af(x, x)$ statt $F(u, u)$ wie in (34), der Faktor von λ^2 wird $Bg(x, x)$ statt $G(u, u)$, und der Koeffizient $2k(x, x)$ von $-\lambda$ ist

$$(39)\quad \begin{cases} 2k(x, x) \equiv (A_{22}B_{33} + A_{33}B_{22} - 2A_{23}B_{23})x_1^2 \\ \qquad + (A_{33}B_{11} + A_{11}B_{33} - 2A_{31}B_{31})x_2^2 \\ \qquad + (A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11} - 2A_{12}B_{12})x_3^2 \\ + 2(A_{13}B_{12} + A_{12}B_{13} - A_{11}B_{23} - A_{23}B_{11})x_2x_3 \\ + 2(A_{21}B_{23} + A_{23}B_{21} - A_{22}B_{31} - A_{31}B_{22})x_3x_1 \\ + 2(A_{32}B_{31} + A_{31}B_{32} - A_{33}B_{12} - A_{12}B_{33})x_1x_2. \end{cases}$$

Weil nun die linke Seite der Gleichung

$$(40)\qquad Af(x, x) - 2\lambda k(x, x) + \lambda^2 Bg(x, x) = 0$$

unabhängig von λ die Invarianteneigenschaft hat, so ist k *eine simultane Kovariante des Formenpaares f, g* und $k = 0$ ein kovarianter Kegelschnitt. Die projektiven Beziehungen der

beiden Kegelschnitte $H(u, u) = 0$ und $k(x, x) = 0$ werden völlig dual sein.

Ist das Kegelschnittpaar auf das gemeinsame Polardreieck bezogen:

$$(41) \quad \begin{cases} f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0, \\ g(x, x) \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0, \end{cases}$$

so ist, wegen

$$A_{ii} = a_{11}a_{22}a_{33} : a_{ii}, \quad B_{ii} = b_{11}b_{22}b_{33} : b_{ii},$$

die Gleichung des kovarianten Kegelschnittes

$$(42) \quad \begin{cases} 2k \equiv a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 \\ \quad + a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})x_2^2 \\ \quad + a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_3^2 = 0 \end{cases}$$

und die Gleichung des kontravarianten Kegelschnittes

$$(43) \quad \begin{cases} 2H \equiv (a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})u_1^2 + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})u_2^2 \\ \quad + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})u_3^2 = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Kegelschnitte haben daher mit den gegebenen dasselbe gemeinsame Polardreieck.

B. Zur Verbindung mit Nr. 349 zeige man die Richtigkeit der Sätze:

1) Der geometrische Ort der in bezug auf $g(x, x) = 0$ genommenen Pole der Tangenten von $f(x, x) = 0$ (*reziproke Polare* von f in bezug auf g) ist ein Kegelschnitt mit der Gleichung $3\mathsf{H}g(x, x) - 2k(x, x) = 0$.

Denn die gewünschte Kurve ist zugleich Ort aller Punkte x_i, deren in bezug auf g genommenen Polaren die Kurve f berühren; sie hat also die Gleichung $F(g_1, g_2, g_3) = 0$, wobei zur Abkürzung g_i an Stelle von $\frac{1}{2}g'(x_i)$ gesetzt ist. Sind f und g durch (41) gegeben, so wird $F(g_1, g_2, g_3) \equiv a_{22}a_{33}b_{11}^2x_1^2 + a_{33}a_{11}b_{22}^2x_2^2 + a_{11}a_{22}b_{33}^2x_3^2 = 0$; mit Hilfe von H, $g(x, x)$ und $k(x, x)$ findet man aber $F(g_1, g_2, g_3) \equiv 3\mathsf{H}g(x, x) - 2k(x, x)$.

2) Ebenso folgt: Der geometrische Ort der in bezug auf $f(x, x) = 0$ genommenen Pole der Tangenten von $g(x, x) = 0$ (*reziproke Polare* von g in bezug auf f) ist der Kegelschnitt $G(f_1, f_2, f_3) = 0$, wobei $G(f_1, f_2, f_3) \equiv 3\Theta f(x, x) - 2k(x, x)$.

3) Wenn der Kegelschnitt f dem Kegelschnitt g harmonisch eingeschrieben ist ($\mathsf{H} = 0$), so liegen die Ecken der der Kurve f umgeschriebenen Poldreiseite von g sämtlich auf dem Kegelschnitt $k(x, x) = 0$.

Denn nach 1) ist nunmehr $F(g_1, g_2, g_3) \equiv -2k(x, x)$.

4) Wenn f der Kurve g harmonisch umgeschrieben ist ($\Theta = 0$), so berühren die Seiten der der Kurve f eingeschriebenen Poldreiecke von g sämtlich den Kegelschnitt $H(u, u) = 0$.

Ersetzt man nämlich in $F(g_1, g_2, g_3) \equiv 3\,\mathsf{H} g(x, x) - 2k(x, x)$ die $a_{ik}, A_{ik}, b_{ik}, B_{ik}, x_i$ der Reihe nach durch $A_{ik}, A a_{ik}, B_{ik}, B b_{ik}, u_i$, so erhält man $A f(G_1, G_2, G_3) \doteq 3 A \Theta G(u, u) - 2 A B H(u, u)$ und nach Wegheben von A folgt $f(G_1, G_2, G_3) \equiv 3\,\Theta\, G(u, u) - 2 B H(u, u)$. Hier ist $G_i = \frac{1}{2} G'(u_i)$. Im Fall $\Theta = 0$ ist die Kurve $H(u, u) = 0$ dieselbe wie $f(G_1, G_2, G_3) = 0$.

5) Man zeige, daß außer den in B. 1, 2 und 4 benutzten Beziehungen noch die folgenden stattfinden:

$$\begin{aligned}
B f(x, x) &\equiv 3\,\Theta g(x, x) - 2 H(g_1, g_2, g_3),\\
A g(x, x) &\equiv 3\,\mathsf{H} f(x, x) - 2 H(f_1, f_2, f_3),\\
g(F_1, F_2, F_3) &\equiv 3\,\mathsf{H} F(u, u) - 2 A H(u, u),\\
B^2 F(u, u) &\equiv 3\,\mathsf{H} B G(u, u) - 2k(G_1, G_2, G_3),\\
A^2 G(u, u) &\equiv 3\,\Theta A F(u, u) - 2k(F_1, F_2, F_3).
\end{aligned}$$

355. **Geometrische Bedeutung der Kontravariante H.** Die zu $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten (34) ist in λ vom zweiten Grade, *es gibt daher im Büschel zwei Kegelschnitte, die eine gegebene Gerade $v_x = 0$ berühren*, und es fragt sich nun, wie man die Berührungspunkte bestimmt. Bei Beantwortung dieser Frage beachte man, daß nach (11a) in Nr. 309 die mit den u_i und v_i geränderte Determinante der $a_{ik} - \lambda b_{ik}$, gleich Null gesetzt, die Gleichung des Schnittpunktepaares einer beliebigen Geraden $v_x = 0$ mit dem Kegelschnitt $f(x, x) - \lambda g(x, x) = 0$ des Büschels darstellt. Diese Gleichung ist in λ vom ersten, in den u_i vom zweiten Grade, sie ist von der Form $P - \lambda Q = 0$. Trägt man in sie die Wurzeln λ_1 und λ_2 von

$$F(v, v) - 2\lambda H(v, v) + \lambda^2 G(v, v) = 0 \tag{44}$$

ein, so geht das Schnittpunktepaar über in den doppelt zu zählenden Berührungspunkt, man kann daher setzen

$$P - \lambda_1 Q = V_1^2, \quad P - \lambda_2 Q = V_2^2, \tag{45}$$

wo nun $V_1 = 0$ und $V_2 = 0$ die gesuchten Berührungspunkte darstellen. Mit Hilfe dieser beiden Ausdrücke läßt sich die Gleichung $P - \lambda Q = 0$ unter der Voraussetzung, daß λ_1 und λ_2 von einander verschieden sind, in die Form bringen

$$(46)\qquad \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{(\lambda-\lambda_2)V_1^2-(\lambda-\lambda_1)V_2^2\right\}=0 \qquad \text{oder}$$

$$(46\text{a})\qquad \left(V_1+\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2}}\,V_2\right)\left(V_1-\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2}}\,V_2\right)=0.$$

Aus der Gestalt dieser Gleichung ergibt sich sofort der Satz: *Eine beliebige Gerade trifft die Kegelschnitte eines Büschels in Punktepaaren einer Involution; die Doppelpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte derjenigen zwei Kurven des Büschels, die die gegebene Gerade zur Tangente haben.*[80])

Da die Parameterwerte $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ den Kurven $f=0$ bez. $g=0$ des Büschels $f-\lambda g=0$ zugehören, erhält man aus (46a) für $\lambda=0$ bez. $\lambda=\infty$ die Punktepaare, in denen die Kurven $f=0$ bez. $g=0$ die Gerade $v_x=0$ treffen. Das Doppelverhältnis α dieser beiden Punktepaare wird (vgl. Nr. 85):

$$(47)\qquad \alpha=\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}-1}{-\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}-1}:\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}+1}{-\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}+1}=\frac{(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2})^2}{(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2})^2},$$

und hieraus folgt $(\alpha-1):(\alpha+1)=-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}:(\lambda_1+\lambda_2)$. Erhebt man diesen Ausdruck ins Quadrat und führt man für das Produkt und die Summe der Wurzeln λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung (44) die Koeffizienten ein, so ergibt sich die Beziehung

$$(48)\qquad (\alpha-1)^2H^2(v,v)-(\alpha+1)^2F(v,v)\,G(v,v)=0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die v_i durch laufende Koordinaten u_i und denkt man sich die Zahl α gegeben, so stellt diese Gleichung die Bedingung dar, der die Koordinaten u_i einer Geraden genügen müssen, wenn die Paare der Schnittpunkte dieser Geraden mit den zwei Kegelschnitten $f=0$ und $g=0$ ein gegebenes Doppelverhältnis α bilden sollen. Wie man sieht, umhüllt die Gerade eine Kurve vierter Klasse.

Im Falle eines harmonischen Verhältnisses $(\alpha=-1)$ geht (48) über in $H^2(u,u)=0$ oder $H(u,u)=0$, die Gerade umhüllt den kontravarianten Kegelschnitt H: *Alle Geraden, die zwei Kegelschnitte $f=0$ und $g=0$ in harmonischen Punktepaaren treffen, umhüllen einen dritten Kegelschnitt $H=0$, den*

wir die harmonische Kurve zweiter Klasse oder nach dem ersten Entdecker der eben erwähnten Eigenschaft die Staudtsche Kurve zweiter Klasse nennen wollen.[81])

Trifft die Gerade $u_x = 0$ den Kegelschnitt f in P_1 und P_2, g in P_3 und P_4, so hat das Doppelverhältnis α der beiden Schnittpunktepaare bekanntlich den Wert $\frac{P_1P_3 \cdot P_2P_4}{P_2P_3 \cdot P_1P_4}$. Wenn dieses Doppelverhältnis Null oder unendlich groß ist, muß eine der Strecken P_1P_3, P_2P_4, P_2P_3, P_1P_4 zu Null werden, d. h. die Gerade muß die Kegelschnitte so treffen, daß ein auf f gelegener Schnittpunkt mit einem auf g gelegenen zusammenfällt, die Gerade muß also durch einen der vier Grundpunkte des Büschels $f - \lambda g = 0$ gehen. Und umgekehrt, so oft die Gerade $u_x = 0$ durch einen der vier Grundpunkte geht, wird α gleich Null oder unendlich groß. Für diese Werte von α geht aber (48) über in

$$H^2(u, u) - F(u, u)\,G(u, u) = 0, \tag{49}$$

und diese Gleichung wird daher durch die Koordinaten u_i einer jeden Geraden erfüllt, die durch einen der *vier Grundpunkte* geht, d. h. *die Gleichung* (49) *stellt diese vier Punkte dar.*

Da ferner die Koordinaten u_i einer jeden Geraden, die in einem der vier Grundpunkte entweder den Kegelschnitt f oder den Kegelschnitt g *berührt,* nicht nur der Gleichung (49) sondern auch der Gleichung $F(u, u) = 0$ bez. $G(u, u) = 0$ genügen, so erfüllen diese Koordinaten auch die Gleichung $H(u, u) = 0$, d. h.: *Die Kurve H wird auch von denjenigen acht Geraden berührt, die in den vier Schnittpunkten von f und g als Tangenten an f oder an g gezogen werden können.*

356. **Geometrische Bedeutung der Kovariante k.** Dual zu dem Satze, der in Nr. 355 die Beziehung der Kurve $H(u, u) = 0$ zu den Kurven f und g geometrisch deutete, folgt: *Alle Punkte, von denen man an die Kegelschnitte $F(u, u) = 0$ und $G(u, u) = 0$ harmonische Tangentenpaare ziehen kann, liegen auf dem durch* (39) *definierten Kegelschnitt $k(x, x) = 0$, den wir die harmonische Kurve zweiter Ordnung oder nach dem ersten Entdecker der eben erwähnten Eigenschaft die Staudtsche Kurve zweiter Ordnung nennen wollen.*[81]) Es sei

daran erinnert, daß die in den Koeffizienten von (39) enthaltenen Größen A_{ik} und B_{ik} die Unterdeterminanten der zu $f(x, x) = 0$ und $g(x, x) = 0$ gehörigen Determinanten A und B bedeuten.

Man kann nun fragen, welche Gleichung — dual zu (49) — die vier gemeinsamen Tangenten von f und g darstellt. Um sie zu erhalten, muß man in (49) die a_{ik} und b_{ik} durch A_{ik} bez. B_{ik} ersetzen, ferner A_{ik}, B_{ik} durch Aa_{ik} bez. Bb_{ik}, die u_i durch die x_i. An Stelle von $H(u, u)$, $F(u, u)$, $G(u, u)$ treten alsdann (vgl. Nr. 311) der Reihe nach die Ausdrücke $k(x, x)$, $Af(x, x)$, $Bg(x, x)$, und es folgt: *Die Gleichung*

$$k^2(x, x) - ABf(x, x)g(x, x) = 0 \tag{50}$$

stellt die vier den Kegelschnitten f und g gemeinsamen Tangenten dar.

Ferner folgt: *Die Kurve k geht durch die acht Berührungspunkte der den Kegelschnitten f und g gemeinsamen Tangenten.*

Wenn sich die Kegelschnitte f und g in P berühren, werden sie in P auch von k berührt. Dies folgt sofort aus dem eben erwähnten Satze und außerdem ergibt sich: *Die zu zwei in doppelter Berührung stehenden Kegelschnitten gehörige harmonische Kurve zweiter Ordnung $k = 0$ berührt die beiden Kegelschnitte in ihren Berührungspunkten,* gehört also ihrem Büschel an. Tatsächlich erhält man bei

$$f(x, x) \equiv a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0, \quad g(x, x) \equiv b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 = 0$$

für $2k(x, x)$ einen Ausdruck von der Form $k_{33}x_3^2 + 2k_{12}x_1x_2$. Entsprechendes gilt für $H(u, u) = 0$.

Es gibt daher im Falle der Doppelberührung von f und g einen Parameter $\lambda = \varkappa$ von der Beschaffenheit, daß die Kurve $f - \varkappa g = 0$ des Büschels $f - \lambda g = 0$ mit $k(x, x) = 0$ zusammenfällt. Bezeichnen wir die Koeffizienten von $2k(x, x)$ mit k_i^2 und $2k_{ik}$, so verschwinden also nunmehr alle Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{23} & a_{13} & a_{12} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & b_{23} & b_{13} & b_{12} \\ k_{11} & k_{22} & k_{33} & k_{23} & k_{13} & k_{12} \end{matrix} \right\|.$$

Ist ferner $\lambda = \lambda_1$ derjenige Parameterwert, für den $f - \lambda g = 0$ die Doppelberührungssehne darstellt, so muß die zu $f - \lambda_1 g = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten $F(u, u) - 2\lambda_1 H(u, u) + \lambda_1^2 G(u, u) = 0$ identisch verschwinden (S. 124). Außerdem muß λ_1 eine Doppelwurzel der Gleichung

(51) $$C(\lambda) \equiv A - 3\mathsf{H}\lambda + 3\Theta\lambda^2 - B\lambda^3 = 0$$

sein (Nr. 251 und 252), sowie der beiden Gleichungen

(52) $$\mathsf{H} - 2\Theta\lambda + B\lambda^2 = 0, \quad A - 2\mathsf{H}\lambda + \Theta\lambda^2 = 0,$$

die sich aus (51) ergeben, wenn man $C(\lambda)$ durch Einführung von $\lambda : \mu$ an Stelle von λ homogen macht ($A\mu^3 - 3\mathsf{H}\lambda\mu^2 + 3\Theta\lambda^2\mu - B\lambda^3 = 0$), die partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks nach λ und μ gleich Null setzt und dann wieder μ durch 1 ersetzt (Nr. 326). Durch Elimination von λ_1 aus den eben erwähnten, durch $\lambda = \lambda_1$ erfüllten Gleichungen erhält man

(53) $$\begin{vmatrix} F & H & G \\ A & \mathsf{H} & \Theta \\ \mathsf{H} & \Theta & B \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Gesamtheit aller sich in denselben Punkten doppelt berührenden Kegelschnitte sowohl als Büschel wie als Schar aufgefaßt werden kann, wird auch die zu (53) *duale Gleichung erfüllt.* Sie ergibt sich, indem man in (53) die a_{ik}, b_{ik}, A_{ik}, B_{ik}, u_i der Reihe nach durch die A_{ik}, B_{ik}, Aa_{ik}, Bb_{ik}, x_i ersetzt; nach Abscheidung des Faktors AB folgt auf solche Weise aus (53) die Gleichung

(54) $$\begin{vmatrix} f & k & g \\ A & A\Theta & \mathsf{H} \\ \Theta & B\mathsf{H} & B \end{vmatrix} = 0.$$

Außerdem wird natürlich die schon in Nr. 345 abgeleitete Bedingung (16) der einfachen Berührung erfüllt.

B. 1) Wie lautet die Gleichung der gemeinsamen Tangenten zweier auf dasselbe Poldreieck bezogenen Kegelschnitte?

Mit Hilfe von (42) folgt aus (50)

$$\begin{gathered}\{a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 + a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})x_2^2 \\ + a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_3^2\}^2 \\ = 4a_{11}a_{22}a_{33}b_{11}b_{22}b_{33}(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2)(b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2).\end{gathered}$$

In lineare Faktoren zerlegt liefert diese Gleichung die Tangenten durch alle Zeichenkombinationen in

$$x_1\sqrt{a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22})}\pm x_2\sqrt{a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11}-a_{11}b_{33})}\pm\cdot=0.$$

2) Man bestimme die gemeinschaftlichen Tangenten zweier demselben Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitte.

Der Kegelschnitt k, der ihre acht Berührungspunkte enthält, ist in diesem Falle ausgedrückt durch $2k(x, x)\equiv$

$$(a_{12}b_{13}-a_{13}b_{12})^2x_1^{\,2}+\cdots+(a_{12}b_{23}+a_{23}b_{12})(a_{13}b_{23}+a_{23}b_{13})x_2x_3+\cdots=0.$$

3) Die Bedingungen der vierpunktigen Berührung (Berührung dritter Ordnung) von $f=0$ und $g=0$ ergeben sich daraus, daß die Gleichung (51) nun die dreifache Wurzel

$$\lambda_1=A:\mathsf{H}=\mathsf{H}:\Theta=\Theta:B$$

hat (vgl. (17) in Nr. 345), und zwar muß für diese der Ausdruck $F-2\lambda_1H+\lambda_1^{\,2}G$ identisch verschwinden (vgl. IIIb in Nr. 252), d. h. es müssen die Identitäten bestehen:

$$\Theta F-2\mathsf{H}H+AG\equiv0,\quad BF-2\Theta H+\mathsf{H}G\equiv0.$$

4) Die Tangentenpaare, die man von einem beliebigen Punkte an die Kegelschnitte einer Schar legen kann, bilden eine Involution; die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Tangenten derjenigen zwei Kurven der Schar, die durch den gegebenen Punkt gehen.

Folgt dual zu dem entsprechenden Satze in Nr. 355.

Ebenso folgt:

5) Der Ort aller Punkte, von denen an die Kegelschnitte f und g Tangentenpaare von gegebenem Doppelverhältnis gezogen werden können, ist die Kurve vierter Ordnung[82])

$$(\alpha-1)^2k^2(x, x)-(\alpha+1)^2ABf(x, x)\cdot g(x, x)=0.$$

6) Ist $g(x, x)=0$ ein Geradenpaar, so ist $k(x, x)=0$ die Gleichung des von seinem Schnittpunkt an den Kegelschnitt $f(x,x)=0$ gelegten Tangentenpaares.

In der Gleichung (33) von Nr. 313 hat man die Produkte $y_i^{\,2}$ und y_iy_k durch die B_{ii} und B_{ik} zu ersetzen.

357. **Weitere Kegelschnitte in invarianter Beziehung zu zwei gegebenen.** Alle Kegelschnitte, deren Gleichungen lineare Aggregate von f, g, k bez. von F, G, H sind, stehen in invarianter Beziehung zu f und g. Aber auch die Umkehrung gilt: *Die Gleichung in Punktkoordinaten eines jeden zu f und g kovarianten Kegelschnittes ist eine lineare Funktion von f, g und k. Die Gleichung in Linienkoordinaten eines jeden zu F und G kontravarianten Kegelschnittes ist eine lineare Funktion von F, G und H.*

Dabei bilden kovariante und kontravariante Kegelschnitte nicht verschiedene Systeme, sondern *jeder nicht-zerfallende invariante Kegelschnitt ist als Tangentengebilde kontravariant*, d. h. die Tangentialform jedes in f, g, k linearen Ausdruckes ist in F, G, H linear, und umgekehrt. So ist z. B. $H=0$, als Ort betrachtet, ein zu $f=0$, $g=0$ kovarianter Kegelschnitt. Nun entspringt aus der entwickelten Form $2H$ (Nr. 353) unter Bezug auf das gemeinsame Polardreieck die Gleichung in Punktkoordinaten:

$$(a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33})(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11})x_1^2+\cdots=0.$$

Diese kann man in der Tat umformen in

$$(a_{11}b_{22}b_{33}+\cdot\cdot)(a_{11}x_1^2+\cdot\cdot)+(b_{11}a_{22}a_{33}+\cdot\cdot)(b_{11}x_1^2+\cdot\cdot)$$
$$-\{a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22})x_1^2+\cdot\cdot\}=0,$$

so daß die linke Seite der zu $2H(u,u)$ gehörigen Gleichung in Punktkoordinaten $2h_1(x,x)=0$ mit f, g und k verbunden ist durch die Beziehung

$$(55)\qquad 2h_1(x,x)\equiv 3\Theta f(x,x)+3\mathsf{H}g(x,x)-2k(x,x).$$

Aus ihr folgt sofort, *daß die Gleichungen $H(u,u)=0$ und $k(x,x)=0$ im Falle $\mathsf{H}=0$ und $\Theta=0$ einen und denselben Kegelschnitt darstellen.*

B. Die Beispiele zeigen zahlreiche Anwendungen desselben Prinzipes, weitere folgen in Kapitel XXI.

1) Man zeige, daß für die linke Seite $2K(u,u)$ der zu $2k(x,x)=0$ gehörigen Gleichung in Linienkoordinaten die Beziehung stattfindet

$$2K(u,u)\equiv 3B\mathsf{H}F(u,u)+3A\Theta G(u,u)-2ABH(u,u).$$

2) Die Bedingung, unter der der Kegelschnitt $k(x,x)=0$ in ein Geradenpaar zerfällt, ist, wenn wieder f und g auf ihr gemeinsames Poldreieck bezogen sind:

$$a_{11}a_{22}a_{33}b_{11}b_{22}b_{33}(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22})(a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33})(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11})=0$$

oder allgemein $\qquad AB(9\mathsf{H}\Theta-AB)=0.$

Ebenso ist $9\mathsf{H}\Theta-AB=0$ die Bedingung, unter der die Kurve $H(u,u)=0$ zerfällt, d. h. unter der alle Geraden, die von den beiden Kegelschnitten harmonisch geteilt werden, durch einen oder den anderen von zwei festen Punkten gehen. Diese Bedingung wird z. B. erfüllt für zwei Kreise, die sich rechtwinklig schneiden, und in der Tat wird in diesem Falle jeder Durchmesser des einen Kreises durch den anderen harmonisch geteilt; der Ort der Punkte, von denen an die Kreise harmonische Tangentenpaare gelegt werden können, besteht aus einem Geradenpaar. Auch wenn $d^2=2(\varrho_1^2+\varrho_2^2)$

ist (ϱ_1, ϱ_2 Radien der beiden Kreise, d Abstand ihrer Mittelpunkte), zerfallen die Kurven H und k.

3) Die Gleichung der vier an den Kegelschnitt $f = 0$ in seinen Schnittpunkten mit $g = 0$ gezogenen Tangenten ist

$$\{3\mathsf{H}f(x,x) - Ag(x,x)\}^2 - 4Af(x,x)\{3\Theta f(x,x) - 2k(x,x)\} = 0.$$

Man erhält die Gleichung durch Substitution von $f_i = \frac{1}{2}f'(x_i)$ an Stelle von u_i in die Gleichung (49) der vier Grundpunkte des Büschels, also in $H^2 - F \cdot G = 0$; alsdann sind die Ausdrücke für $H(f_1, f_2, f_3)$ und $G(f_1, f_2, f_3)$ in Nr. 354, B. 5 und 2 einzuführen.

4) Ein Dreieck ist einem gegebenen Kegelschnitt umgeschrieben, und zwei seiner Ecken bewegen sich in festen Geraden $v_x = 0$, $w_x = 0$; gesucht wird der Ort der dritten Ecke.

In Nr. 295, 1 wurde gefunden, daß, falls $x_1x_3 - x_2^2 = 0$, $ax_1 - x_3 = 0$, $bx_1 - x_3 = 0$ gegeben sind,

$$(a+b)^2x_1x_3 = 4abx_2^2 \quad \text{oder} \quad (a+b)^2(x_2^2 - x_1x_3) = (a-b)^2x_2^2$$

die Gleichung des Ortes ist. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber das Quadrat der Polare p_x des Schnittpunktes der beiden Geraden in bezug auf den Kegelschnitt, und zwar ist im Falle allgemeiner Gleichungen

$$\begin{aligned} p_x \equiv\; & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)(v_2w_3 - v_3w_2) \\ & + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)(v_3w_1 - v_1w_3) \\ & + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)(v_1w_2 - v_2w_1). \end{aligned}$$

Ferner ist $a + b = 0$ die Bedingung, unter der die Geraden v_i, w_i in bezug auf den Kegelschnitt konjugiert sind; sie ist im allgemeinen Falle durch $F(v, w)$ zu ersetzen, wenn

$$\begin{aligned} F(v,w) \equiv\; & A_{11}v_1w_1 + A_{22}v_2w_2 + A_{33}v_3w_3 + A_{23}(v_2w_3 + v_3w_2) \\ & + A_{13}(v_3w_1 + v_1w_3) + A_{12}(v_1w_2 + v_2w_1). \end{aligned}$$

Die besondere Gleichung des Ortes ist also zu ersetzen durch die allgemeine $F^2(v, w)f(x, x) + Ap_x^2 = 0$.

5) Man bestimme die Hüllkurve der Grundlinie eines Dreiecks, das dem Kegelschnitt $f = 0$ eingeschrieben ist, während seine beiden anderen Seiten den Kegelschnitt $g = 0$ berühren.

Wird das Dreieck in einer seiner Lagen als Fundamentaldreieck genommen, sind daher die Gleichungen der Kegelschnitte

$$f(x,x) \equiv 2(a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2) = 0,$$
$$g(x,x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2(1 + \lambda a_{12})x_1x_2 = 0,$$

wo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die durch $g = 0$ berührten Seiten bezeichnen, so wird der Kegelschnitt $\lambda f + g = 0$ durch die Seite $x_3 = 0$ berührt (vgl. Nr. 351, 4). Nach den Werten der Invarianten erkennt man dies als die Gleichung eines festen Kegelschnittes. Denn wegen

$$A = 2a_{23}a_{31}a_{12}, \quad 3\mathrm{H} = -(a_{23}+a_{31}+a_{12})^2 - 2\lambda a_{23}a_{31}a_{12},$$
$$3\Theta = 2(a_{23}+a_{31}+a_{12})(2+\lambda a_{12}), \quad B = -(2+\lambda a_{12})^2$$

ist $9\Theta^2 - 12\mathrm{H}B = 4\lambda AB$, und die Gleichung $\lambda f + g = 0$ geht daher über in $(9\Theta^2 - 12\mathrm{H}B)f(x,x) + 4ABg(x,x) = 0$, die Gleichung eines festen Kegelschnittes, den die dritte Seite des Dreiecks berührt. Für $9\Theta^2 - 12\mathrm{H}B = 0$ berührt diese Seite denselben Kegelschnitt g, der auch von den beiden ersten berührt wird.[83])

6) Man soll den Ort für die Spitze eines Dreiecks finden, dessen drei Seiten einen Kegelschnitt $f = 0$ berühren, während zwei seiner Ecken einem andern Kegelschnitt $g = 0$ angehören.

Um die Aufgabe zu lösen, bilden wir die Gleichung des Tangentenpaares von $f = 0$ aus dem Punkte y_i, sodann die Gleichung der Geraden, die die Schnittpunkte der Tangenten und der Kurve $g = 0$ verbinden, endlich die Bedingung, daß eine dieser Geraden, die die Basis des fraglichen Dreiecks sein muß, den Kegelschnitt $g = 0$ berühre.

Die Gleichung des Tangentenpaares lautet $f(y,y)\,f(x,x) - f^2(y,x) = 0$, und die Bedingung, unter der $f(y,y)f(x,x) - f^2(y,x) - \lambda g(x,x) = 0$ ein Geradenpaar darstellt, liefert zur Bestimmung der Schnittsehnen dieses Tangentenpaares und des Kegelschnittes die quadratische Gleichung für λ:

$$B\lambda^2 - 2k(y,y)\lambda + Af(y,y)g(y,y) = 0.$$

Andrerseits besteht die Bedingung, unter der eine solche Schnittsehne den Kegelschnitt $f(x,x) = 0$ berührt, in dem Verschwinden der für $f(y,y)f(x,x) - f^2(y,x) - \lambda g(x,x) = 0$ und $f(x,x) = 0$ gebildeten Taktinvariante (Nr. 345). Man erhält hierdurch die Gleichung

$$\lambda(12A\Theta - 9\mathrm{H}^2) - 4A^2 g(y,y) = 0,$$

und nach Einführung des hieraus folgenden Wertes λ in die frühere quadratische Gleichung ergibt sich als Ort des Punktes y_i der Kegelschnitt[84])

$$16A^3Bg(y,y) - 8(12A\Theta - 9\mathrm{H}^2)Ak(y,y)$$
$$+ (12A\Theta - 9\mathrm{H}^2)^2 f(y,y) = 0.$$

7) Man soll den Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmen, von dessen Seiten zwei den Kegelschnitt $f = 0$ berühren, während die dritte einen andern Kegelschnitt $af + bg = 0$ berührt, und die beiden Basisecken sich auf $g = 0$ bewegen.

Man findet nach der Methode des letzten Beispiels, daß der Ort der eine oder andere derjenigen Kegelschnitte ist, die die vier gemeinschaftlichen Tangenten von $f = 0$, $g = 0$ berühren. Die Kegelschnitte sind durch die Gleichung

$$\lambda^2 A B g(y, y) + 2\lambda\mu k(y, y) + \mu^2 f(y, y) = 0$$

dargestellt, wenn $\lambda : \mu$ aus der Gleichung bestimmt wird:

$$a\{4ABb - (9\mathsf{H}^2 - 12A\Theta)a\}\lambda^2 + a(4Aa + 6\mathsf{H}b)\lambda\mu - b^2\mu^2 = 0.$$

8) Man soll den Ort der freien Ecke eines Vielecks bestimmen, dessen sämtliche Seiten den Kegelschnitt $f = 0$ berühren, während seine Ecken bis auf jene eine auf dem Kegelschnitt $g = 0$ liegen.

Diese Aufgabe wird auf die vorhergehende zurückgeführt, denn die Verbindungslinie zweier Ecken des Vielecks, die der freien Ecke benachbart sind, berührt einen Kegelschnitt von der Gleichung $af + bg = 0$. Sind λ', μ'; λ'', μ''; λ''', μ''' die den Vielecken von $(n-1)$, n und $(n+1)$ Seiten entsprechenden Werte, so ist

$$\lambda''' = \mu'\mu''^2, \quad \mu''' = B\lambda'\lambda''\{4AB\mu'' - (9\mathsf{H}^2 - 12A\Theta)B\lambda''\}.$$

Im Falle des Dreiecks ist

$$\lambda' = 4AB, \quad \mu' = B(9\mathsf{H}^2 - 12A\Theta);$$

im Falle des Vierecks wird

$$\lambda'' = (9\mathsf{H}^2 - 12A\Theta)^2, \; \mu'' = 8AB\{8A^2B + 3\mathsf{H}(9\mathsf{H}^2 - 12A\Theta)\},$$

und aus diesen Formeln ergeben sich Schritt für Schritt die Werte für jedes andere Vieleck.[86])

9) Für zwei Kegelschnitte $f = 0$, $g = 0$ ist der Ort des Punktes, wo eine Tangente des ersten die Polare ihres Berührungspunktes in bezug auf den zweiten schneidet, die Kurve von der Gleichung

$$3\mathsf{H}f(x, x)g(x, x) - 2f(x, x)k(x, x) - Ag^2(x, x) = 0.$$

Sie geht durch die Schnittpunkte von g mit f und k.[87])

10) Die drei Paare Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den auf den Gegenseiten durch einen Kegelschnitt ausgeschnittenen Punkten bilden zwei Gruppen von drei Geraden durch je einen Punkt, wenn man hat

$$a_{11}a_{22}a_{33}(A - 4a_{12}a_{23}a_{31}) = 0.$$

358. **Bestimmung der Kegelschnitte des Büschels, für die die Grundpunkte ein gegebenes Doppelverhältnis haben.** Zieht man von irgend einem Punkte y_i einer bestimmten Kurve $\varkappa f - \lambda g = 0$ des durch die Kegelschnitte f und g erzeugten Büschels nach den vier Grundpunkten Strahlen, so bestimmen diese Strahlen ein gewisses Doppelverhältnis, das sogenannte Doppelverhältnis der vier Grundpunkte für den Kegelschnitt $\varkappa f - \lambda g = 0$. Dieses hat nach Nr. 280 konstanten Wert, wo auch der Punkt y_i auf $\varkappa f - \lambda g = 0$ angenommen werden möge. Welcher Gleichung muß nun der Parameterquotient

$\varkappa : \lambda$ genügen, damit das Doppelverhältnis einer gegebenen Zahl α gleich werde?[88])

Läßt man den auf der Kurve $\varkappa f - \lambda g = 0$ gewählten Punkt y_i mit einem der vier Grundpunkte zusammenfallen, so bestehen die vier zu betrachtenden Strahlen aus der Tangente $\varkappa f(y, x) - \lambda g(y, x) = 0$ in diesem Grundpunkte und aus den drei durch ihn gehenden Geraden $\varkappa_i f(y, x) - \lambda_i g(y, x) = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, des Kegelschnittbüschels, wobei $\varkappa_i : \lambda_i$ eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$(56) \qquad C(\varkappa, \lambda) \equiv \varkappa^3 A - 3\varkappa^2 \lambda \mathsf{H} + 3\varkappa\lambda^2 \Theta - \lambda^3 B = 0$$

ist. Wir können auch sagen: Die Zahl α stimmt überein mit dem Doppelverhältnis der vier Wurzeln der in $\varrho : \sigma$ biquadratischen Gleichung

$$(57) \quad (\varrho^3 A - 3\varrho^2\sigma \mathsf{H} + 3\varrho\sigma^2\Theta - \sigma^3 B)(-\lambda\varrho + \varkappa\sigma) = 0$$

oder $C(\varrho, \sigma)\cdot(-\lambda\varrho + \varkappa\sigma) = 0$. Da das Doppelverhältnis durch lineare Transformationen nicht geändert wird (Teil 1, S. 185/6), kann man an Stelle von ϱ und σ neue Veränderliche μ, ν einführen, und zwar geschehe dies durch die Substitutionen

$$(58) \quad \frac{1}{3}\left(\frac{\partial C(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa}\varrho + \frac{\partial C(\varkappa, \lambda)}{\partial \lambda}\sigma\right) = \mu, \quad -\lambda\varrho + \varkappa\sigma = \nu.$$

Man erhält alsdann eine Gleichung vierten Grades für $\mu : \nu$, in der nur die schon in Nr. 338 definierten Invarianten $H(\varkappa, \lambda)$ und $T(\varkappa, \lambda)$ der kubischen Form $C(\varkappa, \lambda)$ als Koeffizienten auftreten. Vermöge der angegebenen Substitutionen findet nämlich die Beziehung statt[89])

$$(59) \quad \begin{cases} \quad C^2(\varkappa, \lambda)\cdot C(\varrho, \sigma)\cdot(-\lambda\varrho + \varkappa\sigma) \\ = \{\mu^3 + 3H(\varkappa, \lambda)\mu\nu^2 + T(\varkappa, \lambda)\nu^3\}\nu, \end{cases}$$

und hier ist

$$(60) \quad \begin{cases} H(\varkappa, \lambda) = \frac{1}{36}\left\{\frac{\partial^2 C(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial^2 C(\varkappa, \lambda)}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 C(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa \cdot \partial \lambda}\right)^2\right\}, \\ T(\varkappa, \lambda) = \frac{1}{3}\left\{\frac{\partial C(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa}\frac{\partial H(\varkappa, \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial C(\varkappa, \lambda)}{\partial \lambda}\frac{\partial H(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa}\right\}. \end{cases}$$

Bedeutet ferner $\mu - \omega\nu = \varphi$ einen linearen Faktor von $\mu^3 + 3H(\varkappa, \lambda)\mu\nu^2 + T(\varkappa, \lambda)\nu^3$ und sind $\varphi - \omega_1\nu$, $\varphi - \omega_2\nu$ die beiden anderen Faktoren, so hat man

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &\{\mu^3 + 3H(\varkappa, \lambda)\mu\nu^2 + T(\varkappa, \lambda)\nu^3\}\nu \\ &\quad = \varphi(\varphi - \omega_1\nu)(\varphi - \omega_2\nu)\nu \\ &\quad = \nu\varphi^3 - (\omega_1 + \omega_2)\nu^2\varphi^2 + \omega_1\omega_2\nu^3\varphi, \end{aligned}\right.$$

und es müssen nun die absoluten Invarianten der beiden biquadratischen Formen, die die linke und rechte Seite der letzten Gleichung bilden, einander gleich sein. Man erhält alsdann mit Benutzung von (69a) in Nr. 339 für das Doppelverhältnis $\alpha = \omega_1 : \omega_2$ die Beziehung

$$(62)\qquad \frac{(\alpha^2 - \alpha + 1)^3}{(\alpha + 1)^2(2\alpha - 1)^2(\alpha - 2)^2} = -\frac{H^3(\varkappa, \lambda)}{T^2(\varkappa, \lambda)} \quad \text{oder}$$

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &H^3(\varkappa, \lambda)\cdot(\alpha + 1)^2(2\alpha - 1)^2(\alpha - 2)^2 \\ &\quad + T^2(\varkappa, \lambda)\cdot(\alpha^2 - \alpha + 1)^3 = 0, \end{aligned}\right.$$

denn man findet für die in (69a) vorkommenden Invarianten J_2, J_3 die Werte $J_2 = -\frac{3}{4}H(\varkappa, \lambda)$, $J_3 = -\frac{1}{16}T(\varkappa, \lambda)$. Die Gleichung (63) ist der Ausdruck der Abhängigkeit zwischen α und dem Parameterverhältnis $\varkappa : \lambda$. Es gibt also *sechs Kegelschnitte im Büschel, in denen seine vier Grundpunkte ein gegebenes Doppelverhältnis α haben;* dual entsprechend ebenso in einer *Schar* von Kegelschnitten.

B. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, von denen an die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ vier Normalen von gegebenem Doppelverhältnis gehen?

Man erhält die Gleichung des Ortes, indem man das Doppelverhältnis der biquadratischen Form

$$A\lambda - 3\mathrm{H}\lambda^2 + 3\Theta\lambda^3 - B\lambda^4$$

bildet, in der A, $3\mathrm{H}$, .. dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 343 B. Man hat hierbei das Verfahren einzuschlagen, das von Gleichung (57) zu (63) führte.[90]) Insbesondere ergibt sich

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^4 = 0$$

für den Ort der Punkte, von denen vier Normalen von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen ausgehen (vgl. Nr. 339).

359. **Die äquianharmonischen Kegelschnitte und eine Kombinante des Büschels.** Den Wurzeln $\varkappa : \lambda$ der quadratischen Gleichung $H(\varkappa, \lambda) = 0$ entsprechen diejenigen Kurven des Büschels, für die das Doppelverhältnis der vier Grundpunkte eine komplexe Kubikwurzel aus der negativen Einheit, also äquianharmonisch ist (Teil 1, S. 160). Mit Hilfe des für $C(\varkappa, \lambda) = 0$ nach (60), S. 241 berechneten Ausdruckes $H(\varkappa, \lambda)$ ergibt sich, daß

$$(64)\quad \begin{cases} (A\Theta - \mathsf{H}^2)g^2(x,x) + (\mathsf{H}\Theta - AB)g(x,x)f(x,x) \\ \qquad + (\mathsf{H}B - \Theta^2)f^2(x,x) = 0 \end{cases}$$

das Produkt der Gleichungen dieser beiden Kurven, der sogenannten *äquianharmonischen Kegelschnitte des Büschels* darstellt.

Sind die Gleichungen der Kurven f und g auf ein gemeinsames Poldreieck bezogen, so daß

$$(65)\quad f \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2, \quad g \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2,$$

und setzt man zur Abkürzung

$$(66)\quad a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22} = c_1, \quad a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33} = c_2, \quad a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} = c_3,$$

ferner

$$(67)\qquad c_2c_3 = m_1, \quad c_3c_1 = m_2, \quad c_1c_2 = m_3,$$

so geht die Gleichung (64) nach Multiplikation mit -9 über in

$$(68)\quad \begin{cases} m_1^2x_1^4 + m_2^2x_2^4 + m_3^2x_3^4 - m_2m_3x_2^2x_3^2 - m_3m_1x_3^2x_1^2 \\ \qquad - m_1m_2x_1^2x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich in zwei Faktoren zerlegen, und jedem von ihnen entspricht, gleich Null gesetzt, einer der beiden äquianharmonischen Kegelschnitte. Bedeuten ε und ε^2 die komplexen Wurzeln aus der positiven Einheit, so lauten die Gleichungen dieser Kurven

$$(69)\qquad \begin{cases} m_1x_1^2 + \varepsilon m_2x_2^2 + \varepsilon^2 m_3x_3^2 = 0 \text{ und} \\ m_1x_1^2 + \varepsilon^2 m_2x_2^2 + \varepsilon m_3x_3^2 = 0, \end{cases}$$

und man erkennt leicht, daß ihre simultanen Invarianten H und Θ verschwinden, denn diese werden gleichbedeutend mit $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \equiv 0$. (Vgl. Nr. 348, 2 und Nr. 350, 9.)

Die für die Kegelschnitte (69) gebildeten Kovarianten $H(u,u)$ und $k(x,x)$ stellen daher, gleich Null gesetzt, nach der Bemerkung zu (55), S. 237 einen und denselben Kegelschnitt dar, der in Punktkoordinaten die Gleichung hat

$$(70)\qquad m(x,x) \equiv m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2 = 0.$$

Diese Kurve wird also von allen Geraden eingehüllt, die die beiden äquianharmonischen Kegelschnitte in harmonischen Punktepaaren schneiden und ist zugleich der Ort aller Punkte, von denen sich an diese beiden Kegelschnitte harmonische Tangentenpaare legen lassen.

Die für $f(x, x) = 0$ und die Kurve (70) gebildete Invariante

$$3\Theta_{f,m} = a_{11} m_2 m_3 + a_{22} m_3 m_1 + a_{33} m_1 m_2 = c_1 c_2 c_3 (a_{11} c_1 + a_{22} c_2 + a_{33} c_3)$$

verschwindet identisch, und gleiches gilt, wenn man diese Invariante für $g(x, x) = 0$ und (70) bildet.

Der Kegelschnitt (70) *ist daher den Kurven* f *und* g, *somit allen Kurven des Büschels* $f - \lambda g = 0$, *harmonisch eingeschrieben* und ist offenbar für die Geometrie des Kegelschnittbüschels von Bedeutung. Wir wollen auch allgemein die linke Seite der Gleichung dieser Kurve durch $m(x, x)$ bezeichnen.

Sind die Gleichungen der Kurven f und g nicht auf dasselbe Poldreieck bezogen, sondern beliebig gegeben, so läßt sich die entsprechende Gleichung $m(x, x) = 0$ leicht ableiten. Diese ist in den a_{ik} und b_{ik} je vom zweiten Grad und wird sich daher aus den mit gewissen Zahlenkoeffizienten α, β, γ versehenen Ausdrücken $\Theta f(x, x)$, $\mathsf{H} g(x, x)$ und $k(x, x)$ additiv zusammensetzen, so daß etwa

$$\alpha \cdot 3\Theta f(x, x) + \beta \cdot 3\mathsf{H} g(x, x) + \gamma \cdot 2k(x, x) \equiv m(x, x).$$

Da die Koeffizienten α, β, γ von der Form der Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ unabhängig sind, kann man bei ihrer Bestimmung wieder die Gleichungen (65) und (70) zugrunde legen. Durch Koeffizientenvergleichung findet man $\alpha = \beta = -1$, $\gamma = 3$ und gelangt daher zu der Beziehung

$$(71) \qquad \frac{1}{3} m(x, x) \equiv 2k(x, x) - \Theta f(x, x) - \mathsf{H} g(x, x).$$

Diese Kovariante ist auch eine sogenannte *Kombinante* des Büschels. Man versteht hierunter Invarianten J von folgender Beschaffenheit. Statt J für f und g zu bilden, bilde man diese Invariante für $\varkappa_1 f + \lambda_1 g$ und $\varkappa_2 f + \lambda_2 g$; sie werde alsdann durch J_1 bezeichnet. Ist nun $J_1 = (\varkappa_1 \lambda_2 - \varkappa_2 \lambda_1)^p \cdot J$, ist also J_1 von J nur um einen Faktor verschieden, der eine Potenz von $\varkappa_1 \lambda_2 - \varkappa_2 \lambda_1$ darstellt, so heißt J_1 eine *Kombinante* der Formen f und g.

Bildet man nun die Kovariante (70) für $\varkappa_1 f + \lambda_1 g$ und $\varkappa_2 f + \lambda_2 g$ (anstatt für f und g), so sind zunächst die durch (66) definierten Ausdrücke c_i durch $(\varkappa_1 \lambda_2 - \varkappa_2 \lambda_1) c_i$ zu ersetzen, woraus mit Rücksicht auf (67) sofort folgt, daß an die Stelle

der m_i nunmehr die Ausdrücke $(x_1\lambda_2 - x_2\lambda_1)^2 m_i$ treten. Hiermit ist aber die Kombinanteneigenschaft der Form (70) erwiesen.[91])

360. **Weitere Eigenschaften der Kombinante; die harmonischen Kegelschnitte des Büschels.** Aus Gleichung (71) folgt mit Hilfe von (55) sofort

$$m(x,x) \equiv 4k(x,x) - 2h_1(x,x), \tag{72}$$

und die geometrische Deutung dieser einfachen Beziehung liefert sofort mit Rücksicht auf die Kombinanteneigenschaft von m den Satz: *Die Kombinante m ist der Ort der Schnittpunkte der zu zwei beliebigen Kurven des Büschels $f - \lambda g = 0$ gehörigen Staudtschen Kegelschnitte k und h.*[92])

Die Gleichung $m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0$, die die Kombinante m in dem Falle darstellt, wo die Gleichungen von f und g auf ein gemeinsames Poldreieck bezogen sind, zeigt, daß die Kurve m das Geradenpaar $m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = 0$ oder (mit Rücksicht auf (67)) $c_2 x_1^2 + c_1 x_2^2 = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der Geraden $x_3 = 0$ doppelt berührt. Durch die Ecke $x_1 = x_2 = 0$ des Poldreiecks geht nun auch ein dem Kegelschnittbüschel angehöriges Geradenpaar hindurch. Denn die kubische Gleichung (56), die die Parameter λ_i der in dem Büschel $f - \lambda g = 0$ enthaltenen Geradenpaare liefert, hat nunmehr die Wurzeln $\lambda_i = a_{ii} : b_{ii}$, $(i = 1, 2, 3)$, und insbesondere ergibt sich für $\lambda_3 = a_{33} : b_{33}$ das Geradenpaar $c_2 x_1^2 - c_1 x_2^2 = 0$, das zu dem vorhin erwähnten Paare $c_2 x_1^2 + c_1 x_2^2 = 0$ harmonisch liegt. Da ferner auch die Seiten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ des Poldreiecks zu $c_2 x_1^2 + c_1 x_2^2 = 0$ harmonisch liegen, folgt der Satz: *Durch jede Ecke dieses Dreiecks gehen zwei seiner Seiten und ein Geradenpaar des Büschels. Diese zwei Strahlenpaare bestimmen eine Involution, deren Doppelstrahlen den Kegelschnitt $m(x,x) = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der dritten Seite des Poldreiecks berühren.*

Außer der schon auf Seite 243 erwähnten Beziehung der Kombinante m zu den zwei äquianharmonischen Kegelschnitten (69) des Büschels gibt es noch eine Beziehung, bei der diese *drei* Kegelschnitte in völlig gleicher Weise auftreten. *Denkt man sich nämlich zu jedem Punkte* **irgend** *einer der drei*

Kurven die Polare in bezug auf eine zweite dieser Kurven konstruiert, so umhüllen diese Polaren die dritte Kurve.[93]) In der Tat hat z. B. die Polare eines auf dem Kegelschnitt $m_1 x_1^2 + \varepsilon m_2 x_2^2 + \varepsilon^2 m_3 x_3^2 = 0$ gelegenen Punktes y in bezug auf $m(x, x) = 0$ die Gleichung $m_1 y_1 x_1 + m_2 y_2 x_2 + m_3 y_3 x_3 = 0$, wobei $m_1 y_1^2 + \varepsilon m_2 y_2^2 + \varepsilon^2 m_3 y_3^2 = 0$ ist. Als Hüllkurve dieser Polare findet man leicht $m_1 x_1^2 + m_2 \varepsilon^2 x_2^2 + m_3 \varepsilon x_3^2 = 0$.

Den Wurzeln $\varkappa : \lambda$ der kubischen Gleichung $T(\varkappa, \lambda) = 0$ entsprechen, wie (63) zeigt, diejenigen Kurven des Büschels $\varkappa f - \lambda g = 0$, für die das Doppelverhältnis der vier Grundpunkte *harmonisch* ist (Teil 1, S. 160). Um die Gleichungen dieser *drei harmonischen Kegelschnitte* abzuleiten, beachte man zunächst, daß nach Nr. 338 die drei Wurzeln der Gleichung $T(\varkappa, \lambda) = 0$ erhalten werden, indem man zu je einem Wurzelpaare von $C(\varkappa, \lambda) = 0$ und zu der übrigbleibenden dritten Wurzel der Gleichung $C(\varkappa, \lambda) = 0$ je die vierte harmonische Größe bestimmt. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln $\lambda : \varkappa$ von $C(\varkappa, \lambda) = 0$ und faßt man λ_2, λ_3 als *ein* Paar zusammen, so muß die vierte harmonische Größe $\lambda : \varkappa$ zu λ_1 in bezug auf das Paar λ_2, λ_3 die Gleichung erfüllen

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} : \frac{\varkappa\lambda_2 - \lambda}{\varkappa\lambda_3 - \lambda} = -1 \text{ oder}$$

$$(73) \qquad (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\lambda + (2\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3)\varkappa = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist *ein* Faktor von $T(\varkappa, \lambda)$, die beiden anderen erhält man durch zyklische Vertauschung der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Zu (73) gehört die harmonische Kurve

$$(74) \quad (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)f(x, x) + (2\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3)g(x, x) = 0$$

des Büschels; entsprechende Gleichungen haben die beiden anderen harmonischen Kegelschnitte.

Wird wieder das gemeinsame Poldreieck von f und g als Koordinatendreieck zugrunde gelegt, so ist $\lambda_i = a_{ii} : b_{ii}$, $(i = 1, 2, 3)$, und als Gleichungen der drei harmonischen Kegelschnitte findet man:

$$(75) \begin{cases} 2m_1 x_1^2 - m_2 x_2^2 - m_3 x_3^2 = 0, \; m_1 x_1^2 - 2m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0, \\ \qquad m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 - 2m_3 x_3^2 = 0. \end{cases}$$

B. 1) Die Doppelstrahlen der Involution, die durch zwei Seiten des gemeinsamen Poldreiecks von f und g und das durch den Schnittpunkt dieser Seiten gehende Geradenpaar des Büschels $f - \lambda g = 0$ bestimmt wird, berühren einen der drei harmonischen Kegelschnitte in seinen Schnittpunkten mit der dritten Seite des Poldreiecks. Ist $f \equiv a_{11} x_1{}^2 + a_{22} x_2{}^2 + a_{33} x_3{}^2 = 0$, $g \equiv b_{11} x_1{}^2 + b_{22} x_2{}^2 + b_{33} x_3{}^2 = 0$, so berühren z. B. die durch die Ecke $x_1 = x_2 = 0$ des gemeinsamen Poldreiecks gehenden Doppelstrahlen der genannten Involution den harmonischen Kegelschnitt $m_1 x_1{}^2 + m_2 x_2{}^2 - 2 m_3 x_3{}^2 = 0$ in seinen Schnittpunkten mit $x_3 = 0$.

2) Jeder der drei harmonischen Kegelschnitte berührt den Kombinantenkegelschnitt m doppelt, und zwar sind die Berührungssehnen die Seiten des gemeinsamen Poldreiecks des Büschels.

3) Jeder der drei harmonischen Kegelschnitte ist dem Kombinantenkegelschnitt m harmonisch umgeschrieben.

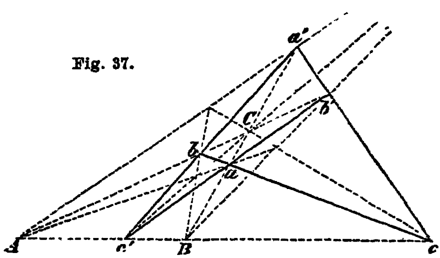
4) Die in bezug auf die zwei äquianharmonischen Kegelschnitte des Büschels und in bezug auf die Kombinante m genommenen Pole einer beliebigen Geraden v bilden ein Dreieck D, das sich zu dem gemeinsamen Poldreieck des Büschels in *sechsfach* perspektiver Lage befindet. Voraussetzung ist nur, daß die Gerade v nicht durch eine Ecke des Poldreiecks gehe.[94])

5) Das Dreieck D liegt auch *sechsfach* perspektiv zu dem Dreieck D_1, dessen Ecken die Pole der Geraden v in bezug auf die drei harmonischen Kegelschnitte des Büschels sind.

6) Das Dreieck D_1 und das gemeinsame Poldreieck des Büschels befinden sich in *vierfach* perspektiver Lage.

7) *Vierzehnpunkte-Kegelschnitt des Vierecks.* Die Doppelpunkte der drei Involutionen aa', BC; bb', CA; cc', AB in den Diagonalen aa', bb', cc' eines Vierecks $aba'b'$ (Fig. 37) und die vier Paare von Punkten, die in den Seiten mit den ihnen angehörigen Gruppen abc, $a'bc'$, $a'b'c$, $ab'c'$ Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bilden, liegen auf demselben Kegelschnitt.

Fig. 37.



Werden drei Seiten des Vierecks als Seiten des Koordinatendreiecks gewählt, und hat die vierte die Gleichung $a_x = 0$, so daß

$$y_1 \equiv a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$y_2 \equiv a_3 x_3 + a_1 x_1 = 0,$$
$$y_3 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

die Gleichungen der drei Diagonalen sind, so sind durch $x_2 x_3 (a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0$ die drei Punkte einer Vierecksseite $x_1 = 0$ und durch die Hessesche Determinante (Nr. 335)

$$a_2^2x_2^2 + a_2a_3x_2x_3 + a_3^2x_3^2 = 0$$

dieser kubischen Form nach Nr. 338 die beiden Punkte bestimmt, die mit den drei Punkten der Form gleiche fundamentale Doppelverhältnisse bestimmen. Dieses Punktepaar liegt mit den beiden analogen Paaren

$$a_3^2x_3^2 + a_3a_1x_3x_1 + a_1^2x_1^2 = 0, \qquad a_1^2x_1^2 + a_1a_2x_1x_2 + a_2^2x_2^2 = 0$$

auf dem Kegelschnitt

$$a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 + a_2a_3x_2x_3 + a_3a_1x_3x_1 + a_1a_2x_1x_2 = 0$$

oder

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0,$$

für die drei Diagonalen als Fundamentallinien. Auch die vierte Seite schneidet ihn in zwei Punkten der bezeichneten Art. Die Diagonale $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ gibt als Gleichung ihrer Schnittpunkte mit ihm $a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 = 0$, d. h. die Doppelpunkte der auf ihr bestimmten Involution. (Vgl. Nr. 331.) Wie man sieht, lassen sich sofort $4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 14$ Punkte des Kegelschnittes angeben. Für ein reelles Viereck ist der Kegelschnitt imaginär; es ist übrigens derselbe, der in Nr. 304, 10 betrachtet wurde.[95])

8) Man drücke die Gleichung des vorigen Kegelschnittes als Kovariante des Systems von zwei Kegelschnitten aus. Sind die beiden Kegelschnitte auf das gemeinsame Poldreieck als Koordinatendreieck bezogen und ist $d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = 0$ eine ihrer gemeinsamen Tangenten, so sind $d_1x_1 \pm d_2x_2 \pm d_3x_3 = 0$ die vier Tangenten, und der fragliche Kegelschnitt hat die Gleichung

$$d_1^2x_1^2 + d_2^2x_2^2 + d_3^2x_3^2 = 0.$$

Für die d_i aber gelten nach Nr. 356, 1 die Bedingungen

$$a_{22}a_{33}d_1^2 + \cdots = 0, \quad b_{22}b_{33}d_1^2 + \ldots = 0,$$

d. h. $d_1^2 : d_2^2 : d_3^2 = a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22}) : a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33})$
$: a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}).$

Haben dann $f = 0$, $g = 0$, $k = 0$ dieselben Bedeutungen wie im Text, so sei $\lambda f + \mu g + 2\nu k = 0$ die Gleichung unseres Kegelschnittes; dann ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung die Beziehungen

$$\lambda a_{11} + \mu b_{11} + \nu a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22}) = a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})$$

mit zwei zyklisch gleichgebildeten. Multipliziert man diese Beziehungen bez. mit $a_{22}a_{33}$, $a_{33}a_{11}$, $a_{11}a_{22}$ und addiert die Produkte, so erhält man

$$3\lambda a_{11}a_{22}a_{33} + \mu(b_{11}a_{22}a_{33} + \ldots) + 2\nu a_{11}a_{22}a_{33}(a_{11}b_{22}b_{33} + \ldots) = 0,$$

wo alle Glieder Invarianten sind. Also gilt allgemein die Beziehung $A\lambda + \mathrm{H}\mu + 2A\Theta\nu = 0$, und analog erhält man $\Theta\lambda + B\mu + 2B\mathrm{H}\nu = 0$. Durch Elimination von λ, μ, ν aus diesen beiden

Gleichungen und aus $\lambda f + \mu g + 2\nu k = 0$ erhält man die Gleichung des Vierzehnpunkte-Kegelschnittes in der Form[96])

$$\begin{vmatrix} Bf(x,x) & Ag(x,x) & k(x,x) \\ \Theta & A & \mathrm{H} \\ B & \mathrm{H} & \Theta \end{vmatrix} = 0.$$

9) Das dem vorigen dual entsprechende Problem liefert den im Text behandelten kovarianten Kegelschnitt $m(x, x) = 0$.

10) Man drücke die zu $m(x, x) = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten $M(u, u) = 0$ durch die Kontravarianten F, G, H der beiden Kegelschnitte f und g aus.

Hier muß $M(u, u) = 0$ von der Form sein $\lambda F + \mu G + 2\nu H$; in ähnlicher Weise wie bei B. 8 findet man[97])

$$M(u,u) = -18 \begin{vmatrix} F(u,u) & G(u,u) & H(u,u) \\ A & \Theta & \mathrm{H} \\ \mathrm{H} & B & \Theta \end{vmatrix}.$$

11) Die Gleichung in Linienkoordinaten des zur Kombinante $m(x, x)$ dualen Vierzehnpunktekegelschnittes lautet[97])

$$B\mathrm{H}F(u,u) - 2ABH(u,u) + A\Theta G(u,u) = 0.$$

Dieser Ausdruck steht zu $F(u, u) - \lambda G(u, u)$ in derselben Beziehung wie $m(x, x)$ zu $f(x, x) - \lambda g(x, x)$.

361. **Berührungsbedingungen.** *Die projektive Verallgemeinerung der Beziehungen zwischen Kreisen* findet sich in dem Zusammenhang der Kegelschnitte, die mit einem festen Kegelschnitt in doppelter Berührung stehen. Der analytischen Behandlung dieser Probleme in Beispielen liegen gewisse Kovariantenbeziehungen zugrunde.

Man soll die Bedingung aufstellen, *unter der die Gerade u_i den Kegelschnitt $f(x, x) + (v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)^2 = 0$ berührt.* Die zugeordnete Form liefert diese Bedingung durch die Substitution von $a_{ik} + v_iv_k$ an Stelle von a_{ik} als

$$\begin{vmatrix} a_{11}+v_1^2 & a_{12}+v_1v_2 & a_{13}+v_1v_3 & u_1 \\ a_{21}+v_2v_1 & a_{22}+v_2^2 & a_{23}+v_2v_3 & u_2 \\ a_{31}+v_3v_1 & a_{32}+v_3v_2 & a_{33}+v_3^2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck ist gleich einer Summe von einzelnen Determinanten, deren erste $-F(u, u)$ selbst ist; drei andere, die je zwei Reihen der v_iv_k enthalten, verschwinden identisch, weil zwei proportionale Spalten in ihnen auftreten, und die drei,

in denen nur eine Reihe $v_i v_k$ vorkommt, geben durch Entwickelung eine Gliedergruppe, die sich von $-f(x,x)$ nur dadurch unterscheidet, daß an Stelle der x_i die Differenzen $u_j v_k - u_k v_j$ stehen. Daher lautet die gesuchte Bedingung, also die Gleichung in Linienkoordinaten:

$$(76)\quad \begin{cases} F(u,u) + \{a_{11}(v_2 u_3 - v_3 u_2)^2 + \cdots \\ + 2a_{12}(v_2 u_3 - v_3 u_2)(v_3 u_1 - v_1 u_3) + \cdots\} = 0. \end{cases}$$

Diese kann in anderer Form geschrieben werden, wenn man die zu

$$f(y,y)f(x,x) - f^2(y,x) \equiv A_{11}(x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + \cdots \\ + 2A_{12}(x_2 y_3 - x_3 y_2)(x_3 y_1 - x_1 y_3) + \cdots$$

duale Gleichung benutzt (vgl. (32)—(34) in Nr. 313) und dabei von $F(u,u)$ und $G(u,u)$ ausgeht. Alsdann folgt

$$(77)\quad \begin{cases} F(v,v)F(u,u) - F^2(v,u) \equiv A\{a_{11}(v_2 u_3 - v_3 u_2)^2 + \cdots \\ + 2a_{12}(v_2 u_3 - v_3 u_2)(v_3 u_1 - v_1 u_3) + \cdots\}. \end{cases}$$

Hier ist $F(v,u) = 0$ die Bedingung dafür, daß die beiden Geraden u_i und v_i in bezug auf den Kegelschnitt $f = 0$ harmonische Polaren sind. Daher kann die Gleichung (76) im Falle $A \gtrless 0$ nach Multiplikation mit A in der Form geschrieben werden:

$$(78)\qquad (A + F(v,v))F(u,u) - F^2(v,u) = 0.$$

Aus (78) kann noch eine andere, für gewisse Anwendungen bequeme Form für die Bedingung der Berührung des Kegelschnittes $f(x,x) + v_x^2 = 0$ und der Geraden $u_x = 0$ abgeleitet werden. Man faßt $u_x = 0$ als Polare eines Punktes ξ in bezug auf den Kegelschnitt $f = 0$ auf, so daß

$$u_1 : u_2 : u_3 = \tfrac{1}{2}f'(\xi_1) : \tfrac{1}{2}f'(\xi_2) : \tfrac{1}{2}f'(\xi_3) = (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3) : \\ (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3) : (a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3)$$

wird, und $v_x = 0$ faßt man als Polare eines Punktes x' in bezug auf $f = 0$ auf, setzt also $v_i = a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + a_{i3}x_3'$, $i = 1, 2, 3$. In (78) treten alsdann an Stelle von $F(v,v)$, $F(u,u)$, $F(v,u)$ der Reihe nach die Ausdrücke $Af(x',x')$, $Af(\xi,\xi)$*), $Af(x',\xi)$, wodurch (78) nach Absonderung des Faktors A^2 übergeht in

$$(79)\qquad (1 + f(x',x'))f(\xi,\xi) - f^2(x',\xi) = 0.$$

*) Wir bemerken, daß man hierdurch für die allgemeine homo-

Man kann schließlich zur Bildung der *Bedingung* weitergehen, *unter der sich die beiden Kegelschnitte*

$$(80)\qquad \begin{cases} f(x,x)+(v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3)^2=0, \\ f(x,x)+(w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3)^2=0 \end{cases}$$

berühren. Denn diese Berührung findet statt, wenn eine der gemeinschaftlichen Sehnen $v_x \pm w_x = 0$ einen der Kegelschnitte berührt; man erhält daher die gesuchte Bedingung, indem man in der Bedingung (78) an Stelle der u_i die $v_i \pm w_i$ einsetzt. So folgt:

$$(81)\qquad \begin{cases} (A+F(v,v))(F(v,v)\pm 2F(v,w)+F(w,w)) \\ \qquad\qquad -(F(v,v)\pm F(v,w))^2=0 \end{cases}$$

oder in mehr symmetrischer Form:

$$(82)\qquad (A+F(v,v))(A+F(w,w))-(A\pm F(v,w))^2=0.$$

In ähnlicher Weise wie aus (78) die Gleichung (79) abgeleitet wurde, läßt sich auch die Bedingung (82) für die Berührung der beiden Kegelschnitte $f(x,x)+v_x^2=0$ und $f(x,x)+w_x^2=0$ in eine andere Form bringen, wenn man $v_x=0$ und $w_x=0$ als Polaren zweier Punkte x' und x'' in bezug auf $f=0$ auffaßt, also $v_i=\frac{1}{2}f'(x_i')$, $w_i=\frac{1}{2}f'(x_i'')$ setzt, wo $i=1,2,3$. Nach Absonderung des Faktors A^2 erhält man die Bedingung der Berührung in der Form

$$(83)\qquad (1+f(x',x'))(1+f(x'',x''))-(1\pm f(x',x''))^2=0.$$

B. 1) Man soll einen $f(x,x)=0$ doppelt berührenden Kegelschnitt $f(x,x)+t_x^2=0$ so bestimmen, daß er zugleich die Kegelschnitte

$$f(x,x)+f^2(x',x)=0,\quad f(x,x)+f^2(x'',x)=0,$$
$$f(x,x)+f^2(x''',x)=0$$

berührt, die selbst mit $f(x,x)=0$ in doppelter Berührung sind.[98])

Ist ξ_i der Pol der zu $f=0$ und $f+t_x^2=0$ gehörigen Berührungssehne, also $t_i=\frac{1}{2}f'(\xi_i)$, $i=1,2,3$, so bestehen nach (83) die Beziehungen

---

gene Gleichung des Kegelschnittes in doppelter Weise die Form einer Determinante gewonnen hat. Man kann $-Af(x,x)$ sowohl dadurch erhalten, daß man die aus den a_{ik} gebildete Determinante 3. Grades mit $\frac{1}{2}f'(x_1)$, $\frac{1}{2}f'(x_2)$, $\frac{1}{2}f'(x_3)$ rändert, als auch dadurch, daß man die aus den A_{ik} gebildete Determinante 3. Grades mit x_1, x_2, x_3 rändert.

$$(1 + f(\xi, \xi))(1 + f(x', x')) = (1 + f(x', \xi))^2,$$
$$(1 + f(\xi, \xi))(1 + f(x'', x'')) = (1 + f(x'', \xi))^2,$$
$$(1 + f(\xi, \xi))(1 + f(x''', x''')) = (1 + f(x''', \xi))^2,$$

in denen $f(x', x')$, $f(x'', x'')$, $f(x''', x''')$ bekannte Konstanten sind. Zur Abkürzung werde gesetzt

$$1 + f(\xi, \xi) = k^2, \quad 1 + f(x', x') = k'^2, \quad 1 + f(x'', x'') = k''^2,$$
$$1 + f(x''', x''') = k'''^2;$$

alsdann ist

$$kk' = 1 + f(x', \xi), \quad kk'' = 1 + f(x'', \xi), \quad kk''' = 1 + f(x''', \xi).$$

Dabei ist zu bemerken, daß eigentlich $f(x', \xi)$, $f(x'', \xi)$, $f(x''', \xi)$ je mit doppeltem Zeichen zu schreiben wären, und daß infolge der Quadratwurzelziehung auch die k', k'', k''' doppelte Zeichen erhalten; daher zeigen diese Verschiedenheiten der Vorzeichen zweiunddreißig Auflösungen des Problems an.

Die letztgeschriebenen Gleichungen geben

$$k(k' - k'') = f(x', \xi) - f(x'', \xi), \quad k(k'' - k''') = f(x'', \xi) - f(x''', \xi)$$

und somit durch Elimination von k:

$$f(x', \xi)(k'' - k''') + f(x'', \xi)(k''' - k') + f(x''', \xi)(k' - k'') = 0,$$

in laufenden Koordinaten ξ_i die Gleichung einer Geraden, die durch den in bezug auf $f = 0$ genommenen Pol der Berührungssehne des gesuchten Kegelschnittes gehen muß. Durch die aus $f(x', \xi) = f(x'', \xi) = f(x''', \xi)$ folgenden Koordinatenwerte wird die Gleichung erfüllt, d. h. der durch diese Gleichungen gegebene Punkt, der in Übertragung einer bei Kreisen benutzten Redeweise (Teil 1, Nr. 116) als einer der „Potenzmittelpunkte“ der Kegelschnitte

$$f(x, x) + f^2(x', x) = 0, \quad f(x, x) + f^2(x'', x) = 0,$$
$$f(x, x) + f^2(x''', x) = 0$$

bezeichnet werden kann, liegt auf der Geraden. Schon in Nr. 267 kam dieser Punkt vor. Auch die aus den Beziehungen

$$\frac{f(x', \xi)}{k'} = \frac{f(x'', \xi)}{k''} = \frac{f(x''', \xi)}{k'''}$$

folgenden Koordinatenwerte erfüllen die Gleichung und haben folgende geometrische Bedeutung: Die Gleichungen von

$$f(x, x) + f^2(x', x) = 0, \quad f(x, x) + f^2(x'', x) = 0$$

in Linienkoordinaten sind bez.

$$(1 + f(x', x'))F(u, u) - Au_{x'}{}^2 = 0,$$
$$(1 + f(x'', x''))F(u, u) - Au_{x''}{}^2 = 0,$$

und durch

$$\frac{u_1 x_1' + u_2 x_2' + u_3 x_3'}{k'} \pm \frac{u_1 x_1'' + u_2 x_2'' + u_3 x_3''}{k''} = 0$$

werden daher Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von $f(x,x)+f^2(x',x)=0$, $f(x,x)+f^2(x'',x)=0$ dargestellt. Die Koordinaten dieser Punkte sind $\frac{x_i'}{k'}\pm\frac{x_i''}{k''}$, und ihre Polaren in bezug auf $f=0$ haben die Gleichungen $\frac{f(x',x)}{k'}\pm\frac{f(x'',x)}{k''}=0$. Daraus folgt, daß die aus $f(x',\xi):k'=f(x'',\xi):k''=f(x''',\xi):k'''$ folgenden Koordinatenwerte den in bezug auf $f=0$ genommenen Pol einer Achse der Ähnlichkeit der drei gegebenen Kegelschnitte bezeichnen. Man hat also den Satz: *Der Pol der gesuchten Berührungssehne liegt in einer der Geraden, die einen der vier „Potenzmittelpunkte" mit dem in bezug auf $f=0$ genommenen Pol einer der vier Ähnlichkeitsachsen verbinden.* Vgl. hierzu Teil 1, Nr. 123.

Zur Vervollständigung der Auflösung suchen wir auch die Koordinaten des Punktes zu bestimmen, in dem sich $f(x,x)+t_x^2=0$ und $f(x,x)+f^2(x',x)=0$ berühren. Da dieser Punkt ein Ähnlichkeitszentrum der beiden Kegelschnitte ist, so sind seine Koordinaten $\frac{\xi_i}{k}+\frac{x_i'}{k'}$ und wir müssen $\xi_i+\frac{k}{k'}x_i'$ für ξ_i in die Gleichungen $kk'=1+f(x',\xi)$, usw. einsetzen, wodurch wir erhalten

$$kk'=1+f(x',\xi)+\frac{k}{k'}f(x',x'),\quad kk''=1+f(x'',\xi)+\frac{k}{k'}f(x'',x'),$$
$$kk'''=1+f(x''',\xi)+\frac{k}{k'}f(x''',x').$$

Alsdann ist

$$k(k'-k'')=f(x',\xi)-f(x'',\xi)+\frac{k}{k'}(f(x',x')-f(x'',x')),$$
$$k(k'-k''')=f(x',\xi)-f(x''',\xi)+\frac{k}{k'}(f(x',x')-f(x''',x')),$$

und durch Elimination von k erhalten wir in der Form

$$\begin{aligned}&f(x',\xi)\left\{k''-\frac{f(x'',x')}{k'}-\left(k'''-\frac{f(x''',x')}{k'}\right)\right\}\\ &+f(x'',\xi)\left\{k'''-\frac{f(x''',x')}{k'}-\left(k'-\frac{f(x',x')}{k'}\right)\right\}\\ &+f(x''',\xi)\left\{k'-\frac{f(x',x')}{k'}-\left(k''-\frac{f(x'',x')}{k'}\right)\right\}=0\end{aligned}$$

die Gleichung einer Geraden, die den gesuchten Berührungspunkt enthält. Dieselbe verbindet einen „Potenzmittelpunkt" mit demjenigen Punkte, in dem $f(x',\xi)$, $f(x'',\xi)$, $f(x''',\xi)$ bez. zu

$$k'-\frac{f(x',x')}{k'},\quad k''-\frac{f(x'',x')}{k'},\quad k'''-\frac{f(x''',x')}{k'}$$

oder zu $\qquad 1,\ k'k''-f(x'',x'),\ k'k'''-f(x''',x')$

proportional sind. Wenn wir aber die Gleichungen der Polaren der drei Ähnlichkeitszentra einer Ähnlichkeitsachse in bezug auf den Kegelschnitt $f(x,x)+f^2(x',x)=0$ bilden, wie zuvor, so erhalten wir

$(k'k''-f(x'',x'))f(x',x)=f(x'',x)$, $(k'k'''-f(x''',x'))f(x',x)=f(x''',x)$, usw. Also verbindet die Gerade, die wir zu konstruieren wünschen, einen der vier Potenzmittelpunkte mit dem Pole, der einer der vier Ähnlichkeitsachsen in bezug auf den Kegelschnitt $f(x,x)+f^2(x',x)=0$ entspricht. Die sechzehn Geraden, die man so erhält, schneiden den Kegelschnitt $f(x,x)+f^2(x',x)=0$ in den zweiunddreißig Punkten, in den ihn die verschiedenen, den Bedingungen des Problems genügenden Kegelschnitte berühren.

2) Zu einer zweiten Lösung des Problems führt die Entwickelung einer identischen Beziehung, die die Invarianten von vier Kegelschnitten verbindet, wenn alle vier *einen* Kegelschnitt f doppelt berühren und zugleich alle von *einem* ebenfalls doppelt berührenden Kegelschnitt K berührt werden.

Es sei $\qquad f(x,x)\equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \qquad$ und

$$p^{(1)}\equiv a_1^{(1)}x_1+a_2^{(1)}x_2+a_3^{(1)}x_3,\qquad p^{(2)}\equiv a_1^{(2)}x_1+a_2^{(2)}x_2+a_3^{(2)}x_3;$$

ferner werde zur Abkürzung gesetzt

$$f^{(1)}\equiv a_1^{(1)2}+a_2^{(1)2}+a_3^{(1)2},\qquad f^{(2)}\equiv a_1^{(2)2}+a_2^{(2)2}+a_3^{(2)2},$$

$$f^{(12)}\equiv a_1^{(1)}a_1^{(2)}+a_2^{(1)}a_2^{(2)}+a_3^{(1)}a_3^{(2)}.$$

Alsdann lautet nach (82) die Bedingung, unter der sich die Kegelschnitte $\qquad f-p^{(1)2}=0$ und $f-p^{(2)2}=0$

berühren: $\qquad (1-f^{(1)})(1-f^{(2)})=(1-f^{(12)})^2.$

Wir wenden nun auf die beiden Gruppen von Elementen mit sechs Zeilen und nur fünf Spalten

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
1, & 0, & 0, & 0, & 0 & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\
1, & a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & a_3^{(1)}, & \sqrt{1-f^{(1)}} & -1, & a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & a_3^{(1)}, & \sqrt{1-f^{(1)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
1, & a_1^{(5)}, & a_2^{(5)}, & a_3^{(5)}, & \sqrt{1-f^{(5)}} & -1, & a_1^{(5)}, & a_2^{(5)}, & a_3^{(5)}, & \sqrt{1-f^{(5)}}
\end{array}$$

die Regel für die Multiplikation zweier Matrizes an und erhalten dann nach Teil 1, S. 179 ein verschwindendes Produkt. Setzt man zur kurzen Darstellung desselben

$$\sqrt{1-f^{(1)}}\sqrt{1-f^{(2)}}-(1-f^{(12)})=(12),\ \text{usw.},$$

so folgt daher die *identische Beziehung*

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\sqrt{1-f^{(1)}} & 0 & (12) & (13) & (14) & (15) \\
\sqrt{1-f^{(2)}} & (12) & 0 & (23) & (24) & (25) \\
\sqrt{1-f^{(3)}} & (13) & (23) & 0 & (34) & (35) \\
\sqrt{1-f^{(4)}} & (14) & (24) & (34) & 0 & (45) \\
\sqrt{1-f^{(5)}} & (15) & (25) & (35) & (45) & 0
\end{vmatrix}=0,$$

die die Invarianten von fünf Kegelschnitten verbindet, falls diese sämtlich mit einem und demselben Kegelschnitt $f = 0$ in doppelter Berührung sind.

Wenn aber der Kegelschnitt (5) die vier übrigen Kegelschnitte berührt, so verschwinden die (15), . . (45) sämtlich, und wir finden, *daß die Invarianten von vier Kegelschnitten, die den nämlichen Kegelschnitt doppelt berühren und selbst alle von einem und demselben fünften, jenen auch doppelt berührenden Kegelschnitt K berührt werden, die Bedingung erfüllen*

$$\begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (14) \\ (12) & 0 & (23) & (24) \\ (13) & (23) & 0 & (34) \\ (14) & (24) & (34) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(vgl. Teil 1, Nr. 128)}$$

oder $$\sqrt{(12)(34)} \pm \sqrt{(13)(24)} \pm \sqrt{(14)(23)} = 0\,.$$

3) Mit Hilfe der Beziehung in 2) ergibt sich eine Lösung des Problems von der Bestimmung des Kegelschnittes, der drei gegebene Kegelschnitte berührt, und, so wie jeder von diesen, selbst einen festen Kegelschnitt doppelt berührt. Diese Lösung entspricht vollständig der zweiten Auflösung des Problems vom Berührungskreis zu drei Kreisen, die wir in Teil 1, S. 263/4 gegeben haben.

Wenn die Diskriminante eines Kegelschnittes $f - p^{(i)2} = 0$ verschwindet, ist $f^{(i)} = 1$, und die Bedingung seiner Berührung mit einem der andern Kegelschnitte reduziert sich auf $f^{(ik)} = 1$.

Für z_i als Koordinaten eines Punktes von $f - p^2 = 0$ oder von

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0$$

bezeichnet offenbar

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \left\{\frac{z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}\right\}^2 = 0$$

einen Kegelschnitt von verschwindender Diskriminante, der $f - p^2 = 0$ berührt. Wenn daher drei Kegelschnitte

$$f - p^{(1)2} = 0, \quad f - p^{(2)2} = 0, \quad f - p^{(3)2} = 0$$

gegeben sind, und z_i einen Punkt bezeichnet, der dem berührenden Kegelschnitt angehört, und wenn der Kegelschnitt von der vorher geschriebenen Gleichung als vierter Kegelschnitt genommen wird, so sind die Funktionen (14), (24), (34) bez.

$$1 - \frac{p^{(1)}}{\sqrt{f}}, \quad 1 - \frac{p^{(2)}}{\sqrt{f}}, \quad 1 - \frac{p^{(3)}}{\sqrt{f}},$$

und die Koordinaten der Punkte des Berührungskegelschnittes der drei gegebenen genügen daher nach 2) der Gleichung[99])

$$\sqrt{(23)(\sqrt{f} - p^{(1)})} \pm \sqrt{(31)(\sqrt{f} - p^{(2)})} \pm \sqrt{(12)(\sqrt{f} - p^{(3)})} = 0\,.$$

4) Die vier Kegelschnitte, die mit einem gegebenen Kegelschnitt $f=0$ eine doppelte Berührung haben und durch drei gegebene Punkte gehen, werden sämtlich von vier andern Kegelschnitten berührt, die selbst mit $f=0$ eine doppelte Berührung haben. Vgl. auch Nr. 321, 3.[100])

Ist der Kegelschnitt f gegeben durch die Gleichung

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3\cos\varphi_1-2x_3x_1\cos\varphi_2-2x_1x_2\cos\varphi_3=0,$$

so sind die vier gedachten Kegelschnitte durch $f-(x_1\pm x_2\pm x_3)^2=0$ dargestellt, und diese werden alle durch

$$f-\{x_1\cos(\varphi_2-\varphi_3)+x_2\cos(\varphi_3-\varphi_1)+x_3\cos(\varphi_1-\varphi_2)\}^2=0$$

und die drei anderen Kegelschnitte berührt, die man hieraus durch die bez. Zeichenwechsel von φ_1, φ_2, φ_3 erhält.

5) Die vier von den Fundamentallinien $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ berührten Kegelschnitte, die den Kegelschnitt $f=0$ doppelt berühren, werden durch vier andere Kegelschnitte berührt, die gleichfalls $f=0$ doppelt berühren. Jene sind für

$$\psi=\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\qquad\text{durch}$$

$$f-\{x_1\sin(\psi-\varphi_1)+x_2\sin(\psi-\varphi_2)+x_3\sin(\psi-\varphi_3)\}^2=0$$

und die drei anderen Gleichungen dargestellt, die durch die Zeichenwechsel bei φ_1, φ_2, φ_3 bez. aus dieser entstehen; einer der berührenden Kegelschnitte ist daher

$$f-\left\{\frac{x_1\sin\frac{1}{2}\varphi_2\sin\frac{1}{2}\varphi_3}{\sin\frac{1}{2}\varphi_1}+\frac{x_2\sin\frac{1}{2}\varphi_3\sin\frac{1}{2}\varphi_1}{\sin\frac{1}{2}\varphi_2}+\frac{x_3\sin\frac{1}{2}\varphi_1\sin\frac{1}{2}\varphi_2}{\sin\frac{1}{2}\varphi_3}\right\}^2=0,$$

und man erhält die übrigen durch Veränderung des Vorzeichens bei x_1 und gleichzeitigen Übergang vom Sinus zum Kosinus bei φ_2 und φ_3, usw.

6) Die Bedingung, unter der drei Kegelschnitte $f^{(1)}=0$, $f^{(2)}=0$, $f^{(3)}=0$ mit demselben vierten Kegelschnitt eine doppelte Berührung haben, wird gebildet, indem man λ, μ, ν zwischen den drei Gleichungen eliminiert, die ausdrücken, daß

$$\lambda f^{(1)}-\mu f^{(2)}=0,\quad \mu f^{(2)}-\nu f^{(3)}=0,\quad \nu f^{(3)}-\lambda f^{(1)}=0$$

in Geradenpaare zerfallen, d. h. zwischen

$$A^{(1)}\lambda^3-3\,\mathsf{H}^{(12)}\lambda^2\mu+3\,\Theta^{(12)}\lambda\mu^2-B^{(2)}\mu^3=0$$

und den gleichgebildeten übrigen. Die Bezeichnungsweise $A^{(1)}$, $\mathsf{H}^{(12)}$, .. bedarf wohl keiner Erläuterung.

362. **Transformation zu Normal-Gleichungen.** Von grundlegender Bedeutung ist die Anwendung der Invariantentheorie auf die Bestimmung des gemeinsamen Polardreiecks zweier Kegelschnitte. Denn weil die Beziehung dieses Dreiecks zu den Kurven kovariant ist, *muß die Koordinatentrans-*

formation $x_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k'$, *die zwei Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Polardreieck bezieht oder zwei quadratische Formen gleichzeitig auf die Normalform reduziert, mit Hilfe der Invarianten des Paares ausführbar sein.*[101])

Wir setzen die Gleichungen der Kegelschnitte $f(x,x) = 0$, $g(x,x) = 0$ in den allgemeinen Formen voraus und denken sie durch die linearen Substitutionen in die jener Beziehung entsprechende Form

$$(84) \quad \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = 0, \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$$

übergeführt, wobei wir gewisse Konstanten implizite in den x_i' voraussetzen. Die Aufgabe der Ermittelung der Werte der Substitutionskoeffizienten α_{ik} und der λ_i ist völlig bestimmt, denn den zwölf Unbekannten entsprechen nach den Identitäten der transformierten und der ursprünglichen Formen zwölf Bedingungsgleichungen.

Die Untersuchung der Diskriminante $C(\lambda)$ und der Tangentialform $F(u,u)$ des Systems $f(x,x) - \lambda g(x,x) = 0$ führt zur Bestimmung sämtlicher Unbekannten; jene ist

$$(85) \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & a_{13}-\lambda b_{13} \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & a_{23}-\lambda b_{23} \\ a_{31}-\lambda b_{31} & a_{32}-\lambda b_{32} & a_{33}-\lambda b_{33} \end{vmatrix} = A - 3\lambda \mathrm{H} + 3\lambda^2 \Theta - \lambda^3 B \equiv C(\lambda);$$

die Diskriminante des transformierten Systems ist notwendig

$$(86) \quad \Delta^2 \cdot C(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda),$$

wobei Δ die Determinante der Substitutionen bedeutet.

Also liefert die kubische Gleichung $C(\lambda) = 0$, wie auch aus dem Schluß von Nr. 343 hervorgeht, die Werte von λ, die die Koeffizienten in der transformierten Form sind.

Die Tangentialform (Nr. 353)

$$(87) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(u,u) - 2\lambda H(u,u) + \lambda^2 G(u,u) \\ & \equiv - \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & a_{13}-\lambda b_{13} & u_1 \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & a_{23}-\lambda b_{23} & u_2 \\ a_{31}-\lambda b_{31} & a_{32}-\lambda b_{32} & a_{33}-\lambda b_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

geht durch die transformierte Substitution in die Tangentialform des transformierten Systems über:

$$(88)\qquad \Delta^2\varphi(\lambda) = -\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 & u_1' \\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0 & u_2' \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda & u_3' \\ u_1' & u_2' & u_3' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)\left\{\frac{u_1'^2}{\lambda_1-\lambda}+\frac{u_2'^2}{\lambda_2-\lambda}+\frac{u_3'^2}{\lambda_3-\lambda}\right\}.$$

Denken wir dann die Werte λ_1, λ_2, λ_3, die sich mit Hilfe von $C(\lambda)=0$ ergeben haben, in die Gleichung (88) nacheinander substituiert, so erhalten wir das System

$$(89)\qquad \begin{cases} \Delta^2\varphi(\lambda_1) = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)u_1'^2, \\ \Delta^2\varphi(\lambda_2) = (\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)u_2'^2, \\ \Delta^2\varphi(\lambda_3) = (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)u_3'^2. \end{cases}$$

Nun zeigt die Vergleichung der beiden Ausdrücke (85) und (86) von $C(\lambda)$, daß der Koeffizient von λ^3 in dem einen $-B$, im andern $-1:\Delta^2$ ist; somit ist $B\Delta^2=1$, d. h. die Bestimmung von Δ^2 gegeben. Alsdann bestimmen die drei Gleichungen (89) die Werte der u_i'.

Die Substitutionen $x_i = \Sigma\alpha_{ik}x_k'$, $u_i' = \Sigma\alpha_{ki}u_k$ machen die vorigen Gleichungen zu

$$(90)\qquad \varphi(\lambda_1) = B(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\{\alpha_{11}u_1+\alpha_{21}u_2+\alpha_{31}u_3\}^2, \text{usw.}$$

Denkt man $\varphi(\lambda_1)$ durch B und das Produkt der Differenzen der λ_i dividiert und den Quotienten nach Potenzen der u_i geordnet, so liefert die Vergleichung der Koeffizienten entsprechender Potenzen von u_i auf beiden Seiten die zur Bestimmung der α_{ik} hinreichende Anzahl von Gleichungen. Das Produkt der Differenzen der λ, mit dem (90) zu dividieren war, ist aber wegen

$$\Delta^2 C(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$$

derselbe Ausdruck, den man erhält, wenn man $-\Delta^2 C(\lambda)$ erst nach λ differenziert und dann für λ den Wert λ_1 einsetzt, also $\Delta^2 C'(\lambda_1)$ oder $C'(\lambda_1):B$, usw. bildet, es ist $C'(\lambda_1):B = -(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)$. Die vorigen Bestimmungsgleichungen für die α_{ik} werden demnach:

$$(91)\quad \begin{cases} -\dfrac{\varphi(\lambda_1)}{C'(\lambda_1)} \equiv (\alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \alpha_{31}u_3)^2, \\ -\dfrac{\varphi(\lambda_2)}{C'(\lambda_2)} \equiv (\alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{32}u_3)^2, \\ -\dfrac{\varphi(\lambda_3)}{C'(\lambda_3)} \equiv (\alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3)^2;\text{*)} \end{cases}$$

oder in vollständig entwickelter Gestalt in den Tangentialformen ausgedrückt:

$$(92)\quad F(u,u) - 2\lambda_i H(u,u) + \lambda_i^2 G(u,u) = -C'(\lambda_i)u_i'^2,\quad i = 1, 2, 3.$$

Die Substitutionskoeffizienten selbst erhält man endlich aus den Beziehungen $F(u', u') = \Delta^2 F(u, u)$, $H(u', u') = \Delta^2 H(u, u)$, $G(u', u') = \Delta^2 G(u, u)$; sie liefern die u_i' als Funktionen der u_i, also etwa $u_i' = \psi_i(u_1, u_2, u_3)$ und somit

$$\alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \alpha_{3i}u_3 = \psi_i(u_1, u_2, u_3).$$

Durch die einander folgenden Substitutionen

$$u_1 = 1,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0;\ u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 0;\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1$$

ergeben sich die Werte

$$\alpha_{1i} = \psi_i(1, 0, 0);\ \alpha_{2i} = \psi_i(0, 1, 0);\ \alpha_{3i} = \psi_i(0, 0, 1),$$

und daher mit Rücksicht auf (92):

$$(93)\quad \begin{cases} \alpha_{1i} = \sqrt{\dfrac{F(1,0,0) - 2\lambda_i H(1,0,0) + \lambda_i^2 G(1,0,0)}{-C'(\lambda)}}, \\ \alpha_{2i} = \sqrt{\dfrac{F(0,1,0) - 2\lambda_i H(0,1,0) + \lambda_i^2 G(0,1,0)}{-C'(\lambda_i)}}, \\ \alpha_{3i} = \sqrt{\dfrac{F(0,0,1) - 2\lambda_i H(0,0,1) + \lambda_i^2 G(0,0,1)}{-C'(\lambda_i)}}. \end{cases}$$

Die Bestimmung des Polardreiecks wird vereinfacht, wenn eine seiner Ecken, also auch die Lage der Gegenseite, von vornherein schon bekannt ist. Die beiden anderen Seiten des Dreiecks sind zu ermitteln als *das einzige Paar konjugierter Polaren, das die beiden Kegelschnitte an jenem Pol gemeinsam haben.*

Ein Hauptbeispiel für dieses Problem bieten konzentrische Kegelschnitte, deren gemeinsames Paar konjugierter Durchmesser gesucht wird. Ist dann insbesondere einer der Kegel-

*) Diese Entwickelungen lassen sich ohne Veränderung auf quadratische Formen von n Veränderlichen ausdehnen.

schnitte ein Kreis, so ist das geforderte Durchmesserpaar rechtwinklig, d. h. man kommt auf die *Achsenbestimmung der Kegelschnitte mit einem im Endlichen gelegenen Mittelpunkte*[102]) zurück und erkennt $a_{11}+a_{22}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ als *Kegelschnitts-Invarianten der Beziehung auf rechtwinklige Systeme mit dem Mittelpunkt als Koordinatenanfang* (Teil 1, Nr. 140—142 und 152—154). Die Ausführung dieses Gedankens in B. 5) zeigt die bloß binäre Gestaltung der Theorie des Textes.

B. 1) Normalformen der Gleichungen

$$f \equiv 9x_1^2-3x_2^2-4x_3^2-8x_2x_3-10x_3x_1-6x_1x_2=0,$$
$$g \equiv 5x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+4x_2x_3-2x_3x_1+2x_1x_2=0.$$

Man erhält für die Koeffizienten $A_{11}, A_{22}, \ldots$ der Tangentialgleichungen der Kegelschnitte die Werte

$$A_{11}=-4,\quad A_{22}=-61,\quad A_{33}=-36;$$
$$A_{23}=51,\quad A_{31}=-3,\quad A_{12}=8;$$

$B_{11}=2$, $B_{22}=9$, $B_{33}=14$; $B_{23}=-11$, $B_{31}=5$, $B_{12}=-4$; für die Invarianten $A=-45$, $B=1$, $3\mathrm{H}=-49$, $3\Theta_k=-3$; also für die kubische Gleichung:

$$C(\lambda)\equiv-\lambda^3-3\lambda^2+49\lambda-45=0$$

und für ihre Wurzeln $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-9$; daher lauten die reduzierten Gleichungen:

$$5x_1'^2+x_2'^2-9x_3'^2=0,\quad x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=0.$$

Es erübrigt die Bestimmung der Substitutionskoeffizienten.

Man erhält $C'(\lambda_1)=-56$, $C'(\lambda_2)=40$, $C'(\lambda_3)=-140$;
$\varphi(\lambda_1)=56u_1^2+224u_2^2+224u_3^2-448u_2u_3+224u_3u_1-224u_1u_2$,
$\varphi(\lambda_2)=-40u_2^2-40u_3^2+80u_2u_3$,
$\varphi(\lambda_3)=140u_1^2+560u_2^2+1260u_3^2-1680u_2u_3+840u_3u_1$
$-560u_1u_2$,

also sind jene negativen Quotienten von $\varphi(\lambda_i)$ und $C'(\lambda_i)$ bez. gleich
$u_1^2+4u_2^2+4u_3^2-8u_2u_3+4u_3u_1-4u_1u_2$; $u_2^2+u_3^2-2u_2u_3$,
$$u_1^2+4u_2^2+9u_3^2-12u_2u_3-6u_3u_1-4u_1u_2,$$
so daß die Bestimmungsgleichungen der Koeffizienten werden

$\alpha_{11}^2=1$, $\alpha_{21}^2=4$, $\alpha_{31}^2=4$, $\alpha_{21}\alpha_{31}=-4$, $\alpha_{31}\alpha_{11}=2$, $\alpha_{11}\alpha_{21}=-2$;
$\alpha_{12}^2=0$, $\alpha_{22}^2=1$, $\alpha_{32}^2=1$, $\alpha_{22}\alpha_{32}=-1$, $\alpha_{32}\alpha_{12}=0$, $\alpha_{12}\alpha_{22}=0$;
$\alpha_{13}^2=1$, $\alpha_{23}^2=4$, $\alpha_{33}^2=9$, $\alpha_{23}\alpha_{33}=-6$, $\alpha_{33}\alpha_{13}=3$, $\alpha_{13}\alpha_{23}=-2$;
und diese selbst $\alpha_{11}=1$, $\alpha_{12}=0$, $\alpha_{13}=1$;

$$\alpha_{21}=-2,\ \alpha_{22}=1,\ \alpha_{23}=-2;\ \alpha_{31}=2,\ \alpha_{32}=-1,\ \alpha_{33}=3.$$

Die Determinante $\triangle$ der Substitution ist dann $= 1$; statt $\alpha_{22} = 1$, $\alpha_{32} = -1$ könnte auch $\alpha_{22} = -1$, $\alpha_{32} = 1$ genommen werden, dann wäre $\triangle = -1$, in beiden Fällen in Übereinstimmung mit $B\triangle^2 = 1$, da $B = 1$. Vgl. auch Nr. 364, 3.

2) Man kann die Transformation auch in allgemeinster Form an die Kovariante anknüpfen, die man als zugeordnete Form $2h_1(x, x)$ von $2H(u, u)$ erhält, während die zugeordneten Formen von $F(u, u)$ und $G(u, u)$ wieder $f(x, x)$ und $g(x, x)$ sind. In der transformierten Form ist

$$2H'(u', u') = (\lambda_2 + \lambda_3)u_1'^2 + (\lambda_3 + \lambda_1)u_2'^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)u_3'^2$$

und die entsprechende zugehörige Form

$$2h_1'(x', x') = (\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2)x_1'^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)x_2'^2 \\ + (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1)x_3'^2 = 0.$$

Man hat also wegen $\triangle^2 h_1(x, x) = h_1(x', x')$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\triangle^2 h_1 &= (\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)x_1'^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)x_2'^2 + (\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)x_3'^2,\\
f &= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2,\\
g &= x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,
\end{aligned}$$

also durch Auflösung derselben

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)x_1'^2 &= \triangle^2 \cdot 2h_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)f - \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)g,\\
(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)x_2'^2 &= \triangle^2 \cdot 2h_1 - (\lambda_3 + \lambda_1)f - \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1)g,\\
(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)x_3'^2 &= \triangle^2 \cdot 2h_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)f - \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)g.
\end{aligned}$$

Nach den Entwickelungen des Textes ist

$$\triangle^2 B = 1, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 3\triangle^2\Theta - \lambda_1, \text{ usw.},$$

daher $\quad (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)Bx_i'^2 = 2h_1 + (\lambda_1 B - 3\Theta)(f + \lambda_1 g)$,

$$x_i' = \pm\sqrt{\frac{2h_1(x_1, x_2, x_3) + (\lambda_i B - 3\Theta)(f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_i g(x_1, x_2, x_3))}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)B}}.$$

Durch eine ähnliche Schlußweise wie auf S. 259 erhält man die Koeffizienten, die in den zu $x_i = \Sigma\alpha_{ik}x_k'$ inversen Substitutionen $\triangle x_i' = \Sigma \mathsf{A}_{ki}x_k$ auftreten, mit Hilfe der Formeln

$$\mathsf{A}_{1i} = \pm\sqrt{\frac{2h_1(1, 0, 0) + (\lambda_i B - 3\Theta)(f(1, 0, 0) + \lambda_i g(1, 0, 0))}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)B}},$$

$$\mathsf{A}_{2i} = \pm\sqrt{\frac{2h_1(0, 1, 0) + (\lambda_i B - 3\Theta)(f(0, 1, 0) + \lambda_i g(0, 1, 0))}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)B}},$$

$$\mathsf{A}_{3i} = \pm\sqrt{\frac{2h_1(0, 0, 1) + (\lambda_i B - 3\Theta)(f(0, 0, 1) + \lambda_i g(0, 0, 1))}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)B}},$$

wo vor den Quadratwurzeln entweder jedesmal das Plus- oder jedesmal das Minuszeichen zu setzen ist.[103])

3) *Bedingung der doppelten Berührung von zwei Kegelschnitte*
Im Falle der Berührung der beiden Kegelschnitte hat die Gleichur $C(\lambda)=0$ eine Doppelwurzel (vgl. Nr. 345 und 252), sie heiße λ und der für sie gebildete Ausdruck $\varphi(\lambda_1):C'(\lambda_1)$ in (91) wird nu unendlich groß, d. h. es gibt kein Dreieck der gemeinsamen ha monischen Pole. Für eine *doppelte* Berührung wird das Polardreiec unbestimmt, weil $\varphi(\lambda)$ für die Doppelwurzel den Wert Null habe muß. Dies heißt geometrisch: die Sehne der Berührung und il Pol sind Seite und Gegenecke für alle Dreiecke jener Art, und d beiden andern Ecken liegen in der Sehne als irgend ein Paar vc konjugierten Punkten; und es heißt analytisch, daß außer der Dete minante $C(\lambda)$ auch deren sämtliche Unterdeterminanten verschwi den (vgl. Nr. 252, S. 7—8). Also ist für $\lambda=\lambda_1$ nicht nur

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & a_{13}-\lambda b_{13} \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & a_{23}-\lambda b_{23} \\ a_{31}-\lambda b_{31} & a_{32}-\lambda b_{32} & a_{33}-\lambda b_{33} \end{vmatrix}=0,$$

sondern auch
$$(a_{22}-\lambda b_{22})(a_{33}-\lambda b_{33})=(a_{23}-\lambda b_{23})^2,$$
$$(a_{33}-\lambda b_{33})(a_{11}-\lambda b_{11})=(a_{31}-\lambda b_{31})^2,$$
$$(a_{11}-\lambda b_{11})(a_{22}-\lambda b_{22})=(a_{12}-\lambda b_{12})^2,$$
also
$$(a_{11}-\lambda b_{11}):(a_{12}-\lambda b_{12}):(a_{13}-\lambda b_{13})$$
$$=(a_{21}-\lambda b_{21}):(a_{22}-\lambda b_{22}):(a_{23}-\lambda b_{23}).$$

Die Elemente der Determinante verhalten sich somit wie die Quadra und Produkte dreier Größen a_1, a_2, a_3, oder man hat

$$a_{11}-\lambda b_{11}=ma_1^2,\quad a_{22}-\lambda b_{22}=ma_2^2,\quad a_{33}-\lambda b_{33}=ma_3^2,$$
$$a_{12}-\lambda b_{12}=ma_1a_2,\quad a_{23}-\lambda b_{23}=ma_2a_3,\quad a_{31}-\lambda b_{31}=ma_3a$$

Die Einführung dieser Werte in die Gleichung $f=0$ liefert ab

$$f\equiv\lambda g+m(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$$

und führt auf die Gleichungsform von Nr. 258 zurück.

Der Berührung zweiter Ordnung (Oskulation) entsprechen dr gleiche Wurzeln von $C(\lambda)=0$ und damit die Bedingungen vc Nr. 345, S. 207.

Berührung dritter Ordnung verlangt die Berührung der Sehı der doppelten Berührung mit den Kegelschnitten, also das Ve schwinden der Tangentialform jedes der Kegelschnitte, wenn ma in ihr die Linienkoordinaten u_i gleich a_i setzt, $i=1,2,3$. (Nr. 356, und Nr. 252, S. 9.)

4) Man soll die Gleichungen der gemeinsamen Punkte fi die durch die allgemeinen Gleichungen bestimmten Kegelschnit $f(x,x)=0$, $g(x,x)=0$ in endgültiger Form angeben.[103])

Wir ermitteln die lineare Funktion der Wurzeln $x_1, x_2,$:

mit Hilfe der Identität $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 \equiv u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3'$ (Gleichung (31) in Nr. 352). Aus den transformierten Formen

$f(x', x') \equiv \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2$ und $g(x', x') \equiv x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$

folgt nun für die Koordinaten der Schnittpunkte

$$x_1' : x_2' : x_3' = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3} : \pm\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1} : \pm\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2},$$

mit Rücksicht auf (92) ergibt sich daher für die Schnittpunkte von $f(x, x) = 0$ und $g(x, x) = 0$:

$$u_{x'}' = u_x = \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\{F(u,u) - 2\lambda_1 H(u,u) + \lambda_1^2 G(u,u)\}}{C'(\lambda_1)}}$$
$$\pm\sqrt{\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)\{F(u,u) - 2\lambda_2 H(u,u) + \lambda_2^2 G(u,u)\}}{C'(\lambda_2)}}$$
$$\pm\sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\{F(u,u) - 2\lambda_3 H(u,u) + \lambda_3^2 G(u,u)\}}{C'(\lambda_3)}}.$$

Entsprechend den verschiedenen Kombinationen der Plus- und Minuszeichen vor den Quadratwurzeln erhält man für die vier Schnittpunkte vier Gleichungen; in ihnen kann noch $C'(\lambda_i)$ durch $-(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)B$ ersetzt werden. Die Funktion u_x liefert die Werte von $x_1 : x_2 : x_3$ durch die einander folgenden Substitutionen $u_1 = 1,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0;\ u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 0;\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1$ unter den Wurzelzeichen.

5) *Transformation zweier auf den Mittelpunkt als Koordinatenanfang bezogener Gleichungen* (Teil 1, Nr. 154)

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 1,\quad b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 1$$

auf das gemeinschaftliche Paar konjugierter Durchmesser, d. h. in

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 = 1,\quad x_1'^2 + x_2'^2 = 1,$$

wo x_1, x_2 schief- oder rechtwinklige Parallelkoordinaten bedeuten. (Anwendung der im Text entwickelten Theorie bei nur zwei Veränderlichen.)

Bei dieser Transformation hat man die Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung

$$C(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - \lambda\{a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}\} + \lambda^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0$$

zu bestimmen. Man hat ferner

$$C'(\lambda) = -\{a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} - 2\lambda(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\},$$

wofür $-(K - 2\lambda L)$ gesetzt werden soll. Sind dann die zu benutzenden Substitutionen $x_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2'$, $x_2 = \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2'$, also die transponierten $u_1' = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2$, $u_2' = \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2$, so bilden wir

$$\varphi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & u_1 \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\{(a_{22} - \lambda b_{22})u_1^2 - 2(a_{12} - \lambda b_{12})u_1 u_2 + (a_{11} - \lambda b_{11})u_2^2\}$$

und erhalten die nach u_i identischen Gleichungen

$$\frac{\varphi(\lambda_1)}{C'(\lambda_1)} = (\alpha_{11} u_1 + \alpha_{21} u_2)^2, \quad \frac{\varphi(\lambda_2)}{C'(\lambda_2)} = (\alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2)^2.$$

Sie liefern unter Einführung der Wurzeln λ_1, λ_2 für die Substitutionskoeffizienten die Werte

$$\alpha_{11}^2 = \frac{a_{22} - \lambda_1 b_{22}}{K - 2\lambda_1 L}, \quad \alpha_{12}^2 = \frac{a_{22} - \lambda_2 b_{22}}{K - 2\lambda_2 L},$$

$$\alpha_{21}^2 = \frac{a_{11} - \lambda_1 b_{11}}{K - 2\lambda_1 L}, \quad \alpha_{22}^2 = \frac{a_{11} - \lambda_2 b_{11}}{K - 2\lambda_2 L}$$

und zur Bestimmung der Vorzeichen

$$\alpha_{11}\alpha_{21} = -\frac{a_{12} - \lambda_1 b_{12}}{K - 2\lambda_1 L}, \quad \alpha_{12}\alpha_{22} = -\frac{a_{12} - \lambda_2 b_{12}}{K - 2\lambda_2 L}.$$

Der Voraussetzung $C'(\lambda) = 0$ entspricht ein *Ausnahmefall;* $C(\lambda) = 0$ hat dann gleiche Wurzeln, d. h. es ist

$$4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})^2.$$

Da die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kurven, im allgemeinen Falle, in den Koeffizienten der Transformation durch

$$x_1' = \pm\sqrt{\frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad x_2' = \pm\sqrt{\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

gegeben sind, so fallen für $\lambda_1 = \lambda_2$ die Schnittpunkte in unendliche Entfernung; *die beiden Kurven sind konzentrische Hyperbeln, die eine Asymptote gemeinsam haben.*

Werden $C'(\lambda) = 0$ und $\varphi(\lambda) = 0$ gleichzeitig erfüllt oder verschwinden die Unterdeterminanten von $C(\lambda)$, so ist

$$a_{11} = \lambda b_{11}, \quad a_{22} = \lambda b_{22}, \quad a_{12} = \lambda b_{12},$$

d. h. *die Kegelschnitte sind ähnlich* (Nr. 224).

Für den Fall, daß $b_{11}x_1^2 + \cdots = 1$ ein Kreis ist, d. i. für die *Bestimmung der Achsen des Kegelschnittes*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 1,$$

hat man bei rechtwinkligen Parallelkoordinaten

$$b_{11} = b_{22} = 1 \quad \text{und} \quad b_{12} = 0,$$

d. h. $\quad C(\lambda) \equiv (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda$
$$+ (a_{11}a_{22} - a_{12}^2),$$

eine Gleichung, die stets reelle Wurzeln hat, weil ihre Diskriminante

$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$ positiv ist; ferner wird

$$C'(\lambda) = 2\lambda - (a_{11} + a_{22});$$

$$\varphi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = -(a_{22} - \lambda)u_1^2 - (a_{11} - \lambda)u_2^2 + 2a_{12}u_1u_2;$$

also $\alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 = \sqrt{\dfrac{-(a_{22} - \lambda_i)u_1^2 - (a_{11} - \lambda_i)u_2^2 + 2a_{12}u_1u_2}{2\lambda_i - a_{11} - a_{22}}}$,

wo im Nenner auch $\lambda_1 - \lambda_2$ oder $\lambda_2 - \lambda_1$ gesetzt werden kann, je nachdem $i = 1$ oder $i = 2$ ist.

Den Annahmen $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ entspricht die Unbestimmtheit des Problems; dann sind *beide Kurven Kreise.*

6) Die Schnittpunkte von zwei konzentrischen Kegelschnitten liegen in zwei Durchmessern, die mit dem Paar der gemeinsamen konjugierten Durchmesser ein harmonisches Büschel bilden, und die gemeinschaftlichen Tangenten bilden eine Parallelogramm, dessen Ecken auf diesen Durchmessern liegen.

Für die gemeinsamen Elemente im Falle der allgemeinen Lage gilt der Satz: Jedes der Dreiseite aus gemeinsamen Tangenten ist in perspektiver Lage zu jedem Dreieck aus gemeinsamen Punkten. Auf welcher Geraden liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten der beiden Dreiecke (Achse der Perspektivität) und in welchem Punkte schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken (Mittelpunkt der Perspektivität)?

363. **Jacobische Determinante.** Die Invariantentheorie der Kegelschnittpaare findet ihren Abschluß nicht ohne die Berücksichtigung des Systems von *drei* gleichzeitigen quadratischen Formen. Die eigentliche Untersuchung derselben greift überall in die Theorie der ternären kubischen Formen hinüber, die wir hier ausschließen müssen. Wir werden uns deshalb wesentlich auf die an das Frühere anschließenden Entwickelungen beschränken, die ohne Kenntnis der Lehre von den Kurven dritter Ordnung bez. Klasse erledigt werden können.

Für drei ternäre quadratische Formen $f(x, x)$, $g(x, x)$, $h(x, x)$ kann eine Kovariante auf demselben Wege gebildet werden, wie in Nr. 335 für zwei binäre Formen. Es ist dies *die Jacobische Determinante der partiellen ersten Ableitungen der drei Formen (Funktionaldeterminante),* also

$$(94)\qquad J \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{2}f'(x_1) & \frac{1}{2}g'(x_1) & \frac{1}{2}h'(x_1) \\ \frac{1}{2}f'(x_2) & \frac{1}{2}g'(x_2) & \frac{1}{2}h'(x_2) \\ \frac{1}{2}f'(x_3) & \frac{1}{2}g'(x_3) & \frac{1}{2}h'(x_3) \end{vmatrix}.$$

Ihre Invarianteneigenschaft erhellt daraus, daß bei der Trai formation die Ableitungen $f'(x_i)$, $g'(x_i)$, $h'(x_i)$ die trai ponierten Substitutionen von denen der Veränderlichen x_i (leiden (Nr. 342).

Da die Ableitungen die Veränderlichen linear enthalte stellt $J = 0$ eine kovariante Kurve dritter Ordnung, *die J cobische oder Hessesche Kurve der drei Kegelschnitte*, dar.[1] *Diese ist der Ort der Punkte, deren Polaren in bezug auf di gegebene Kegelschnitte f, g, h sich in einem Punkte schneide sie ist zugleich der Ort der Schnittpunkte dieser Polaren.* De $J = 0$ entsteht durch die Elimination der laufenden Koor naten ξ_i aus den Gleichungen der Polaren

$$f'(x_1)\xi_1 + f'(x_2)\xi_2 + f'(x_3)\xi_3 = 0, \text{ usw.}$$

Durch denselben Punkt geht dann aber auch die Polare v x_i in bezug auf irgend einen Kegelschnitt

$$(95)\qquad \lambda_1 f(x, x) + \lambda_2 g(x, x) + \lambda_3 h(x, x) = 0 \quad \text{(Nr. 27}$$

Also hat $J = 0$ genau dieselbe geometrische Bedeutung f irgend drei Kegelschnitte des durch f, g, h bestimmten Keg schnittnetzes. In der Tat, bilden wir für die Kegelschnit von den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$; $\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3''$ c Determinante der Ableitungen, so ist diese gleich dem Pr dukt aus J und der Determinante der neun Parameter. D Jacobische Determinante ist daher eine *Kombinante* d Netzes (95) (vgl. Nr. 359).

Fassen wir die drei Kegelschnitte als Hüllkurven ihr Tangenten auf, so bestimmen sie ein Kegelschnittgewebe

$$\mu_1 \varphi(u, u) + \mu_2 \chi(u, u) + \mu_3 \psi(u, u) = 0 \quad \text{(Nr. 27}$$

Die Jacobische Determinante dreier Kurven dieses Syster bestimmt durch ihr Verschwinden eine Kurve dritter Klas

$$(96)\qquad I \equiv \tfrac{1}{8} \begin{vmatrix} \varphi'(u_1) & \chi'(u_1) & \psi'(u_1) \\ \varphi'(u_2) & \chi'(u_2) & \psi'(u_2) \\ \varphi'(u_3) & \chi'(u_3) & \psi'(u_3) \end{vmatrix} = 0,$$

die Jacobische Kurve der drei Hüllkurven oder des Gewebes. Sie ist dual zu der *Hüllkurve der Geraden, deren Pole in bezug auf die Kegelschnitte des Gewebes in einer Geraden liegen.*

364. **Kubische Kovariante des Kegelschnittpaares.** Die Einführung der Jacobischen Determinante ist schon in der Theorie von zwei Kegelschnitten erforderlich. Denn ein Kegelschnittpaar $f(x, x)$, $g(x, x)$ bestimmt mit seiner quadratischen Kovariante $2k(x, x)$ ein Kegelschnittnetz, wenn auch besonderer Art; dieses hat eine kubische Kovariante, die eine neue simultane Kovariante von f, g ist. Die drei Kegelschnitte f, g, k haben aber, wie (41) und (42) zeigt, ein gemeinsames Polardreieck, das schon als kovariant zu charakterisieren war (Nr. 362).

Die Jacobische Kurve eines Netzes mit gemeinsamem Polardreieck besteht aus den drei Seiten desselben. Denn sind f, g, k Summen von je drei Quadraten, so sind ihre partiellen Ableitungen $f'(x_i)$, $g'(x_i)$, $k'(x_i)$ proportional zu x_i, also deren Determinante proportional zu $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, nämlich

$$\mathrm{J} = c x_1 x_2 x_3, \tag{97}$$

wo c ein nur von den Koeffizienten der Formen f, g, h abhängiger Faktor ist. Demnach bestimmt man analytisch das zu zwei Kegelschnitten $f = 0$, $g = 0$ gemeinsame Polardreieck auch als die Jacobische Kurve $\mathrm{J} = 0$ des besonderen Netzes, das die Kovariante $2k$ mit den Kegelschnitten bildet.

Wenn sich insbesondere die beiden Kegelschnitte doppelt berühren, so verschwindet die Jacobische Kovariante von $f, g, 2k$ identisch (Nr. 356), wie auch für drei Kegelschnitte f, g, h eines und desselben *Büschels.*

Nun können wir aber die Gleichungen der Dreiecksseiten direkt berechnen. Denn nach Nr. 344 und 362 können wir mit a_1, a_2, a_3 als den Wurzeln von $A - 3\mathrm{H}\lambda + 3\Theta\lambda^2 - B\lambda^3 = 0$ die gegebenen Kurvengleichungen auf die Formen bringen:

$$f(x, x) = a_1 x_1'^2 + a_2 x_2'^2 + a_3 x_3'^2 = 0,$$

$$g(x, x) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0, \quad \text{wo nun}$$

$$2k(x, x) : B \doteq a_1(a_2 + a_3) x_1'^2 + a_2(a_3 + a_1) x_2'^2 + a_3(a_1 + a_2) x_3'^2.$$

Ferner ist

$$\mathrm{J} = (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2) x_1' x_2' x_3'.$$

Aus den drei ersten Gleichungen können sofort $x_1'^2, x_2'^2, x_3'^2$ als Funktionen von $f, g, 2k$ berechnet werden, nämlich
$(a_i - a_j)(a_k - a_i)x_i'^2 = 2k(x, x) : B - a_i f(x, x) - a_j a_k g(x, x)$.
Das Produkt dieser drei Gleichheiten ergibt links das Quadrat der Jacobischen Determinante, rechts eine Funktion der drei Symbole f, g, k, deren Koeffizienten in den a_1, a_2, a_3 symmetrisch, also durch die Invarianten A, H, Θ, B (Nr. 344) rational darstellbar sind. Man erhält so *eine zwischen den Kovarianten bestehende Identität.*

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned} \mathsf{J}^2 = 8k^3 - 12k^2(\Theta f + \mathsf{H} g)& \\ + 6k\{B\mathsf{H}f^2 + A\Theta g^2 + (3\mathsf{H}\Theta - AB)fg\}& \\ - AB(Bf^3 + Ag^3)& \\ + fg\{3B(2A\Theta - 3\mathsf{H}^2)f + 3A(2B\mathsf{H} - 3\Theta^2)g\}&. \end{aligned}\right.$$

Aus den Kontravarianten

$$F = a_2 a_3 u_1^2 + a_3 a_1 u_2^2 + a_1 a_2 u_3^2, \quad G = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$
$$2H = (a_2 + a_3)u_1^2 + (a_3 + a_1)u_2^2 + (a_1 + a_2)u_3^2$$

geht der zur Determinante der Ableitungen proportionale Ausdruck hervor

$$(99)\qquad I = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)u_1 u_2 u_3.$$

Die Jacobische Kurve eines Gewebes mit gemeinsamem Polardreieck besteht daher aus den drei Ecken des Dreiecks. Zwischen diesen vier Kontravarianten besteht eine zur vorigen analoge Identität.

B. 1) Drei Kreise haben einen Jacobischen Kegelschnitt, der selbst ein Kreis und zwar der *Orthogonalkreis der drei Kreise* ist (Nr. 122). Die Gleichung des Orthogonalkreises gibt den Satz: *Für jeden Punkt des Orthogonalkreises ist die algebraische Summe der Produkte Null, die die Quadrate der Längen der von ihm ausgehenden Tangenten der drei Kreise mit den Flächen der Dreiecke bestimmen, die den Punkt zur Spitze und die Zentrallinie der beiden anderen Kreise bez. zur Gegenseite haben.*

2) Die im Text gegebene Methode, die x_i zu berechnen, kann von neuem zur Transformation zweier Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Polardreieck dienen (Nr. 362). So findet man die gleichzeitigen Normalformen der Gleichungen. Mit Benutzung der Kovariante m in Nr. 359, Gl. (70) erhält man die einfache Identität

$$\mathsf{J}^2 = \tfrac{1}{27}m^3 + m \cdot H(g, f) + T(g, f).$$

(Vgl. für die Bezeichnung Nr. 358.)

3) Transformation auf die Normalformen für

$$f \equiv 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2 = 0,$$
$$g \equiv 3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 4y = 0.$$

Man beginnt zweckmäßig mit der Berechnung der Koeffizienten der Tangentialgleichungen A_{11}, A_{22} usw.; sie sind -16, -19, -9; 21, 24, -14 für die erste und -4, -1, 18; -3, 3, -2 für die zweite Gleichung. Dann ergeben sich für die Invarianten die Werte $A = -54$, $3\mathsf{H} = -99$, $3\Theta = -54$, $B = -9$, und die Wurzeln der kubischen Gleichung $C(\lambda) = 0$ liefern $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Man berechnet sodann

$$2k = -9(23x^2 - 50xy + 44y^2 - 18x + 12y - 4)$$

und schreibt endlich

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 4y, \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 &= 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2\;, \\ 5x_1^2 + 8x_2^2 + 9x_3^2 &= \frac{2k}{B} = 23x^2 - 50xy + 44y^2 - 18x + 12y - 4; \end{aligned}$$

diese Gleichungen aber liefern durch die Verbindungen

$$f + 6g - \frac{2k}{B}, \quad \frac{2k}{B} - 2f - 3g, \quad 3f + 2g - \frac{2k}{B}$$

bez. die Substitutionen

$$x_1^2 = (3y + 1)^2, \quad x_2^2 = (2x - y)^2, \quad x_3^2 = -(x + y + 1)^2.$$

365. **Das vollständige Invariantensystem des Kegelschnittpaares** besteht nun aus den vier Invarianten A, B, H, Θ (Nr. 344), den vier Kovarianten f, g, k, J (Nr. 354 und 363) und den vier Kontravarianten F, G, H, I (Nr. 353 und 363) in dem Sinne, daß sich jede Invariante, Kovariante und Kontravariante des Paares als eine ganze Funktion dieser zwölf Formen mit numerischen Koeffizienten ausdrücken läßt.

Zu ihnen treten acht *gemischte* oder *Zwischenformen* (Nr. 352), die beide Reihen der Koordinaten enthalten und als Kovarianten des Systems der beiden Kegelschnitte f, g und der Geraden $u_x = 0$ angesehen werden können. So ist die Jacobische Determinante dieses Systems

$$(100) \qquad N = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}, \text{ wo } f_i = \tfrac{1}{2}f'(x_i),\ g_i = \tfrac{1}{2}g'(x_i),$$

die linke Seite der Gleichung für den Ort der Punkte, deren Polaren in beiden Kegelschnitten sich auf der Geraden schneiden. Für die Formen

(101) $f \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2, \quad g \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2$

ist

(102) $$\begin{cases} N \equiv u_1(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})x_2x_3 + u_2(a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33})x_3x_1 \\ \qquad + u_3(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})x_1x_2. \end{cases}$$

Die Gleichung $N = 0$ gestattet aber noch eine andere Deutung. Um sie zu gewinnen, beweisen wir zunächst, *daß sich die in bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels* $f(x,x) - \lambda g(x,x) = 0$ *genommenen Polaren eines beliebig aber fest gewählten Punktes* y *in einem zweiten festen Punkte schneiden.* Die Polare von y in bezug auf irgend einen Büschelkegelschnitt hat nämlich die Gleichung $f_1y_1 + f_2y_2 + f_3y_3 - \lambda(g_1y_1 + g_2y_2 + g_3y_3) = 0$, die bei festen Werten y_i und für beliebige Werte des Parameters λ Geraden darstellt, die sich in einem und demselben Punkte schneiden. Man erkennt, daß auch umgekehrt die in bezug auf alle Büschelkegelschnitte genommenen Polaren dieses Punktes x durch den Punkt y gehen; x und y nennt man *konjugiert* in bezug auf die Kurven des Büschels. — Man kann nun nach dem geometrischen Ort fragen, den die zu y konjugierten Punkte x beschreiben, falls y eine Gerade u durchläuft. Nach dem eben bewiesenen Satze kann man bei Beantwortung dieser Frage von zwei beliebigen Kurven des Büschels, etwa von f und g, ausgehen; es müssen dann die drei Gleichungen $u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = 0$, $f_1y_1 + f_2y_2 + f_3y_3 = 0$, $g_1y_1 + g_2y_2 + g_3y_3 = 0$ nebeneinander bestehen, aus denen durch Elimination von y_1, y_2, y_3 die Gleichung $N = 0$ hervorgeht. Man hat also den Satz: *Die in bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels genommenen Pole einer gegebenen Geraden* u *liegen auf dem Kegelschnitt* $N = 0$; *er ist zugleich Ort aller Punkte, die den Punkten der Geraden im Sinne des vorhin bewiesenen Satzes konjugiert sind. Für* u_i *als Koordinaten der unendlich fernen Geraden wird* N *zum geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kurven des Büschels.*

Allgemein möge N als *Polkegelschnitt der Geraden* u bezeichnet werden; man nennt ihn auch den *Neun- oder Elf-Punkte-Kegelschnitt der Geraden* u *in bezug auf das Büschel,* da man leicht neun oder eigentlich elf seiner Punkte angeben kann. *Drei* derselben sind die Doppelpunkte der drei im Bü-

schel enthaltenen Geradenpaare, also die Ecken des dem Viereck der Grundpunkte zugehörigen Diagonaldreiecks, des gemeinsamen Poldreiecks aller Büschelkurven. Die Koordinaten eines solchen Doppelpunktes erfüllen nämlich die Gleichungen $f_i - \lambda' g_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, wo λ' eine Wurzel der kubischen Gleichung $C(\lambda) = 0$ bedeutet; bei Einführung dieser Koordinaten in N werden daher die f_i den g_i proportional und N verschwindet. *Sechs* weitere Punkte von N sind die vierten harmonischen Punkte zu dem jeweiligen Schnittpunkt der Geraden u mit einer der sechs Geraden des Büschels und zu den zwei auf der betreffenden Geraden liegenden Grundpunkten des Büschels. Zum Beweis dieser Tatsache seien A, B, C, D die vier Grundpunkte des Büschels und E sei der Schnittpunkt der Geraden u mit der Geraden AD. Die Polare von E in bezug auf das durch A und D gehende Geradenpaar AB, DC, das sich in L schneiden möge, ist alsdann die Verbindungslinie von L mit dem vierten harmonischen Punkte E' zu E und zu dem Punktepaare A, D (Teil 1, S. 282). Durch E' geht aber auch die Polare von E in bezug auf das Geradenpaar AC, DB. Daher ist E' der Schnittpunkt aller Polaren des der Geraden u angehörigen Punktes E in bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels und somit nach dem über N ausgesprochenen Satze ein Punkt des Kegelschnittes N. Entsprechendes gilt von den zu E' analogen, auf AB, AC, BC, BD oder CD gelegenen Punkten. Auf der Kurve N liegen auch die Doppelpunkte der Involution, die nach Nr. 289 auf der Geraden u durch ihre Schnitte mit den Kurven des Büschels gebildet wird. Diese Doppelpunkte sind die Berührungspunkte derjenigen zwei Büschelkurven, die die Gerade u zur Tangente haben; sie sind die Pole von u in bezug auf diese zwei berührenden Kurven.[105])

Dual entsprechen den vorstehend erwähnten Sätzen über den Polkegelschnitt N die folgenden zwei Sätze:

Die Pole einer beliebig aber fest gewählten Geraden v in bezug auf die Kegelschnitte der durch $F(u, u) - \lambda G(u, u) = 0$ bestimmten Schar liegen auf einer zweiten Geraden w, und umgekehrt liegen die Pole von w auf der Geraden v. Beide

heißen konjugiert in bezug auf die Kurven der Schar. Der Kegelschnitt

$$(103)\quad \mathsf{N} \equiv \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}, \quad wo \quad F_i = \tfrac{1}{2}F'(u_i),\ G_i = \tfrac{1}{2}G'(u_i),\ (i = 1, 2, 3),$$

wird von denjenigen Geraden eingehüllt, die zu den durch den gegebenen Punkt x gehenden Geraden im Sinne des eben ausgesprochenen Satzes konjugiert sind. Ebenso hat die Kurve $\mathsf{N} = 0$ *die in bezug auf die Kegelschnitte der Schar genommenen Polaren des Punktes x zu Tangenten (Polarkegelschnitt von x).*[106])

Für die Formen (101) wird

$$(104)\quad \begin{cases} -\mathsf{N} \equiv a_{11}b_{11}x_1(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})u_2u_3 \\ \qquad + a_{22}b_{22}x_2(a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33})u_3u_1 \\ \qquad + a_{33}b_{33}x_3(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})u_1u_2. \end{cases}$$

Der Geraden u entsprechen ferner *zwei begleitende oder assoziierte Geraden* $B_1 = 0$ und $B_2 = 0$, von denen die erste die in bezug auf g genommene Polare des in bezug auf f genommenen Poles von u ist; $B_2 = 0$ ist die in bezug auf f genommene Polare des in bezug auf g genommenen Poles von u. Bei konstanten x_i und veränderlichen u_i ist $B_1 = 0$ der in bezug auf f genommene Pol der in bezug auf g genommenen Polare des Punktes x; entsprechendes gilt von $B_2 = 0$. Man kann auch sagen: die Gerade $B_1 = 0$ hat in bezug auf g denselben Pol wie $u_x = 0$ in bezug auf f.

Man erhält B_1, indem man die Determinante A von $f(x, x)$ auf der einen Seite mit g_1, g_2, g_3, auf der anstoßenden Seite mit u_1, u_2, u_3 rändert und als letztes Element 0 hinzufügt; entsprechendes gilt von B_2.

Für die Formen (101) ist

$$(105)\quad \begin{cases} B_1 \equiv a_{22}a_{33}b_{11}u_1x_1 + a_{33}a_{11}b_{22}u_2x_2 + a_{11}a_{22}b_{33}u_3x_3, \\ B_2 \equiv b_{22}b_{33}a_{11}u_1x_1 + b_{33}b_{11}a_{22}u_2x_2 + b_{11}b_{22}a_{33}u_3x_3. \end{cases}$$

Außer den Zwischenformen N, N, B_1, B_2 gibt es noch vier andere, die mit C_1, C_2, Γ_1, Γ_2 bezeichnet werden sollen. Die Formen C_1 und C_2 sind die Jacobischen oder Funktionaldeterminanten von B_1, f und u_x bez. von B_2, g und u_x.

Daher ist $C_1 = 0$ die Bedingung, daß die in bezug auf $f = 0$ genommene Polare eines Punktes x durch den Schnittpunkt der Geraden $B_1 = 0$ und $u_x = 0$ gehe; entsprechendes gilt von $C_2 = 0$. Für die Formen (101) wird

$$(106)\quad \begin{cases} C_1 \equiv a_{11}^2(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})u_2u_3x_1 + a_{22}^2(a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33})u_3u_1x_2 \\ \qquad + a_{33}^2(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})u_1u_2x_3, \\ C_2 \equiv b_{11}^2(a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})u_2u_3x_1 + b_{22}^2(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})u_3u_1x_2 \\ \qquad + b_{33}^2(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})u_1u_2x_3. \end{cases}$$

Den Formen C_1 und C_2 entsprechen dual Γ_1 und Γ_2; sie hängen mit F und G ebenso zusammen wie C_1 und C_2 mit f und g, nur sind natürlich Differentiationen nach x_i durch solche nach u_i zu ersetzen. Für die Formen (101) wird

$$(107)\quad \begin{cases} \Gamma_1 \equiv a_{22}a_{33}b_{11}(a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})u_1x_2x_3 \\ \qquad + a_{33}a_{11}b_{22}(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})u_2x_3x_1 \\ \qquad + a_{11}a_{22}b_{33}(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})u_3x_1x_2, \\ \Gamma_2 \equiv a_{11}b_{22}b_{33}(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})u_1x_2x_3 \\ \qquad + a_{22}b_{33}b_{11}(a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33})u_2x_3x_1 \\ \qquad + a_{33}b_{11}b_{22}(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})u_3x_1x_2. \end{cases}$$

Die vier Invarianten A, B, H, Θ, die vier Kovarianten f, g, k, J, die vier Kontravarianten F, G, H, I und die acht Zwischenformen $N, \mathsf{N}, B_1, B_2, C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ stellen im Sinne der Invariantentheorie *das vollständige Formensystem zweier ternären quadratischen Formen*[107]) dar.

B. Der Neunpunkte-Kegelschnitt der Geraden $a_x = 0$ in bezug auf das durch die Geradenpaare $x_1^2 - x_2^2 = 0$, $x_1^2 - x_3^2 = 0$ bestimmte Kegelschnittbüschel $x_1^2 - x_2^2 - \lambda(x_1^2 - x_3^2) = 0$ ist

$$N \equiv a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0,$$

also ein dem Fundamentaldreieck umgeschriebener Kegelschnitt.[105]) Er ist auch der Ort der Punkte, deren Polaren in bezug auf die Kegelschnitte des Büschels mit der Geraden a_i zusammenfallen. Die beiden Geradenpaare bilden ein Viereck, dessen Diagonaldreieck das Koordinatendreieck ist. Durch die Doppelpunkte der Involution, die auf der Geraden a_i durch die Kurven des Büschels erzeugt wird, gehen je vier Kegelschnitte, die einem der vier durch die Ecken des Vierecks bestimmten Dreiecke eingeschrieben sind, und diese Kurven berühren sämtlich den Neunpunkte-Kegelschnitt N. Ist nämlich $b_x = 0$ die zweite Schnittsehne, die einer solchen Kurve

neben $a_x = 0$ mit dem Kegelschnitt N gemeinsam ist, so hat die Kurve die Gleichung

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 + a_x b_x = 0,$$

und die Bedingung, daß $b_x = 0$ den Kegelschnitt N berührt, ist

$$(a_1 b_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 b_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 b_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Andrerseits hat ein dem Dreiseit

$$x_2 + x_3 = 0, \quad x_3 + x_1 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0$$

eingeschriebener Kegelschnitt eine Gleichung von der Form

$$l^2(x_2+x_3)^2 + m^2(x_3+x_1)^2 + n^2(x_1+x_2)^2 - 2mn(x_3+x_1)(x_1+x_2)$$
$$- 2nl(x_1+x_2)(x_2+x_3) - 2lm(x_2+x_3)(x_3+x_1) = 0,$$

die bei Erfüllung der Bedingungen $a_1 b_1 = (m-n)^2$, $a_2 b_2 = (n-l)^2$, $a_3 b_3 = (l-m)^2$ und dreier weiterer Bedingungen mit der vorigen Gleichung identisch ist. Offenbar ist alsdann in der Tat

$$(a_1 b_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 b_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 b_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Entsprechendes gilt für die anderen Dreiecke, *so daß der Neunpunkte-Kegelschnitt alle die sechzehn Kegelschnitte berührt, die den vier Dreiecken des Vierecks eingeschrieben sind.*

Ist die Gerade a_z unendlich fern und sind die Gegenseitenpaare des Vierecks rechtwinklig, so sind die Doppelpunkte der Involution in der Geraden die imaginären Kreispunkte; alle Kegelschnitte der vorigen Betrachtung sind Kreise, die im Haupttext erwähnten harmonischen Punkte werden zu den Seitenmitten, und man hat das *System des Feuerbachschen Kreises.*

366. **Die Jacobische oder Hessesche Kurve eines Kegelschnittnetzes.** Ein Kegelschnittnetz ist durch die Gleichung

$$(108) \qquad \varkappa f(x,x) + \lambda g(x,x) + \mu h(x,x) = 0$$

gegeben, wobei durch $f(x,x) = 0$, $g(x,x) = 0$, $h(x,x) = 0$ drei *beliebige* Kegelschnitte dargestellt werden, die nur nicht einem und demselben Büschel angehören dürfen. Wie schon in Nr. 363 gezeigt wurde, ist die Jacobische Kurve dritter Ordnung

$$(109) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 0, \quad f_i = \tfrac{1}{2} f'(x_i), \text{ usw.}$$

der Ort aller Punkte A, deren Polaren in bezug auf irgend drei Kurven des Netzes (108) sich in einem Punkte (er möge B heißen) schneiden, der gleichfalls der Kurve (109) angehört. Durch diesen Punkt B gehen die in bezug auf jeden Kegel-

schnitt des Netzes genommenen Polaren von A; man bezeichnet A und B als *konjugierte Pole* in bezug auf die Kurven des Netzes. Übrigens kann *jeder* Punkt der Kurve (109) als ein Punkt angesehen werden, dessen Polaren in bezug auf die Kurven des Netzes sich in einem Punkte schneiden. Es folgt dies daraus, daß man beim Bestehen der Gleichung (109) stets Werte $y_1 : y_2 : y_3$ finden kann, die die drei Gleichungen

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0, \quad g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3 = 0,$$
$$h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3 = 0$$

erfüllen.

Gehen die Polaren von A durch B, so wird die Gerade AB durch alle Kegelschnitte des Netzes (108) harmonisch geteilt, die also auf ihr eine Involution mit den Doppelpunkten A, B bestimmen. Berührt eine Kurve des Netzes die Gerade AB, so geschieht dies in A oder in B; zerfällt eine in zwei Geraden, so liegt deren Schnitt in A oder B, so lange nicht AB selbst eine der beiden Geraden ist. *Die Gleichung* (109) *stellt in der Tat den Ort der Doppelpunkte der in dem Netz enthaltenen Geradenpaare dar, denn für einen solchen Punkt müssen die Ableitungen* $\varkappa f_1 + \lambda g_1 + \mu h_1$, $\varkappa f_2 + \lambda g_2 + \mu h_2$, $\varkappa f_3 + \lambda g_3 + \mu h_3$ *gleichzeitig verschwinden.* Die Kovariante (109) des Netzes (108) entspricht so der binären Kovariante der Doppelpunkte einer quadratischen Involution (Nr. 331).

In einem Netz mit gemeinsamem Poldreieck sind die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte die Strahlen durch die Ecken desselben (Nr. 301).

Jede Verbindungsgerade zugeordneter Punkte A, B gehört einem Geradenpaare des Netzes an, nämlich demjenigen, dessen Doppelpunkt der dritte Schnittpunkt C der Geraden AB mit der Jacobischen Kurve ist. Denn A, B, C sind Doppelpunkte von Geradenpaaren, A und B sind Berührungspunkte der Geraden mit allen sie berührenden Netzkurven, also muß das Geradenpaar vom Doppelpunkt C die Gerade AB, um sie in A oder B zu berühren, als Teil enthalten, während die Paare von den Doppelpunkten A bez. B sie nicht enthalten.

Die Jacobische Kurve dritter Ordnung kann in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen. Dies tritt erstens ein, wenn

alle Kegelschnitte des Netzes durch zwei feste Punkte gehe Denn die gemeinsame Sehne sondert sich als ein Teil ab, (die Paare ihrer Involution mit den festen Punkten als Doppe punkten konjugierte Pole sind. Auch der übrig bleiben(Jacobische Kegelschnitt geht durch die festen Punkte, der da jeder derselben in bezug auf das Netz sich selbst konj giert ist, so darf eine durch ihn gehende Gerade mit d gesamten Jacobischen Kurve nur noch *einen* anderen Schnit punkt haben (Nr. 364, 1).

Die Jacobische Kurve dritter Ordnung zerfällt ferne wenn *das Netz eine Doppelgerade* $q_x^2 = 0$ enthält, indem si offenbar q_x als ein Faktor der Determinante (109) absonde Wir können also vier Kegelschnitte beschreiben, die ein Kegelschnitt $f = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der Gerad $q_x = 0$ und überdies einen Kegelschnitt $g = 0$ einfach b rühren. Die Schnitte des letzten mit dem Jacobischen Or sind die Berührungspunkte. Ist noch eine zweite Doppelgera $r_x^2 = 0$ vorhanden, so zerfällt endlich auch der Kegelschni d. h. die Jacobische Kurve besteht aus drei Geraden, nämlic aus $q_x = 0$, $r_x = 0$ und aus der in bezug auf irgend ei Kurve des Netzes genommenen Polare des Schnittpunktes d beiden Doppelgeraden. Die Jacobische Kurve eines Netz von Kegelschnitten mit gemeinsamem Polardreieck beste aus den Seiten des Dreiecks, wie schon in Nr. 364 gezei wurde.

Dual entsprechende Eigenschaften hat natürlich die z einem *Kegelschnittgewebe* $\varkappa\varphi(u, u) + \lambda\chi(u, u) + \mu\psi(u, u) =$ *gehörige Jacobische Kurve dritter Klasse.*

B. 1) Die Gleichung der für die Kegelschnitte

$$f \equiv \sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k = 0, \quad g \equiv \sum_{i,k} b_{ik}x_ix_k = 0, \quad h \equiv \sum_{i,k} c_{ik}x_ix_k = 0$$

gebildeten Jacobischen Kurve lautet:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}b_{21}c_{31})x_1^3 + (a_{12}b_{22}b_{32})x_2^3 + (a_{13}b_{23}c_{33})x_3^3 \\
&+ \{(a_{12}b_{22}c_{33}) + (a_{13}b_{22}c_{32})\}x_2^2x_3 + \{(a_{12}b_{23}c_{33}) + (a_{13}b_{22}c_{33})\}x_2x \\
&+ \{(a_{11}b_{23}c_{33}) + (a_{13}b_{21}c_{33})\}x_3^2x_1 + \{(a_{11}b_{21}c_{33}) + (a_{11}b_{23}c_{31})\}x_3x \\
&+ \{(a_{11}b_{21}c_{32}) + (a_{11}b_{22}c_{31})\}x_1^2x_2 + \{(a_{11}b_{22}c_{32}) + (a_{12}b_{22}c_{31})\}x_1x \\
&+ \{(a_{11}b_{22}c_{33}) + 2(a_{12}b_{23}c_{31})\}x_1x_2x_3 = 0;
\end{aligned}$$

hier bezeichnen $(a_{1i} b_{2k} c_{3j})$ usw. Determinanten, die man aus diesen Elementen der Hauptdiagonale leicht bildet (vgl. Nr. 8).

2) Bestehen die Kurven f, g, h, die ein Kegelschnittnetz bestimmen, aus einem Kegelschnitt $f = 0$, einem Kreis und der doppelt zählenden unendlich fernen Geraden, so geht die Jacobische Kurve durch die *Fußpunkte der Normalen, die aus dem Mittelpunkt des Kreises an den Kegelschnitt f gezogen werden können.*[108])

3) Die Jacobische Kurve des Gewebes

$$\varkappa\varphi(u, u) + \lambda u_y^2 + \mu\omega(u, u) = 0,$$

wo $\varphi(u, u) = 0$ einen beliebigen Kegelschnitt, $u_y = 0$ einen Punkt y_i und $\omega(u, u) = 0$ das imaginäre Kreispunktepaar (Nr. 319) darstellt, zerfällt in den Punkt y_i und eine *Parabel.* Diese hat zu Tangenten die in bezug auf die Kurve $\varphi(u, u) = 0$ genommene Polare des Punktes y_i, ferner die Achsen dieser Kurve und die Normalen, die in den Berührungspunkten der von y_i an $\varphi(u, u) = 0$ gelegten Tangenten gezogen sind. Die genannte Parabel ist der Polarkegelschnitt des Punktes y_i in bezug auf die Schar konfokaler Kegelschnitte $\varkappa\varphi(u, u) + \mu\omega(u, u) = 0$ (Nr. 286, 2 und 365).

4) Man soll einen Kegelschnitt durch vier feste Punkte so bestimmen, daß er einen gegebenen Kegelschnitt $h = 0$ berührt.

Wir denken die vier festen Punkte als Schnittpunkte zweier Kegelschnitte $f = 0$, $g = 0$ gegeben und erkennen aus der Bedingung für die Berührung zweier Kegelschnitte (Nr. 345), daß die Aufgabe sechs Lösungen hat. Die Jacobische Kurve der drei Kegelschnitte bestimmt mit $h = 0$ die sechs Punkte, in denen diese Kurve von den sechs Kegelschnitten berührt wird, die der Aufgabe genügen; denn die Polare des Berührungspunktes in bezug auf $h = 0$ geht, weil sie auch die Polare in bezug auf einen der Kegelschnitte $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$ ist, durch den Schnittpunkt der Polaren in bezug auf $f = 0$, $g = 0$.

367. **Cayleysche Kurve des Netzes.** Zu einem gegebenen Netze gibt es nach Nr. 349 ein konjugiertes Kegelschnittgewebe von der Art, daß jeder Kegelschnitt des ersten Polardreiecken des letzten umgeschrieben ist. Die beiden Systeme sind kontravariant, da sie dual und projektiv verbunden sind. Bedeuten $\varphi(u, u) = 0$, $\chi(u, u) = 0$, $\psi(u, u) = 0$ irgend drei das Gewebe bestimmende Kegelschnitte, so ist die zugehörige Jacobische Kurve dritter Klasse durch das Verschwinden der Determinante ihrer Ableitungen gegeben (Nr. 363). Der Jacobischen Kurve dritter Ordnung eines *Netzes* dual entsprechend ist *diese Kurve dritter Klasse die Hüllkurve der doppelt zu zählen-*

den Träger der dem Gewebe angehörigen Punktepaare. das gegebene Netz $\varkappa f(x, x) + \lambda g(x, x) + \mu h(x, x) = 0$ ist eine kontravariante Kurve und zwar wird sie als *die Cay sche oder Hermitesche Kurve* $\mathbf{C} = 0$ *des Netzes* bezeichnet. Die Cayleysche Kurve des Netzes ist daher zugleich die Jac sche Kurve des dem Netz konjugierten Gewebes.*)

Die *Punktepaare* des Gewebes sind als Kegelschnitte, denen des Netzes harmonisch eingeschrieben sind, Paare konjugierten Polen des Netzes, d. h. sie liegen auf der J bischen Kurve des Netzes (Nr. 366), die zugleich Cayleys Kurve des konjugierten Gewebes ist. *Die Cayleysche K des Netzes ist die Hüllkurve der Verbindungsgeraden der z ordneten Punkte auf der Jacobischen Kurve.* Also ist sie jektiv definiert als die Hüllkurve der Geraden, die die Ke schnitte des Netzes in Punktepaaren einer Involution schnei Die Doppelpunkte der Involution sind die konjugierten auf der Jacobischen Kurve. Ihre Gleichung ergibt sich h aus unmittelbar, indem man aus jeder der drei Gleichun $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$, $h(x, x) = 0$ mit Hilfe von $u_x =$ eine der Veränderlichen z. B. x_3 eliminiert und nach Nr. und 331 die Determinante der Koeffizienten von x_1^2, $x_1 x_2$, gleich Null setzt, um die involutorische Lage der drei Pun paare auszudrücken. Die Entwickelung lautet nach Divis durch u_3^3:

$$
(110)\left\{\begin{aligned}
2\mathbf{C} \equiv\ & (a_{22}b_{33}c_{23})u_1^3 + (a_{33}b_{11}c_{31})u_2^3 + (a_{11}b_{22}c_{12})u_3^3 \\
& + \{(a_{11}b_{22}c_{33}) - 4(a_{23}b_{31}c_{12})\}u_1u_2u_3 \\
& + \{2(a_{33}b_{12}c_{23}) - (a_{22}b_{33}c_{31})\}u_1^2u_2 \\
& + \{2(a_{11}b_{23}c_{31}) - (a_{22}b_{33}c_{12})\}u_1^2u_3 \\
& + \{2(a_{33}b_{31}c_{12}) - (a_{33}b_{11}c_{23})\}u_2^2u_1 \\
& + \{2(a_{11}b_{23}c_{31}) - (a_{33}b_{11}c_{12})\}u_2^2u_3 \\
& + \{2(a_{22}b_{31}c_{12}) - (a_{11}b_{22}c_{23})\}u_3^2u_1 \\
& + \{2(a_{11}b_{12}c_{23}) - (a_{11}b_{22}c_{31})\}u_3^2u_2 = 0.
\end{aligned}\right.
$$

*) Man hat diese Kontravariante $\mathbf{C}$ des Netzes und die Jacobis Hüllkurve der drei Kegelschnitte f, g, h, denen die Tangentialfor F, G, H zugehören wohl zu unterscheiden; die φ, χ, ψ sind *nicht* Tangentialformen von f, g, h.

Wie die Punktepaare eines Gewebes zugeordnete Punkte der Jacobischen Kurve des konjugierten Netzes sind, wird dual die Cayleysche Kurve des Netzes oder Jacobische Kurve des konjugierten Gewebes von den Geradenpaaren des Netzes umhüllt. Ihre Gleichung entsteht somit aus der Forderung der Identität

$$\varkappa f(x, x) + \lambda g(x, x) + \mu h(x, x) \equiv u_x v_x$$

oder aus den sechs Beziehungen

$$\varkappa a_{ii} + \lambda b_{ii} + \mu c_{ii} = u_i v_i \quad .$$
$$2(\varkappa a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}) = u_i v_k + u_k v_i$$

durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ, v_1, v_2, v_3 in Gestalt der Determinante

$$(111) \qquad 2\mathbf{C} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & u_1 & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & 0 & u_2 & 0 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & 0 & 0 & u_3 \\ 2a_{23} & 2b_{23} & 2c_{23} & 0 & u_3 & u_2 \\ 2a_{31} & 2b_{31} & 2c_{31} & u_3 & 0 & u_1 \\ 2a_{12} & 2b_{12} & 2c_{12} & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Satz, daß die Cayleysche Kurve eines Netzes von allen Geraden umhüllt wird, die die Kegelschnitte des Netzes in Punktepaaren einer Involution schneiden, gestattet, die Gleichung dieser Kurve in einer Art abzuleiten, die häufig zweckmäßiger ist als die Ausrechnung der Determinante (111). Einer Geraden $u_x = 0$ entspricht nämlich nach Nr. 365 als Ort ihrer Pole in bezug auf das in dem Netz (108) enthaltene Büschel $\varkappa f(x, x) + \lambda g(x, x) = 0$ der Polkegelschnitt $N_{f,g} \equiv \Sigma \pm (f_1 g_2 u_3) = 0$, und dieser trifft nach Nr. 365 die Gerade $u_x = 0$ in den Doppelpunkten D_1, D_2 der Involution, die auf $u_x = 0$ von den Kurven des Büschels ausgeschnitten wird. Bildet man nun nach S. 232 in Nr. 355 die Bedingung, daß die Gerade $u_x = 0$ die Kegelschnitte $N_{f,g} = 0$ und $h(x, x) = 0$ in zwei harmonischen Punktepaaren trifft, so hat man hiermit die Gleichung der Cayleyschen Kurve in Linienkoordinaten u_i, denn das auf der Geraden gelegene Punktepaar D_1, D_2 liegt alsdann harmonisch zu den Schnittpunktepaaren der Geraden und der Kegelschnitte f, g, h, d. h. die Gerade trifft

die Kegelschnitte des Netzes in Punktepaaren einer Involution, ist also Tangente der Cayleyschen Kurve.[110])

Die beiden Geraden eines Geradenpaares des Netzes sind als Tangenten der Cayleyschen Kurve des Netzes in demselben Sinne einander zugeordnet wie die Punkte auf der Jacobischen Kurve. Ersetzt man in (111) u_i durch x_i, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} durch die Koeffizienten α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} der Kurven $\varphi(u, u) = 0$, $\chi(u, u) = 0$, $\psi(u, u) = 0$ des konjugierten Gewebes

$$(112) \qquad \varkappa'\varphi(u, u) + \lambda'\chi(u, u) + \mu'\psi(u, u) = 0,$$

so erhält man den Ort der Punkte, von denen an die Kurven dieses Gewebes Tangentenpaare einer Involution gehen, d. h. die Cayleysche Kurve dritter Ordnung $2\Gamma' = 0$ des Gewebes (112), die zugleich die Jacobische des ursprünglichen Netzes (108) ist.

Bei Bildung der Gleichung in Linienkoordinaten für das Netz (108) treten nur die früheren Kontravarianten der Paare g, h; h, f; f, g auf, denn diese Gleichung lautet

$$(113) \quad \varkappa^2 F + \lambda^2 G + \mu^2 H + 2\lambda\mu H_{23} + 2\mu\varkappa H_{31} + 2\varkappa\lambda H_{12} = 0,$$

und hier sind F, G, H die Tangentialformen von f, g, h, während H_{23}, H_{31}, H_{12} die linken Seiten der Gleichungen der zu g und h, zu h und f, bez. zu f und g gehörigen *harmonischen Kurven zweiter Klasse* (Nr. 355) bedeuten, so daß z. B. $2H_{12}$ durch (37) in Nr. 353 definiert ist.

Ersetzt man in (111) die u_i durch x_i, ferner a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} durch die Koeffizienten A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} von F, G, H (also nicht durch die Koeffizienten von φ, χ, ψ aus dem konjugierten Gewebe (112)), so stellt die so erhaltene Determinante 2Γ, gleich Null gesetzt, die Cayleysche Kurve dritter Ordnung des Gewebes

$$(114) \qquad \varkappa F(u, u) + \lambda G(u, u) + \mu H(u, u) = 0$$

dar. Es seien nun k_{23}, k_{31}, k_{12} die linken Seiten der Gleichungen der zu G und H, zu H und F, bez. zu F und G gehörigen *harmonischen Kurven zweiter Ordnung* (Nr. 356), so daß z. B. $2k_{12}$ durch (39) in Nr. 354 definiert ist. Alsdann erhält man zwischen Γ, k_{23}, k_{31}, k_{12}, f, g, h die Beziehung

$$(115)\left\{\begin{aligned}\Gamma^2 &= 4ABCfgh \\ &+ 8k_{23}k_{31}k_{12} - 4Afk_{23}^2 - 4Bgk_{31}^2 - 4Chk_{12}^2,\end{aligned}\right.$$

während $\mathfrak{C}$, H_{23}, H_{31}, H_{12}, F, G, H durch

$$(116)\quad \mathfrak{C}^2 = 4FGH + 8H_{23}H_{31}H_{12} - 4FH_{23}^2 - 4GH_{31}^2 - 4HH_{12}^2$$

verbunden sind.

B. 1) Man überzeuge sich, daß das durch die Kurven zweiter Ordnung

$$f \equiv a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0, \quad g \equiv b_1x_1^2 + 2b_{23}x_2x_3 = 0,$$
$$h \equiv c_2x_2^2 + 2c_{31}x_3x_1 = 0$$

bestimmte Netz zu dem durch die Kurven zweiter Klasse $\varphi \equiv u_1u_2 = 0$,

$$\chi \equiv a_3c_{31}u_2^2 - a_2c_{31}u_3^2 - a_3c_2u_3u_1 = 0,$$
$$\psi \equiv a_3b_{23}u_1^2 - a_1b_{23}u_3^2 - a_3b_1u_2u_3 = 0$$

bestimmten Gewebe konjugiert ist, so daß die Kurven des Netzes denen des Gewebes harmonisch umgeschrieben, die Kurven des Gewebes den Netzkurven harmonisch eingeschrieben sind.

2) Die Cayleysche Kurve des einen Doppelpunkt α_i enthaltenden Gewebes

$$\varkappa(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3)^2 + \lambda\chi(u, u) + \mu\psi(u, u) = 0$$

ist eine Kurve dritter Ordnung, die den Punkt α_i zum Doppelpunkt hat.[111])

368. **Invarianten dreier Kegelschnitte.** Um *Invarianten* der drei Kegelschnitte f, g, h zu finden, bilden wir wiederum die Diskriminante ihres Netzes $\varkappa f + \lambda g + \mu h = 0$. Ihre Entwickelung ist zu schreiben

$$(117)\left\{\begin{aligned}&\varkappa^2A + \lambda^2B + \mu^2C + 3\varkappa^2\lambda\Theta_{112} + 3\varkappa\lambda^2\Theta_{122} + 3\lambda^2\mu\Theta_{223} \\ &\quad + 3\lambda\mu^2\Theta_{233} + 3\mu^2\varkappa\Theta_{331} + 3\mu\varkappa^2\Theta_{311} + 6\varkappa\lambda\mu\Theta_{123},\end{aligned}\right.$$

wo die Koeffizienten $3\Theta_{iik}$ die früheren Invarianten der drei Paare von Kegelschnitten sind. Dagegen entsteht dadurch, daß man in der Diskriminante A jedes Glied $a_{11}a_{22}a_{33}$, usw. durch eine Summe wie

$$a_{11}b_{22}c_{33} + a_{11}c_{22}b_{33} + b_{11}c_{22}a_{33} + b_{11}a_{22}c_{33}$$
$$+ c_{11}a_{22}b_{33} + c_{11}b_{22}a_{33}, \text{ usw.}$$

ersetzt, die neue *Simultaninvariante* $6\Theta_{123}$ des Kurventripels, die in (117) den Faktor von $\varkappa\lambda\mu$ bildet.

Bilden wir ebenso die Diskriminante des durch dieselben drei Kegelschnitte bestimmten Gewebes

$$\varkappa'F(u, u) + \lambda'G(u, u) + \mu'H(u, u) = 0,$$

so ist der $6\Theta_{123}$ entsprechende Koeffizient des Gliedes mit $\varkappa'\lambda'\mu'$ *eine Invariante* $6\Theta'_{123}$ *vom zweiten Grade in den Koeffizienten von* f, g, h, die nicht in Funktion der vorangehenden Invarianten ausgedrückt werden kann.

Unter den aus den bisherigen zusammengesetzten Invarianten befindet sich insbesondere eine, die zugleich eine Invariante der Jacobischen Kovariante ist. Man erhält sie nach dem Prinzip, daß aus einer Kovariante und einer Kontravariante von einerlei Grad eine Invariante entsteht, wenn man in die eine Differentialsymbole einsetzt und mit ihr an der andern operiert. (Vgl. Nr. 139 der „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen" von *G. Salmon*, deutsch bearb. von *W. Fiedler*, 2. Aufl., Leipzig 1877.) So entsteht aus der Jacobischen Kovariante und der Kontravariante von Nr. 367 eine Invariante T, deren Ausdruck lautet

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} T = {} & (a_{11}b_{22}c_{33})^2 \\ & + 4(a_{11}b_{22}c_{23})(a_{11}b_{33}c_{23}) + 4(a_{22}b_{33}c_{13})(a_{22}b_{11}c_{13}) \\ & + 4(a_{33}b_{11}c_{12})(a_{33}b_{22}c_{12}) + 8(a_{11}b_{23}c_{13})(a_{22}b_{23}c_{13}) \\ & + 8(a_{11}b_{23}c_{12})(a_{33}b_{23}c_{12}) + 8(a_{33}b_{13}c_{12})(a_{22}b_{13}c_{12}) \\ & - 8(a_{11}b_{13}c_{12})(a_{22}b_{33}c_{23}) - 8(a_{22}b_{12}c_{23})(a_{33}b_{11}c_{13}) \\ & - 8(a_{33}b_{23}c_{13})(a_{11}b_{22}c_{12}) + 4(a_{11}b_{22}c_{33})(a_{23}b_{13}c_{12}) \\ & - 8(a_{23}b_{13}c_{12})^2, \end{aligned}\right.$$

wo die Faktoren der Glieder dreireihige Determinanten bezeichnen.

Man kann aber diese Invariante T durch die vorher erwähnte Invariante Θ'_{123} vom gleichen Grade in den Koeffizienten und durch die früheren Invarianten ausdrücken, wie wir in den Beispielen zeigen wollen. Zunächst bilden wir noch diejenige Invariante des Kegelschnittnetzes bez. Gewebes, deren Verschwinden ausdrückt, daß sich unter den Kegelschnitten des Systems doppelt zählende Geraden bez. Punkte befinden. Diese Invariante M erhalten wir, indem wir die Bedingung ausdrücken, daß $\varkappa f + \lambda g + \mu h$ ein vollständiges Quadrat wird, oder also, daß seine in den Parametern quadratische Reziprokalform

$$(119)\quad \varkappa^2 F + \lambda^2 G + \mu^2 H + 2\lambda\mu H_{23} + 2\mu\varkappa H_{31} + 2\varkappa\lambda H_{12}$$

identisch verschwinde (Teil 1, S. 307). Bezeichnen wir die Koeffizienten von $u_i u_k$ in den Kontravarianten H_{23}, H_{31}, H_{12} mit $\mathfrak{A}_{ik}$, $\mathfrak{B}_{ik}$ bez. $\mathfrak{C}_{ik}$, so ist das Ergebnis der Elimination der sechs Größen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, $\lambda\mu$, $\mu\varkappa$, $\varkappa\lambda$ zwischen den durch das Nullsetzen der Koeffizienten der Reziprokalform entstehenden sechs Gleichungen das folgende:

$$(120) \qquad \mathsf{M} = -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{31} & A_{12} \\ B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{23} & B_{31} & B_{12} \\ C_{11} & C_{22} & C_{33} & C_{23} & C_{31} & C_{12} \\ \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{22} & \mathfrak{A}_{33} & \mathfrak{A}_{23} & \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{B}_{11} & \mathfrak{B}_{22} & \mathfrak{B}_{33} & \mathfrak{B}_{23} & \mathfrak{B}_{31} & \mathfrak{B}_{12} \\ \mathfrak{C}_{11} & \mathfrak{C}_{22} & \mathfrak{C}_{33} & \mathfrak{C}_{23} & \mathfrak{C}_{31} & \mathfrak{C}_{12} \end{vmatrix}.$$

Demnach charakterisiert die Bedingung $\mathsf{M} = 0$ ein Netz von *besonderer* Art.

Die Determinante ist vom vierten Grade in den Koeffizienten jedes der drei Kegelschnitte, z. B. des ersten, da die a_{ik} im zweiten Grade in der ersten Zeile und linear in der fünften und sechsten erscheinen. Es folgt daraus, daß in einem linaren Kegelschnittsystem dritter Stufe

$$(121) \qquad e(x, x) + \varkappa f(x, x) + \lambda g(x, x) + \mu h(x, x) = 0$$

vier Doppelgeraden auftreten (Nr. 347, 3); denn die Invariante M der Kegelschnitte

$$e(x, x) + \varkappa f(x, x) = 0, \quad g(x, x) = 0, \quad h(x, x) = 0$$

liefert zur Bestimmung von $\varkappa$ eine biquadratische Gleichung.

B. 1) Für die Kegelschnitte

$$f \equiv a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots = 0,$$
$$g \equiv a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0, \quad h \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

die ein Netz bestimmen, bilden wir die Bedingung, unter der sie einen Punkt gemeinsam haben oder ihre Resultante. Aus den beiden letzten Gleichungen hat man

$$x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 = (a_2 - a_3) : (a_3 - a_1) : (a_1 - a_2),$$

wofür $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ gesetzt werden möge; die Einführung dieser Werte in die erste Gleichung und die Beseitigung der Wurzeln liefert

$$\{a_{11}^2\alpha_1^2 + \cdots - 2a_{22}a_{33}\alpha_2\alpha_3 - \cdots + 4(A_{11}\alpha_2\alpha_3 + \cdot\cdot)\}^2$$
$$= 64\alpha_1\alpha_2\alpha_3(A_{23}a_{12}a_{13}\alpha_1 + A_{13}a_{12}a_{23}\alpha_2 + A_{12}a_{13}a_{23}\alpha_3).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist das Quadrat von T. Indem wir die Differenzen der a_i für die α_i einsetzen, können wir T selbst ausdrücken, nämlich in der Form

$$\{a_1(a_{22}+a_{33})+a_2(a_{33}+a_{11})+a_3(a_{11}+a_{22})\}^2$$
$$-4(a_{11}+\cdot\cdot)(a_{11}a_2a_3+\cdot\cdot)-4(A_{11}a_1^2+\cdot\cdot)$$
$$-4(A_{11}+\cdot\cdot)(a_2a_3+\cdot\cdot)+8\{A_{11}a_1(a_2+a_3)+\cdot\cdot\},$$

in der alle Gliedergruppen Fundamentalinvarianten des Systems sind bis auf $A_{11}a_1^2+A_{22}a_2^2+A_{33}a_3^2$, das gleich $9\,\Theta_{233}\Theta_{211}-6\,\Theta'$ ist, also ausdrückbar durch die Invariante des Textes aus der Diskriminante des Gewebes. Man hat also[112])

$$\tfrac{1}{36}T=\Theta_{123}^2-(\Theta_{122}\Theta_{133}+\Theta_{211}\Theta_{233}+\Theta_{311}\Theta_{322})+2\,\Theta'_{123}.$$

2) In Viererkoordinaten (Nr. 304) lassen sich die drei Kegelschnitte des Netzes in der Normalform ausdrücken, also z. B. durch

$$f\equiv a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2=0,$$
$$g\equiv b_1x_1^2+\cdots=0,\quad h\equiv c_1x_1^2+\cdots=0,$$

wobei
$$x_1+x_2+x_3+x_4\equiv 0,$$

und zwar auf unendlich viele Arten. Denn jede der Gleichungen $f=0$, $g=0$, $h=0$ enthält drei Konstanten explizit und jede der linearen Funktionen x_i zwei Konstanten implizit, so daß siebzehn Konstanten zur Verfügung stehen, während f, g, h zusammen nur fünfzehn unabhängige Konstanten enthalten.

Wir suchen nach diesen Voraussetzungen die Bedingung auf, unter der die drei Kegelschnitte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Indem man die Gleichungen $f=0$, $g=0$, $h=0$ nach $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ auflöst und die vier Determinanten einführt

$$A_1=(a_2b_3c_4),\quad A_2=(a_4b_3c_1),\quad A_3=(a_4b_1c_2),\quad A_4=(a_2b_1c_3),$$

findet man $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ proportional zu A_1, A_2, A_3, A_4 und erhält durch Substitution in $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ die fragliche Bedingung in der Form

$$\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}+\sqrt{A_3}+\sqrt{A_4}=0 \qquad \text{oder}$$
$$(A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2-2A_2A_3-2A_3A_1-2A_1A_2-2A_1A_4$$
$$-2A_2A_4-2A_3A_4)^2=64A_1A_2A_3A_4.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist wieder das Quadrat der Invariante T, die rechte Seite ist $64\,\mathsf{M}$.

369. Wenn wir die Diskriminante von

$$\varkappa f+\lambda g+\mu h=0$$

als kubische Form der Veränderlichen $\varkappa, \lambda, \mu$ betrachten und gemäß der Theorie derselben ihre Invarianten S_4 und T_6 bilden*),

*) Vgl. *G. Salmon,* Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, bearb. von *W. Fiedler,* 2. Aufl., Leipzig 1882, S. 247/9.

die bez. vom vierten und vom sechsten Grade in den Koeffizienten sind, so findet man[113])

$$S_4 \text{ proportional zu } T^2 - 48\mathsf{M},$$
$$T_6 \text{ proportional zu } T(72\mathsf{M} - T^2).$$

Es sind also diese beiden Formen als Funktionen der zehn Fundamental-Invarianten des Netzes $\varkappa f + \lambda g + \mu h = 0$ ausgedrückt; M, T, Θ'_{123} sind nicht linear durch jene zehn ausdrückbar, aber doch in Verbindung mit ihnen bestimmt. Wir könnten entweder M oder T aus diesen Gleichungen eliminieren und so Gleichungen bilden, die sie einzeln mit den Fundamental-Invarianten verbinden.

Die Resultante der drei Formen f, g, h wird $R = T^2 - 64\mathsf{M}$, und $R = 0$ ist also die Bedingung dafür, daß alle Kurven des Netzes einen Punkt gemeinsam haben.

Irgend drei Kegelschnitte können im allgemeinen als die Polarkegelschnitte von drei Punkten in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung betrachtet werden. Wählen wir die Darstellung in Viererkoordinaten wie im vorhergehenden Beispiel 2), so erhält die Gleichung der Kurve dritter Ordnung, deren erste Polaren sie sind, die Gestalt

$$(122) \qquad \frac{x_1^{\,3}}{A_1} + \frac{x_2^{\,3}}{A_2} + \frac{x_3^{\,3}}{A_3} + \frac{x_4^{\,3}}{A_4} = 0,$$

und man erkennt, daß das Verschwinden der Invariante M, das eines der A_i gleich Null fordert, einen Ausnahmefall bildet, wo die drei Kegelschnitte *nicht* aus derselben Kurve dritter Ordnung ableitbar sind.

Im allgemeinen Falle erhält man die Gleichung der Kurve dritter Ordnung, indem man die Hessesche Kovariante der Jacobischen Kovariante J der drei Kegelschnitte bildet und von ihr die mit $2T$ multiplizierte Jacobische abzieht.[114]) Hierbei ist angenommen, daß diese Hessesche Kovariante die Determinante der zweiten Ableitungen von J ist, *ohne Zahlenfaktor.*

Wenn wir ferner mit den Kegelschnitten an der kubischen Kontravariante operieren oder mit ihren Reziproken an der Jacobischen Kovariante, so entstehen lineare Kontravarianten und Kovarianten. Sie stellen die Punkte dar, denen die Kegel-

schnitte als Polaren für die Kurve dritter Ordnung entsprechen bez. die Polargeraden dieser Punkte für dieselbe Kurve.

B. Die Kegelschnitte

$$f \equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0, \quad g \equiv b_{22} x_2^2 + 2 b_{13} x_1 x_3 = 0,$$
$$h \equiv 2 c_{12} x_1 x_2 = 0$$

sind Polarkegelschnitte dreier Punkte P, Q, bez. R in bezug auf die Kurve dritter Ordnung

$$a_{11} a_{22} b_{31}^2 x_1^3 - a_{33}^2 b_{22} b_{31} x_3^3 + 3 (a_{22}^2 b_{31}^2 - a_{11} a_{33} b_{22}^2) x_1 x_2^2$$
$$- 3 a_{11} a_{33} b_{22} b_{31} x_1^2 x_3 + 3 a_{22} a_{33} b_{31}^2 x_1 x_3^2 = 0;$$

dabei haben P, Q, R die Koordinaten

$$p_1 : p_2 : p_3 = a_{22} b_{31} : 0 : a_{11} b_{22}, \quad q_1 : q_2 : q_3 = a_{33} b_{22} : 0 : a_{22} b_{31},$$
$$r_1 : r_2 : r_3 = 0 : 1 : 0.$$

Zwanzigstes Kapitel.

Analytische Grundlagen der Metrik.

370. **Metrische Beziehungen.** Die Untersuchungen über die allgemeine Gleichung zweiten Grades und über die Theorie der Invarianten und Kovarianten in den letzten drei Kapiteln haben zur Entwickelung der Methode gedient, durch die auf rein analytischem Wege geometrische Wahrheiten gefunden werden können. Die Eigenschaften der homogenen Formen und das Hilfsmittel der Determinanten verleihen ihren Ergebnissen jenen Charakter algebraischer Allgemeinheit, der vielleicht der unterscheidende Hauptcharakter der neueren Forschungen genannt werden darf. Auf solche Weise lernt man die allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte kennen; aber die Eigentümlichkeiten jener besonderen Kegelschnitte, die, wie die Parabel, der Kreis, die gleichseitige Hyperbel, durch besondere metrische Beziehungen charakterisiert sind, treten in dieser Art der Untersuchung wenig hervor. Überhaupt sind die metrischen Beziehungen gegen die allgemein projektiven zurückgetreten. Im Folgenden ist darum zunächst *nachzuweisen, wie die vorigen Untersuchungen auch zu metrischen Beziehungen führen.*

Die homogenen Formeln lassen sich, wie wir mehrfach gesehen haben (Nr. 362 Schluß, Nr. 88 usw.), ohne weiteres durch Einführung nicht-homogener Koordinaten metrisch spezialisieren. Nicht ebenso unmittelbar bieten sich die Äquivalente zu gewissen für Gleichungen in Cartesischen Koordinaten wohlbekannten Funktionen bei Anwendung von Dreieckskoordinaten. Zu ihrer leichten Gewinnung hilft die Theorie der Invarianten, sobald es gelingt, *die metrischen Beziehungen*

in Beziehungen der gegebenen Elemente zum Unendlichfernen, insbesondere zu den imaginären Kreispunkten umzusetzen. Zur Erläuterung der Methode greifen die folgenden Nummern auf die Theorie der Gattungskriterien und Fokaleigenschaften zurück.

371. **Homogene Gattungskriterien.** In den zu den rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y dualen Linienkoordinaten lautet die Tangentialgleichung des Paares der imaginären Kreispunkte $u^2 + v^2 = 0$.

Von der besonderen Beziehung eines gegebenen Kegelschnittes zu diesem Punktepaar hängt zum Teil die Gattung des Kegelschnittes ab. Wir betrachten daher die Invariantentheorie einer Schar

$$(1) \qquad u^2 + v^2 - \lambda\varphi(u, v) = 0, \qquad \text{wo}$$

$$(2) \qquad \varphi(u, v) \equiv \alpha_{11}u^2 + 2\alpha_{12}uv + \cdots + \alpha_{33}$$

ist, also einer *Schar konfokaler Kegelschnitte* (Teil I, Nr. 232). Die Diskriminante dieser Schar wird (vgl. Nr. 343):

$$(3) \qquad \gamma(\lambda) \equiv -\alpha_{33}\lambda + \lambda^2(\mathsf{A}_{11} + \mathsf{A}_{22}) - \lambda^3\mathsf{A},$$

wobei A die Determinante von $\varphi(u, v)$ bedeutet, während A_{11}, A_{22} die Unterdeterminanten von α_{11} und α_{22} in dem Schema von A sind. Die Gleichung $\gamma(\lambda) = 0$ hat eine Wurzel $\lambda = 0$, wodurch zum Ausdruck kommt, daß das imaginäre Kreispunktepaar der Schar (1) angehört. Faßt man $\varphi(u, v) = 0$ als die zu $f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots + a_{33} = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten $F(u, v) = 0$ auf, so sind die α_{ik} mit den sonst durch A_{ik} bezeichneten Größen identisch, A_{ik} geht über in Aa_{ik}, A in A^2 (Teil I, S. 284), und an Stelle von $\gamma(\lambda) = 0$ tritt nach Absonderung des Faktors λ:

$$(4) \qquad \lambda^2A^2 - \lambda A(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0.$$

Hier erkennt man in $a_{11} + a_{22}$ und $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$ die Ausdrücke wieder, durch deren Verschwinden die gleichseitige Hyperbel und die Parabel charakterisiert werden (Teil I, S. 326 bez. 271). Vom Standpunkt der Invariantentheorie betrachtet sind $a_{11} + a_{22}$ und $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = A_{33}$ die für die Formen $f(x, y)$ und $u^2 + v^2$ gebildeten, früher mit 3Θ und $3\mathsf{H}$ bezeichneten Invarianten. Hat die Gleichung (4) eine Doppelwurzel, so zeigt dies an, daß die imaginären Kreispunkte

selbst jedem Kegelschnitt der Schar angehören, da dann die von ihnen ausgehenden Tangenten nur *ein* zusammenfallendes Paar von Schnittpunkten haben. Die Bedingung $(a_{11} + a_{22})^2 = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$ oder $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, die für keine anderen reellen Werte als $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ erfüllt werden kann, ist daher die charakteristische *Bedingung für den Kreis* (Nr. 97).*)

Bei trimetrischen Normalkoordinaten ist nach Nr. 319

$$(5) \quad \begin{cases} \omega(u, u) \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 2u_2u_3 \cos A_1 \\ \qquad - 2u_3u_1 \cos A_2 - 2u_1u_2 \cos A_3 = 0 \end{cases}$$

die Gleichung des imaginären Kreispunktepaares, und zwar bedeuten hier A_1, A_2, A_3 die Winkel des Koordinatendreiecks. Die zu (5) gehörige Gleichung in Punktkoordinaten

$$(6) \quad \begin{cases} x_1^2 \sin^2 A_1 + \cdot + x_3^2 \sin^2 A_3 + 2x_2x_3 \sin A_2 \sin A_3 + \cdot \\ \qquad + 2x_1x_2 \sin A_1 \sin A_2 = 0 \end{cases}$$

in der man $\sin A_1, \ldots$ durch die ihnen proportionalen Längen $l_1, \ldots$ der Gegenseiten des Koordinatendreiecks ersetzen könnte, stellt doppelt zählend den Träger des Punktepaares (5), die unendlich ferne Gerade dar (Nr. 75).

Die Bedingung dafür, daß

$$(7) \quad f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + \cdot + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdot + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

eine *gleichseitige Hyperbel* darstellt, wird in trimetrischen Normalkoordinaten

$$(8) \quad \begin{cases} 3\Theta = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23} \cos A_1 - 2a_{31} \cos A_2 \\ \qquad - 2a_{12} \cos A_3 = 0, \end{cases}$$

und die Bedingung für die *Parabel* wird

$$(9) \quad \begin{cases} 3\mathsf{H} = A_{11} \sin^2 A_1 + A_{22} \sin^2 A_2 + A_{33} \sin^2 A_3 \\ \qquad + 2A_{23} \sin A_2 \sin A_3 + 2A_{31} \sin A_3 \sin A_1 \\ \qquad + 2A_{12} \sin A_1 \sin A_2 = 0. \end{cases}$$

Ist die Gleichung $3\Theta^2 - 4\mathsf{H} = 0$ erfüllt, deren linke Seite auf verschiedene Arten in eine Summe von zwei Quadraten zerlegt werden kann, so geht die Kurve (7), wenn sie reell ist, durch die beiden imaginären Kreispunkte, ist also ein *Kreis*.

Damit ist klar, wie die Kriterien unter Annahme allgemeiner projektiver Koordinaten zu bilden sind, sobald die Gleichung der imaginären Kreispunkte bekannt ist.

*) Die Doppelwurzel ist $\lambda = 1 : (a_{11}a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2)$.

bestehende Kurvenpaar, bezeichnet den Ort eines Punktes, für den das Paar seiner Tangenten an den Kegelschnitt zu dem Paar seiner Verbindungslinien mit jenen festen Punkten harmonisch konjugiert ist (Nr. 356). Ist das Punktepaar insbesondere das der imaginären Kreispunkte, so bezeichnet $k=0$ den Ort *des Schnittpunktes der Paare rechtwinkliger Tangenten* (Nr. 313, 2). Alsdann ist nach dem in Nr. 354 gegebenen Werte

$$(10)\quad 2k(x,y) \equiv A_{33}(x^2+y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} = 0$$

die allgemeine Gleichung des Hauptkreises in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y. Für $A_{33}=0$ oder $a_{11}a_{22}=a_{12}{}^2$, d. h. für die Parabel, gibt $k=0$ ihre Leitlinie:

$$(11)\qquad 2(A_{13}x + A_{23}y) - (A_{11}+A_{22}) = 0.$$

In trimetrischen Normalkoordinaten findet man die allgemeine Gleichung des Hauptkreises in der Form der Kovariante $2k(x,x)$ von $F(u,u)$ und $\omega(u,u)$, nämlich

$$(12)\left\{\begin{array}{l} 2k(x,x) \equiv (A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos A_1)x_1{}^2 + \cdots \\ +2(A_{11}\cos A_1 - A_{23} - A_{13}\cos A_3 - A_{12}\cos A_2)x_2x_3 + \cdots = 0. \end{array}\right.$$

Man kann diese Gleichung mit Hilfe der Ableitungen $f_i = \frac{1}{2}f'(x_i)$ auch schreiben

$$(13)\left\{\begin{array}{l} 3\Theta f - f_1{}^2 - f_2{}^2 - f_3{}^2 + 2f_2f_3\cos A_1 + 2f_3f_1\cos A_2 \\ \qquad + 2f_1f_2\cos A_3 = 0. \end{array}\right.$$

Daß sie einen Kreis darstellt, kann gezeigt werden (vgl. Nr. 321), indem man sie auf die Form bringt

$$\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \cdot (\sin A)_x \cdot \left\{\frac{A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos A_1}{\sin A_1}x_1 + \cdots\right\}$$
$$-3\mathsf{H}\{x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3\} = 0,$$

wo $(\sin A)_x$ zur Abkürzung für $x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3$ gesetzt ist. Wenn der Faktor H rechts verschwindet, ist (Nr. 371) die Kurve eine Parabel, und unsere Gleichung stellt das aus der unendlich fernen Geraden und der Leitlinie der Parabel bestehende Geradenpaar dar.

B. 1) Man zeige, daß die Gleichung der Leitlinie der Parabel (Nr. 317, 1, 3) $\quad (a_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad$ lautet:

$$a_1x_1 \operatorname{tg} A_2 \operatorname{tg} A_3 + a_2x_2 \operatorname{tg} A_3 \operatorname{tg} A_1 + a_3x_3 \operatorname{tg} A_1 \operatorname{tg} A_2 = 0.$$

2) Der Winkel φ der vom Punkte y_i an die Kurve $f(x, x) = 0$ gezogenen Tangenten ist bei trimetrischen Normalkoordinaten gegeben durch die Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{(y_1 \sin A_1 + y_2 \sin A_2 + y_3 \sin A_3)\sqrt{-Af(y, y)}}{k(y, y)},$$

wobei $2k(x, x)$ durch (12) definiert ist. Bei rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten ist $y_1 \sin A_1 + \cdots$ durch 1 zu ersetzen; für den Nenner k kommt dann (10) in Anwendung.[115]

3) Die Gleichung

$$(f_2 k_3 - f_3 k_2) \sin A_1 + (f_3 k_1 - f_1 k_3) \sin A_2 + (f_1 k_2 - f_2 k_1) \sin A_3 = 0,$$

in der $f_1, \ldots, k_1, \ldots$ die partiellen Ableitungen der Ausdrücke $f(x, x)$ und $k(x, x)$ bedeuten, stellt die beiden Achsen des Kegelschnittes $f(x, x) = 0$ dar für $k(x, x) = 0$ als Gleichung des Hauptkreises.

Denn sie ist die Bedingung für die Koordinaten eines Punktes, dessen Polaren in bezug auf den Kreis $k(x, x) = 0$ und den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ einander parallel sind.

373. **Homogene Brennpunktskriterien.** Die Wurzeln der Diskriminante einer Kegelschnittschar sind die Parameter ihrer Punktepaare. Also sind die beiden Wurzeln der Diskriminante der konfokalen Schar (vgl. Nr. 371)

$$A^2\lambda^2 - 3\Theta A\lambda + 3\mathrm{H} = 0^{*)} \tag{14}$$

die *Parameter der beiden Paare von Brennpunkten* des Kegelschnittes, der durch eine numerische Gleichung $f = 0$ gegeben ist. Bei Verwendung der zu den homogenen rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y, z dualen Linienkoordinaten u, v, w bestimmen wir die Brennpunkte, indem wir eine Wurzel von (4) in $u^2 + v^2 - \lambda F(u, v, w) = 0$ einsetzen, so daß die linke Seite dieser Gleichung von der Form wird

$$(x'u + y'v + z'w)(x''u + y''v + z''w),$$

denn nun sind die Brennpunkte $x' : z' \mid y' : z'$; $x'' : z'' \mid y'' : z''$. Der eine Wert von λ gibt die beiden *reellen*, der andere die *imaginären* Brennpunkte. Dasselbe Verfahren ist bei trimetrischen Koordinaten anwendbar.

Bildet man ferner nach der Regel von Nr. 309 die Reziprokalform von $u^2 + v^2 - \lambda F(u, v, w)$, so erhält man die Gleichung in Punktkoordinaten x, y eines mit dem gegebenen *konfokalen Kegelschnittes* in der Form

*) Sie hat gleiche Wurzeln für den Fall des Kreises und eine verschwindende Wurzel für den Fall der Parabel.

$$(15)\left\{\begin{array}{l}\lambda^2 A f(x,y)-\lambda\{A_{33}(x^2+y^2)-2A_{13}x-2A_{23}y+A_{11}+A_{22}\}\\ \qquad\qquad\qquad +1=0.\end{array}\right.$$

Man erhält aus ihr die Gleichung der *Hüllkurve des Systems* (Nr. 292), d. h. der gemeinschaftlichen Tangenten, als

$$(16)\quad\left\{\begin{array}{l}\{A_{33}(x^2+y^2)-2A_{13}x-2A_{23}y+A_{11}+A_{22}\}^2\\ \qquad\qquad -4Af(x,y)=0.\end{array}\right.$$

Durch Zerlegen derselben in das Faktorenpaar

$$\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}\{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2\}$$

würde man die Brennpunkte $\alpha\,|\,\beta$; $\alpha'\,|\,\beta'$ ebenfalls erhalten.

Allgemein entspricht der trimetrischen Gleichung $\omega(u,u)-\lambda F(u,u)=0$ die Gleichung in Normalkoordinaten

$$(17)\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda^2 A f(x,x)-\lambda\{(A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos A_1)x_1{}^2+\cdots\\ +2(A_{11}\cos A_1-A_{23}-A_{13}\cos A_3-A_{12}\cos A_2)x_2x_3+\cdots\}\\ \qquad\qquad +\{x_1\sin A_1+\cdots\}^2=0.\end{array}\right.$$

Wenn λ einen der aus der verschwindenden Diskriminante entspringenden Werte erhält, so liefert die Reziprokalform zu $\omega(u,u)-\lambda F(u,u)=0$ *das Quadrat der Gleichung einer der Achsen des Kegelschnittes.*[117])

B. 1) Man bestimme die Brennpunkte von

$$2x^2-2xy+2y^2-2x-8y+11=0.$$

Die quadratische Gleichung in λ ist $A^2\lambda^2-4A\lambda+3=0$, und ihre Wurzeln sind $\lambda=3:A$ und $\lambda=1:A$ mit $A=-9$.

Für den Wert $\lambda=-\frac{1}{3}$ wird

$$6u^2+21v^2+3w^2+30uv+12uw+18vw+3(u^2+v^2)$$
$$=3(u+2v+w)(3u+4v+w);$$

dies liefert die Brennpunkte $1\,|\,2$; $3\,|\,4$. Der Wert $\lambda=-\frac{1}{9}$ gibt die imaginären Brennpunkte $2\pm i\,|\,3\mp i$.

2) Man bestimme den Brennpunkt einer durch die allgemeine Gleichung in Cartesischen Koordinaten gegebenen Parabel.

Die quadratische Gleichung wird linear, und

$$(a_{11}+a_{22})\{A_{11}u^2+A_{22}v^2+2A_{23}vw+2A_{31}wu+2A_{12}uv\}-A(u^2+v^2)$$

ist in Faktoren zerlegbar: dieselben müssen sein

$$(a_{11}+a_{22})(2A_{13}u+2A_{23}v) \quad \text{und}$$
$$\frac{(a_{11}+a_{22})A_{11}-A}{2(a_{11}+a_{22})A_{13}}u+\frac{(a_{11}+a_{22})A_{22}-A}{2(a_{11}+a_{22})A_{23}}v+w.$$

Der erste Faktor liefert den unendlich fernen Brennpunkt und zeigt, daß die Achse der Kurve zu $A_{23}x-A_{13}y=0$ parallel ist. Der

zweite Faktor zeigt, daß die Koeffizienten seiner Glieder in u und v die Koordinaten des endlichen Brennpunktes sind.

3) Man bestimme den Brennpunkt einer durch ihre Gleichung in trimetrischen Normalkoordinaten gegebenen Parabel. Die Gleichung des Brennpunktepaares ist

$$3\Theta F(u, u) - A\omega(u, u) = 0.$$

Die Koordinaten des unendlich entfernten Brennpunktes sind aus Nr. 309 bekannt als Koordinaten des Pols der unendlich fernen Geraden; daher sind die des endlich entfernten Brennpunktes

$$\frac{3\Theta A_{11} - A}{A_{11}\sin A_1 + A_{12}\sin A_2 + A_{13}\sin A_3} \Bigg| \frac{3\Theta A_{22} - A}{A_{21}\sin A_1 + \cdots} \Bigg| \frac{3\Theta A_{33} - A}{A_{31}\sin A_1 + \cdots}$$

(zyklisch).

4) Man bilde und diskutiere die Gleichung der Jacobischen und der Cayleyschen Kurve des Gewebes $\varkappa\varphi(u, u) + \lambda\chi(u, u) + \mu\omega(u, u) = 0$. Sie liefern die Eigenschaften der Kurve, die die Achsen der Kegelschnitte der Schar $\varkappa\varphi(u, u) + \lambda\chi(u, u) = 0$ umhüllen, bez. diejenigen des Ortes der Brennpunkte (Nr. 300, 8).

5) Man kann die Brennpunkte mit Hilfe des Satzes in Nr. 188 bestimmen, wonach das Rechteck der Entfernungen eines Brennpunktes von zwei parallelen Tangenten konstant ist.

Eine zur Seite $x_1 = 0$ des Koordinatendreiecks parallele Gerade hat nämlich (Nr. 71) bei trimetrischen Normalkoordinaten die Gleichung $(\lambda - l_1)x_1 + M = 0$, wo $M \equiv l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3$ den doppelten Inhalt des Koordinatendreiecks darstellt, während l_1, l_2, l_3 die Längen seiner Seiten sind. Die Gerade berührt den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ unter der Bedingung

$$A_{11}\lambda^2 + 2(A_{12}l_2 + A_{13}l_3)\lambda + A_{22}l_2^2 + 2A_{23}l_2l_3 + A_{33}l_3^2 = 0,$$

und die Einführung des Wertes $\lambda = (l_1x_1 - M) : x_1$ führt sie über in

$$x_1^2F(l, l) - Mx_1F'(l_1) + M^2A_{11} = 0.$$

Die zu den Fundamentallinien $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ parallelen Tangenten geben analoge Gleichungen

$$x_2^2F(l, l) - Mx_2F'(l_2) + M^2A_{22} = 0,$$
$$x_3^2F(l, l) - Mx_3F'(l_3) + M^2A_{33} = 0.$$

Sind dann x_1', x_1'' die Wurzeln der ersten, x_2', x_2'' die der zweiten und x_3', x_3'' die der dritten unter ihnen, so sind für x_1, x_2, x_3 bez. als die entsprechenden Koordinaten des Brennpunktes die Differenzen

$$x_1 - x_1',\ x_1 - x_1'';\quad x_2 - x_2',\ x_2 - x_2'';\quad x_3 - x_3',\ x_3 - x_3''$$

die Abstände desselben von den drei Paaren paralleler Tangenten. Man hat so nach dem erwähnten Satze die Gleichheit ihrer Produkte, also die Beziehungen

$$x_1^2 - (x_1' + x_1'')x_1 + x_1'x_1'' = x_2^2 - (x_2' + x_2'')x_2 + x_2'x_2''$$
$$= x_3^2 - (x_3' + x_3'')x_3 + x_3'x_3'';$$

d. h. die Gleichungen

$$x_1^2 F(l,l) - M x_1 F'(l_1) + M^2 A_{11} = x_2^2 F(l,l) - M x_2 F'(l_2) + M^2 A_{22}$$
$$= x_3^2 F(l,l) - M x_3 F'(l_3) + M^2 A_{33}$$

liefern die Koordinaten der Brennpunkte des Kegelschnittes. Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen besteht darin, daß jede den Ort eines Punktes von solcher Beschaffenheit bezeichnet, daß die Fußpunkte der Lote, die man von ihm auf die vier den betreffenden Fundamentallinien parallelen Tangenten des Kegelschnittes fällen kann, in einem Kreise liegen.

Für die Parabel ist $F(l, l) = 0$; man erhält nur *einen* Brennpunkt.

Der Fundamentalsatz von Nr. 183 über Brennpunkt und Leitlinie kann in analoger Weise benutzt werden. Man bildet das Quadrat des Abstandes eines Punktes x_i vom Brennpunkt y_i nach Nr. 74 und ebenso nach Nr. 68 das seines Abstandes von der zugehörigen Leitlinie und vergleicht die aus jenem Fundamentalsatze entspringende Gleichung des Kegelschnittes mit der allgemeinen homogenen Gleichung zweiten Grades. Man erhält sechs Bedingungen, die mit $l_y = M$ zusammen die Elimination der Unbekannten gestatten und die Brennpunkte und Leitlinien bestimmen.

6) Für die auf ein System harmonischer Pole bezogene Parabel $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$, wobei

$$a_{11} a_{22} l_3^2 + a_{22} a_{33} l_1^2 + a_{33} a_{11} l_2^2 = 0$$

ist, werden die Bestimmungsgleichungen des Brennpunktes

$$l_1 x_1 : l_2 x_2 : l_3 x_3 = (a_{22} + a_{33}) : (a_{33} + a_{11}) : (a_{11} + a_{22})$$

und daher

$$l_1^2 (l_3 x_3 + l_1 x_1 - l_2 x_2)(l_1 x_1 + l_2 x_2 - l_3 x_3) + l_2^2 (l_1 x_1 + l_2 x_2 - l_3 x_3)$$
$$(l_2 x_2 + l_3 x_3 - l_1 x_1) + l_3^2 (l_2 x_2 + l_3 x_3 - l_1 x_1)(l_3 x_3 + l_1 x_1 - l_2 x_2) = 0.$$

Da die Klammerausdrücke, gleich Null gesetzt, die Seiten des dem Koordinatendreieck parallel eingeschriebenen Dreiecks darstellen, hat man also den Satz: Der Ort der Brennpunkte aller Parabeln, die ein gemeinschaftliches Polardreieck haben, ist der durch die Mittelpunkte der Seiten ihres Dreiecks gehende Kreis.

7) Auch die Längen der Halbachsen lassen sich durch die Gleichungen in B. 5 bestimmen; denn für r als die Länge einer solchen ist jedes der drei in sie eintretenden quadratischen Polynome $= -r^2 F(l, l)$; die Elimination zwischen den durch diesen Wert verbundenen Gleichungen und $l_x = M$ ergibt

$$l_1 \sqrt{Q_1 - r^2} + l_2 \sqrt{Q_2 - r^2} + l_3 \sqrt{Q_3 - r^2} = 0,$$

wo Q_1, Q_2, Q_3 Abkürzungen sind, deren Bedeutung aus

$$\frac{Q_1}{a_{22}l_3^2-2a_{23}l_2l_3+a_{33}l_2^2}=\frac{Q_2}{a_{33}l_1^2-2a_{13}l_3l_1+a_{11}l_3^2}=\frac{Q_3}{a_{11}l_2^2-2a_{12}l_1l_2+a_{22}l_1^2}$$
$$=-\frac{M^2A}{F(l,l)^2}$$

hervorgeht. In der Tat hat für $Q_1=Q_2=Q_3$ diese Gleichung in r gleiche Wurzeln, und die Gleichheit der Nenner derselben Größen in den vorigen Beziehungen stimmt mit den Bedingungen des Kreises überein. (S. 151, Gl. (67).) Die Bestimmungsgleichung für r^2 erhält die Form $Ar^4+2Br^2+C=0$ mit den Koeffizientenwerten

$$A=l_1^4+\cdots-2l_2^2l_3^2-\cdots=-l(l-2l_1)(l-2l_2)(l-2l_3),\ (l=l_1+l_2+l_3);$$
$$B=2l_1l_2l_3(l_1Q_1\cos A_1+\cdots),\quad C=l_1^4Q_1^2+\cdots-2l_2^2l_3^2Q_2Q_3-\cdots.$$

Man kann sie auch schreiben

$$16R^4\cdot(3\mathsf{H})^3r^4+4R^2M^2A(3\mathsf{H})(3\Theta)r^2+M^4A^2=0,$$

wo $3\mathsf{H}$ und 3Θ durch (9) und (8) definiert sind, während R den Radius des dem Koordinatendreieck umgeschriebenen Kreises bedeutet. Bei rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten lautet die entsprechende Gleichung

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)^3r^4+A(a_{11}+a_{22})(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)r^2+A^2=0.$$

Diese Gleichungen haben in r^2 stets reelle Wurzeln. Die Untersuchung derselben auf ihre Gleichheit und ihre Vorzeichen liefert die bekannten Unterscheidungszeichen der Kegelschnittarten.

8) Der Inhalt F des Dreiseits der Polaren von drei Punkten P, Q, R in bezug auf eine Ellipse mit den Halbachsen a, b ist mit dem Inhalt PQR des von ihnen gebildeten Dreiecks für O als Mittelpunkt der Ellipse durch die Gleichung verbunden

$$F=\pm\frac{a^2b^2(PQR)^2}{4(QOR)(ROP)(POR)}.$$

374. **Die Beziehung auf ein Absolutes.** Die Bedingung, unter der zwei Strahlen $u\,|\,v$, $u'\,|\,v'$ oder bei trimetrischen Normalkoordinaten u_i, u_i' rechtwinklig zu einander sind, nämlich $uu'+vv'=0$ bez. (vgl. Nr. 68)

$$u_1u_1'+u_2u_2'+u_3u_3'-(u_2u_3'+u_3u_2')\cos A_1$$
$$-(u_3u_1'+u_1u_3')\cos A_2-(u_1u_2'+u_2u_1')\cos A_3=0,$$

ist identisch mit der Bedingung, unter der diese Geraden harmonische Polaren sind in bezug auf das imaginäre Kreispunktepaar, also in bezug auf den zerfallenden Kegelschnitt $u^2+v^2=0$ oder $\omega(u,u)=0$. *Daher ist die Beziehung der Rechtwinkligkeit ein besonderer Fall der Beziehung zwischen harmonischen Polaren in bezug auf einen festen Kegelschnitt.*

So tritt sie auch in die Sätze ein. Aus dem Satze z. B., daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken von zwei in bezug auf denselben Kegelschnitt einander konjugierten Dreiecken sich in einem Punkte schneiden, folgt als Sonderfall der Satz, daß die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, sobald $\omega(u, u) = 0$ an die Stelle des allgemeinen Kegelschnitts gesetzt wird. Die Charakteristik der besonderen Kegelschnitte: Kreis, gleichseitige Hyperbel und Parabel, die Beziehung des Kegelschnittes auf seine Hauptachsen, Brennpunkte und Leitlinien, alle diese metrischen Charaktere der Kegelschnittstheorie sind als abhängig von dem analytischen Ausdruck für das imaginäre Kreispunktepaar erkannt worden.

Überhaupt ist der Begriff der Rechtwinkligkeit für die ganze Winkelmessung von grundlegender Bedeutung, da er unmittelbar gestattet, die *Gleichheit von Winkeln* zu definieren. Denn wir können den Satz von der Winkelhalbierung, im Hinblick auf jene Verallgemeinerung des Begriffes, wiederum als einen Sonderfall des Satzes von der harmonischen Beziehung zweier Strahlenpaare bezeichnen. Sind r_1, r_2 harmonische Strahlen in bezug auf das imaginäre Kreispunktepaar g_1, g_2 und h_1, h_2 harmonische Strahlen in bezug auf r_1, r_2, so sind $g_1 h_1$ und $g_2 h_2$ gleiche Winkel von verschiedenem Sinn.

Überall ist hervorgetreten, *daß die imaginären Kreispunkte nur einen ausgezeichneten Kegelschnitt darstellen, den man zur Definition des Messens als ein Absolutes benutzt. Auf der Beziehung der geometrischen Gebilde auf ein absolutes Gebilde zweiten Grades beruht alle Metrik*, sowohl die der Gebilde erster Stufe oder der binären homogenen Formen, als die des ebenen Systems überhaupt oder der ternären homogenen Formen. Dies soll im Folgenden nachgewiesen werden.[118])

375. **Metrische Grundlagen erster Stufe.** Wenn durch $f(x, x) \equiv a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0$ ein gegebenes festes Paar von Elementen bestimmt ist, so kann die Gleichung $g(x, x) = 0$ eines beliebigen anderen Paares von Elementen desselben Gebildes erster Stufe auf *zwei* Arten in der Form

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x, x) + \lambda v_x^2 \equiv (&a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2) \\ &+ \lambda (v_1 x_1 + v_2 x_2)^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

dargestellt werden. Denn die Paare $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$ bestimmen eine Involution, deren Doppelelemente die durch die beiden möglichen Werte von v_x bestimmten Elemente $v_x' = 0$, $v_x'' = 0$ sind. In Erinnerung an die Bedeutung einer Gleichung von der Form $f(x, x) + \lambda v_x^2 = 0$ in der Theorie der Kegelschnitte (Nr. 258), die das System der den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ doppelt berührenden oder ihm ein- und umgeschriebenen Kegelschnitte bezeichnet, kann man sagen, das Paar $g(x, x) = 0$ sei dem Paare $f(x, x) = 0$ ein- oder umgeschrieben, und die Elemente $v_x' = 0$, $v_x'' = 0$ seien als Mittelpunkt und Achse der Ein- und Umschreibung zu bezeichnen. Das eine von ihnen ist das konjugiert harmonische des anderen in bezug auf jedes der beiden Elementenpaare f und g. Wird also das eine durch y_i oder $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ dargestellt, so ist das andere notwendig

$$f(x, y) \equiv a_{11} x_1 y_1 + a_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{22} x_2 y_2 = 0. \tag{19}$$

Wenn man nun in der Gleichung $f(x,x) f(y,y) - f^2(x,y) = 0$ von Nr. 313, die in Nr. 361 wiederholt in bezug auf das hier entsprechende Problem gebraucht wurde, alle x_3 enthaltenden Glieder verschwinden läßt, so folgt die Identität

$$(20)\left\{\begin{aligned} &(a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2)(a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2) \\ &\qquad - \{a_{11} x_1 y_1 + a_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{22} x_2 y_2\}^2 \\ &\qquad\qquad \equiv (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2. \end{aligned}\right.$$

Man erkennt aus ihr, daß das eingeschriebene Elementenpaar $g(x, x)$, für θ als eine Konstante, in den beiden Formen

$$\begin{gathered}(a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2)(a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2) \sin^2 \theta \\ - (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2)(a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2) \cos^2 \theta \\ - \{a_{11} x_1 y_1 + a_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{22} x_2 y_2\}^2 = 0\end{gathered}$$

dargestellt werden kann, je nachdem man von den Elementen

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0, \quad a_{11} x_1 y_1 + a_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{22} x_2 y_2 = 0$$

das erste oder das zweite als Achse der Einschreibung ansieht.

Behält man die Bezeichnungen $f(x, x)$, $f(y, y)$ und $f(x, y)$ auch im binären Gebiet bei, so kann man die Identität (20) in der Determinantenform schreiben:

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} f(x,x) & f(x,y) \\ f(x,y) & f(y,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2,$$

wobei $a_{12} = a_{21}$. Nach Hinzufügung einer dritten Zeile $z_1 \mid z_2$ und mit Benutzung der Bezeichnungen

$$f(y,z) = a_{11} y_1 z_1 + a_{12}(y_1 z_2 + y_2 z_1) + a_{22} y_2 z_2, \quad \text{analog } f(x,z),$$

erhält man, rechts ausmultiplizierend, die Identität

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} f(x,x) & f(x,y) & f(x,z) \\ f(y,x) & f(y,y) & f(y,z) \\ f(z,x) & f(z,y) & f(z,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 \end{vmatrix}^2 = 0$$

oder $$f(x,x)f(y,y)f(z,z) + 2f(x,y)f(y,z)f(z,x)$$
$$- f(x,x)f^2(y,z) - f(y,y)f^2(z,x) - f(z,z)f^2(x,y) = 0.$$

Dies geht nach Division durch $f(x,x)f(y,y)f(z,z)$, wegen

$$f(x,x)f(y,y)\cos^2\theta = f^2(x,y), \quad f(y,y)f(z,z)\cos^2\theta' = f^2(y,z),$$
$$f(x,x)f(z,z)\cos^2\theta'' = f^2(x,z),$$

über in

$$1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' \pm 2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta'' = 0$$

d. h. in $$(\cos\theta\cos\theta' \pm \cos\theta'')^2 = \sin^2\theta\sin^2\theta'$$

und $$\cos(\theta \pm \theta') = \pm\cos\theta''.$$

Da nun $\theta, \theta', \theta''$ nur durch die Cosinusquadrate bestimmt sind, kann über sie so verfügt werden, daß die Beziehung besteht

$$(23)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\arccos \frac{f(x,y)}{\sqrt{f(x,x)f(y,y)}} + \arccos \frac{f(y,z)}{\sqrt{f(y,y)f(z,z)}} \\ &\qquad = \arccos \frac{f(x,z)}{\sqrt{f(x,x)f(z,z)}}. \end{aligned} \right.$$

376. **Äquidistanz.** Denkt man unter den Elementen eines geometrischen Gebildes erster Stufe ein Paar $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2$ als unveränderlich — man nenne es *das absolute Paar* —, so kann *jedes* Paar von Elementen dieses Gebildes als ihm eingeschrieben angesehen werden. Es bestimmt dann mit jenem zwei Elemente als Doppelelemente der erzeugten Involution, nach dem Vorigen zu benennen als Mittelpunkt und Achse der Einschreibung. Insofern das betrachtete Paar dem absoluten eingeschrieben ist, wollen wir es ein *Kreispaar* nennen, und jene Doppelelemente der Involution, die das absolute und das Kreispaar zugleich harmonisch teilen, sollen *Mittelpunkt und Achse des Kreispaares* heißen, mit der Bestimmung, daß

jedem von ihnen während einer und derselben Betrachtung derselbe Name (Mittelpunkt oder Achse) verbleibe. Aus dem Mittelpunkt und dem einen Element des Kreispaares bestimmt sich dessen anderes Element in einziger Weise; denn zuerst liefert der Mittelpunkt die Achse als das ihm in bezug auf das absolute Paar harmonisch konjugierte Element, dann das erste Element des Kreispaares das zweite als ihm harmonisch konjugiert in bezug auf Mittelpunkt und Achse.

Für alles Weitere ist der Begriff der *Äquidistanz der Elemente* grundlegend, und wir setzen ihn so fest, daß der Satz gilt: *Die zwei Elemente eines Kreispaares sind äquidistant vom Mittelpunkt.* Diese Definition ist nämlich die projektive Verallgemeinerung der Beschreibung gleicher Winkel in Nr. 374.

Die Metrik der Gebilde erster Stufe gründet sich dann mathematisch auf folgenden Vorgang: Sind E^0, E' zwei Elemente des Gebildes, so bestimme man ein drittes Element E'' desselben Gebildes so, daß E^0, E'' ein Kreispaar vom Mittelpunkt E' sind; sodann E''' so, daß E' und E''' ein Kreispaar vom Mittelpunkt E'' sind; E'''' so, daß E'' und E'''' ein Kreispaar vom Mittelpunkt E''' sind, usw.; ferner andererseits ein Element $E^{`}$ so, daß $E'$, $E^{`}$ ein Kreispaar vom Mittelpunkt E^0 sind; $E^{``}$ so, daß $E^{``}$, E^0 ein Kreispaar vom Mittel- $E^{`}$ sind, usw. *Dann hat in der Reihe* $\ldots, E^{```}, E^{``}, E^{`}, E^0, E', E'', E''', \ldots$ *jedes Element von den ihm nächstbenachbarten Elementen gleiche Entfernungen in verschiedenem Sinn.* Wenn die Elemente E^0, E' einander nahe genug gewählt waren, wird der ganze Träger des Elementargebildes in eine stetige Folge von beliebig kleinen und einander gleichen Elementardistanzen geteilt; die Zahl derjenigen, die zwischen irgend zwei Elementen des Gebildes eingeschlossen sind, gibt für diese letzten das Maß ihres Abstandes (Abst.). Für drei auf einander folgende Elemente E, E', E'' gilt dabei die *Fundamentaleigenschaft von der Addierbarkeit der Maßunterschiede:*

(24) $\text{Abst.}\,(E, E') + \text{Abst.}\,(E', E'') = \text{Abst.}\,(E, E'')$.

377. **Abstandsformeln.** Ist das absolute Paar E_1, E_2 durch $f(x, x) = 0$ dargestellt, so ist das „Kreispaar" vom Mittelpunkt $E'(y_i)$ durch die Gleichung gegeben:

(25) $$f(x,x)f(y,y)\cos^2\theta - f^2(x,y) = 0.$$

Sind $E^0(x_i)$, $E''(z_i)$ die beiden Elemente des Paares, so hat man

(26) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_{11}x_1y_1 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{22}x_2y_2}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}y_1^2 + \cdot\cdot)}} \\ = \dfrac{a_{11}y_1z_1 + a_{12}(y_1z_2 + y_2z_1) + a_{22}y_2z_2}{\sqrt{(a_{11}y_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}z_1^2 + \cdot\cdot)}} \end{array}\right.$$

als Ausdruck der Wahrheit, daß z_i und x_i von y_i gleichweit entfernt sind. Infolgedessen ist Abst. (E^0E') eine Funktion von

(27) $$\frac{f(x,y)}{\sqrt{f(x,x)f(y,y)}} = \frac{a_{11}x_1y_1 + a_{12}(x_1y_2 + y_1x_2) + a_{22}x_2y_2}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}y_1^2 + \cdot\cdot)}},$$

deren Form durch die Forderung bedingt ist, daß für die Elemente E^0, E', E'' die Funktionalgleichung (24) besteht.

Nach der Formel (23), S. 299 wird derselben Genüge geleistet, wenn man voraussetzt, *daß der Abstand von* x_i *bis* y_i *einem Bogen gleich sei**), *der den letzterhaltenen Ausdruck zu seinem Cosinus hat,* so daß

(28) $$\text{Abst.}\,(E^0E') = \text{arc cos}\,\frac{a_{11}x_1y_1 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{22}x_2y_2}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}y_1^2 + \cdot\cdot)}}.$$

oder, nach dem früheren gleichbedeutend,

(29) $$\text{Abst.}\,(E^0E') = \text{arc sin}\,\frac{\sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}(x_1y_2 - x_2y_1)}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot)(a_{11}y_1^2 + \cdot\cdot)}}.$$

Die beiden Formen der Gleichung des Kreispaares (Nr. 375) sagen dann gleichmäßig aus, daß die Entfernungen der beiden Elemente E^0, E'' desselben vom Mittelpunkt E' dem Bogen θ gleich sind, oder daß sozusagen θ der Radius dieses Kreises ist.

Insbesondere hat man für $\theta = 0$ die Beziehung $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, d. h. die beiden Elemente fallen zusammen, und für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ist $f(x,y) = 0$, d. h. die Elemente x_i und y_i bilden bezüglich der Elemente des absoluten Paares ein harmonisches Paar. *Der Abstand zwischen irgend zwei in bezug auf das absolute Paar harmonischen Elementen ist stets ein Quadrant.* Wir behandeln den *Quadranten als die Einheit des Abstandes,* d. h. wir drücken die numerischen Abstandsangaben in Teilen

*) Eigentlich kann ebensowohl ein konstantes Vielfache des arc cos als Abstand bezeichnet werden.

des Quadranten aus, nennen also z. B. rechtwinklige Strahlen solche vom Abstand Eins.

Neben dieser allgemeinen Messung bedarf insbesondere noch der Sonderfall einer Erörterung, wo das *absolute Paar in ein doppeltes Element* zusammenfällt. Dann fällt nämlich das harmonisch konjugierte eines beliebigen Elements in bezug auf das Absolute mit diesem zusammen. Daher kann *jedes* Paar von Elementen als ein Kreispaar betrachtet werden, das das harmonisch konjugierte Element des Absoluten zum Mittelpunkt hat. Darnach kann wie vorher der Träger eines Elementargebildes in beliebig kleine gleiche Elementarabstände zerlegt und die Entfernung zweier Elemente des Gebildes durch die Anzahl solcher Elementarabstände gemessen werden, die zwischen ihnen liegen. Aber *die Einheit des Abstandes ist hier willkürlich*, denn der Begriff des Quadranten hat keinen Inhalt mehr, so z. B. für die gewöhnliche Längenmessung.

In diesem Falle ist $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, d. h. der Abstand ist als ein Bogen vom Sinus Null gegeben. Durch Übergang vom arc sin zum sin und Unterdrückung des verschwindenden Faktors erhält man, für $(b_1x_1 - b_2x_2)^2 = 0$ als das absolute Doppelelement, den Abstand von x_i und y_i gleich

$$(30) \qquad \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{(b_1x_1 - b_2x_2)(b_1y_1 - b_2y_2)}.$$

Nach Multiplikation mit einem willkürlichen Faktor $(b_1c_2 - b_2c_1)$ läßt sich der Abstand in der offenbar der Funktionalgleichung genügenden Form einer Differenz schreiben

$$(31) \qquad \text{Abst.}\,(x_i, y_i) = \frac{c_1x_1 - c_2x_2}{b_1x_1 - b_2x_2} - \frac{c_1y_1 - c_2y_2}{b_1y_1 - b_2y_2}.$$

378. **Elliptische und hyperbolische Messung.** Wir haben gesehen, wie aus dem Anfangselement E^0E' eine zusammenhängende Reihe gleicher Elemente, aus dem angenommenen Skalenteil die ganze Skala abgeleitet wurde. Beim gewöhnlichen Messen geschieht die Bildung der Skala oder des Maßstabes durch Bewegung des ersten Teils im Endlichen; für die mathematische Untersuchung ersetzen wir die Bewegung durch eine lineare Transformation, bei der die absoluten Elemente festbleiben. Die allgemeinen Maße müssen dann

bei diesen Transformationen ebenso unveränderlich bleiben, wie die gewöhnlichen bei Bewegungen. Wird dann die Lage eines Elementes im Gebilde erster Stufe durch den Wert z des Verhältnisses zweier Veränderlichen $x_1 : x_2$ bestimmt, so ist $z' = \lambda z$ die Form der fraglichen Transformation, sobald wir die absoluten Elemente als die fundamentalen nehmen, d. h. durch $z = 0$ und $z = \infty$ ausdrücken. Durch die wiederholte Anwendung dieser Transformation auf ein Element z entsteht dann die Elementenreihe z, λz, $\lambda^2 z$, $\lambda^3 z$, usw. als die Skala, die durch die erzeugende Transformation in sich selbst übergeht. Dabei ist λ nur der Beschränkung unterworfen, daß alle Elemente mit z reell sind und in einerlei Sinn auf einander folgen. Ist der Skalenteil die *Einheit* des Abstandes, so sind die Abstände der bezeichneten Elemente von dem Elemente z gleich $0, 1, 2, 3$, usw. Die Unterabteilung der Skala wird dann durch eine Transformation $z' = \lambda^{\frac{1}{n}} z$ bewirkt, bei der man die n^{te} Wurzel so zu wählen hat, daß das bezeichnete Element zwischen z und λz liegt.

Dann ist der Exponent von λ der Ausdruck des Abstandes, oder *der Abstand des Elementes z vom Elemente z' ist gleich dem durch die Konstante* $\log \lambda$ *dividierten Logarithmus des Quotienten $z' : z$*. Da aber $z' : z$ das Doppelverhältnis der beiden bezeichneten Elemente als Teilelemente des absoluten Paares ist, so definieren wir den *Abstand zweier Elemente als den mit einer Konstanten c multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, das sie mit dem absoluten Paar bilden.*

Dabei ist die Befriedigung jener Addierbarkeitsbedingung klar. Den analytischen Ausdruck des Abstandes erhalten wir nun, wenn das Absolute wieder allgemein durch $f(x, x) = 0$ gegeben ist, indem wir nach Nr. 329, 1 das Doppelverhältnis bilden, das die Elemente x_i, y_i mit dem absoluten Paar bestimmen, also

$$(32) \qquad (E_1 E_2 E^0 E') = \frac{f(x, y) - \sqrt{f^2(x, y) - f(x, x) f(y, y)}}{f(x, y) + \sqrt{f^2(x, y) - f(x, x) f(y, y)}},$$

und der Abstand ist somit der $c$fache log desselben. Wegen

$$c \log a = 2ic \cdot \arccos \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

erhält man aber für diesen Abstand auch den Ausdruck

$$(33) \qquad c \log (E_1 E_2 E^0 E') = 2ic \cdot \arccos \frac{f(x,y)}{\sqrt{f(x,x)\, f(y,y)}},$$

der für $c = -\frac{1}{2}i$ in den Ausdruck von Nr. 375 und 377 übergeht.

Die beiden Elemente des Absoluten sind als unendlich fern zu betrachten, denn ihr Abstand von einem beliebigen anderen Element ist unendlich groß, nämlich $c \cdot \log 0$ oder $c \cdot \log \infty$. Wenn die Punkte des Absoluten reell gedacht werden, so können von einem beliebigen Elemente aus nur die Abstände in *dem* Gebiete zwischen jenen gemessen werden, in dem jenes Element selbst liegt; dies Gebiet ist durch zwei unendlich ferne Elemente begrenzt, und von dem Gebiete jenseits derselben ist eine Kenntnis nicht erreichbar. Dies ist die Vorstellung der sogenannten *hyperbolischen Maßbestimmung.*[119])

Wünschen wir dann, daß der Abstand reeller Elemente einen reellen Wert erhalte, so müssen wir, weil $(E_1 E_2 E^0 E')$ dann positiv ist, der Konstanten c einen reellen Wert beilegen und formell den logarithmischen vor dem zyklometrischen Ausdruck bevorzugen.

Sind dagegen die Elemente des Absoluten konjugiert imaginär, so müssen wir zuerst der Konstanten c einen rein imaginären Wert $c'i$ geben, damit der Abstand reeller Elemente reell sei. Alsdann ist ein solcher Abstand *stets* reell, aber nur nach der Periodizität des Logarithmus bis auf Vielfache einer reellen Periode $2\pi i c = -2\pi c'$ bestimmt; es gibt keine reellen unendlich fernen Elemente. Die Gerade kehrt wie der sich drehende Strahl in sich zurück, und die Periode ist ihre Gesamtlänge. Soll diese, wie die Drehung im Büschel, π betragen, so ist $c' = -\frac{1}{2}$ zu nehmen. Man hat so in der Winkelmessung ein Abbild für die Vorstellungen der *elliptischen Maßbestimmung.*

379. **Parabolische Messung.** Die am Schluß von Nr. 377 betrachtete besondere Maßbestimmung unter Voraussetzung des Zusammenfallens der beiden Elemente des absoluten Paares

entspricht der einzig möglichen besonderen Art linearer Transformationen, bei denen *ein* doppelt zählendes Element ungeändert bleibt. Man kommt so auf die *parabolische Maßbestimmung*, deren bekanntes Beispiel die gewöhnliche Messung in der Geraden der Euklidischen Geometrie bietet. Ihr allgemeiner analytischer Ausdruck ergibt sich durch den früheren Grenzübergang, bei dem der verschwindende Faktor $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$ mit einem unendlich groß zu nehmenden c zu dem endlichen Werte $(b_1c_2 - b_2c_1)$ zu vereinigen ist. Der nicht mehr vieldeutige, algebraische Ausdruck gibt den Abstand als Differenz zweier Doppelverhältnisse, die noch von dem willkürlichen Element $c_1 \mid c_2$ abhängen.

Die Zurückführung auf Doppelverhältnisse macht die Untersuchung entscheidend über die Frage nach den überhaupt möglichen Maßbestimmungen der Geometrie, sofern jene als reine Zahlen *unabhängig* von einer Maßbestimmung erklärt werden können.

Von besonderem Werte ist nun, daß *in der Nähe eines bestimmten Elementes die allgemeine Maßbestimmung stets bis auf Glieder höherer Ordnung genau durch die besondere ersetzt werden kann*; für diese Beziehung erscheint der Ausdruck *Berührung der beiden Maßbestimmungen* geeignet. Man muß dazu das dem gegebenen Berührungselement in bezug auf das absolute Paar der allgemeinen Maßbestimmung harmonisch konjugierte Element als das absolute Element der besonderen Maßbestimmung wählen und die Konstanten geeignet bestimmen.

Sind etwa die Elemente des absoluten Paares, als harmonisch zu $z = 0$ und $z = \infty$ gelegen, durch $z^2 = -a^2$ bestimmt, so findet man den Abstand des Elementes z vom Koordinatenanfang nach der allgemeinen Maßbestimmung als

$$= 2ci \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{a} = 2ci\left\{\frac{z}{a} - \frac{z^3}{3a^3} + \frac{z^5}{5a^5} - \cdot + \cdots\right\},$$

und nach der in $z = 0$ berührenden besonderen

$$= 2ci\,\frac{z}{a},$$

wenn man die Konstante so wählt, daß sie mit dem ersten

Glied der Klammer übereinstimmt. Nehmen wir z. B. die gewöhnliche Streckenmessung in der Geraden, so daß z den Abstand vom Nullpunkt bedeutet, und die gewöhnliche Winkelmessung in dem Büschel, dessen Strahlen absoluter Richtung die Punkte $z^2 = -1$ ausschneiden, so ist der die Strecke z projizierende Winkel bestimmt durch $\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots$, in der Tat der besondere Fall für $2ci = 1$.

Die Übereinstimmung der allgemeinen und der besonderen Maßbestimmung gilt nur in der Nachbarschaft des Berührungselementes. Weiterhin bleibt eine elliptische gegen die berührende parabolische stets zurück, d. h. gibt kleinere Werte der Entfernungen für dieselben Punkte wie diese ($a > 0$), während eine hyperbolische der parabolischen voraneilt, d. h. größere Abstandszahlen gibt ($a < 0$). *Diese Abweichung der allgemeinen Maßbestimmung von der parabolischen nennt man Krümmung derselben.* Man definiert als ihr *Krümmungsmaß* $-\frac{1}{4c^2}$, nämlich das negativ genommene Verhältnis des dreifachen zweiten Gliedes der Reihe zum Kubus des ersten. Das Krümmungsmaß ist also bei reellen Elementen des Absoluten negativ und bei imaginären positiv (für $c = -\frac{1}{2}i$ gleich Eins); für die parabolische Maßbestimmung, der eine unendlich große Konstante entspricht, ist es aber Null.

380. **Metrische Grundlagen zweiter Stufe.** Das System der einen gegebenen Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ doppelt berührenden oder *ihm eingeschriebenen Kegelschnitte* war in Punktkoordinaten durch $f(x, x) + \lambda v_x^2 = 0$ und in Linienkoordinaten durch $F(u, u) + \varkappa y_u^2 = 0$ ausgedrückt. Wir nennen wieder die Berührungssehne $v_x = 0$ oder v_i *Achse der Einschreibung* und den Pol $y_u = 0$ oder y_i der Berührungssehne *Mittelpunkt der Einschreibung.* Wir schreiben daher die Gleichungen von v_i und y_i in der Form von Polaren:

$$(34)\quad \begin{cases} v_x \equiv f(y, x) \equiv a_{11} y_1 x_1 + \cdots + a_{12}(y_1 x_2 + y_2 x_1) + \cdots = 0, \\ A y_u \equiv F(v, u) \equiv A_{11} v_1 u_1 + \cdots + A_{12}(v_1 u_2 + v_2 u_1) + \cdots = 0. \end{cases}$$

Hierbei bestehen (vgl. (32), S. 136) die Identitäten

$$(35)\quad \begin{cases} f(y,y)f(x,x) - f^2(y,x) = A_{11}(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + \cdots \\ \qquad + 2A_{23}(x_3y_1 - x_1y_3)(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots, \\ F(v,v)F(u,u) - F^2(v,u) = A\{a_{11}(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + \cdots \\ \qquad + 2a_{23}(u_3v_1 - u_1v_3)(u_1v_2 - u_2v_1) + \cdots. \end{cases}$$

Infolge der ersten Identität können wir, für θ als eine Konstante, der Ortsgleichung des eingeschriebenen Kegelschnittes, für den Punkt y_i als Mittelpunkt der Einschreibung, die beiden äquivalenten Formen erteilen

$$(36)\quad \begin{cases} f(y,y)f(x,x)\cos^2\theta - f^2(y,x) = 0, \quad f(y,y)f(x,x)\sin^2\theta \\ \qquad -\{A_{11}(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + \cdots \\ \qquad + 2A_{23}(x_3y_1 - x_1y_3)(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots\} = 0. \end{cases}$$

Damit nun die Form $f(y,y)f(x,x)\cos^2\theta - f^2(y,x) = 0$ mit der vorausgesetzten Form $f(x,x) + \lambda f^2(y,x) = 0$ übereinstimme, muß sein $\lambda = -1 : f(y,y)\cos^2\theta$, wofür auch $\lambda = -A : F(v,v)\cos^2\theta$ gesetzt werden kann, denn für

$$v_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 = \tfrac{1}{2}f'(y_i) \text{ wird } F(v,v) = Af(y,y).$$

Der zweiten Identität (35) gemäß können wir analog die Tangentialgleichung desselben eingeschriebenen Kegelschnittes in äquivalenten Formen darstellen. Um aber dieselbe Konstante θ brauchen zu können, müssen wir uns erinnern, daß die zu $f(x,x) + \lambda f^2(y,x) = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten von der Form $F(u,u) + \varkappa F^2(v,u) = 0$ sein muß. Tatsächlich findet man für sie:

$$\{A + \lambda F(v,v)\}F(u,u) - \lambda F^2(v,u) = 0.$$

Somit ist $\varkappa = -\lambda : \{A + \lambda F(v,v)\} = -1 : F(v,v)\sin^2\theta$, und das Paar der äquivalenten Formen der Tangentialgleichung desselben eingeschriebenen Kegelschnittes lautet

$$(37)\quad \begin{cases} F(v,v)F(u,u)\sin^2\theta - F^2(v,u) = 0, \\ F(v,v)F(u,u)\cos^2\theta - A\{a_{11}(v_2u_3 - v_3u_2)^2 + \cdots \\ \qquad + 2a_{23}(v_3u_1 - v_1u_3)(v_1u_2 - v_2u_1) + \cdots\} = 0. \end{cases}$$

Ähnlich wie in Nr. 375 erhält man die durch Bildung des Determinantenprodukts zu beweisende Identität

$$(38)\quad \begin{vmatrix} f(x,x) & f(x,y) & f(x,z) \\ f(y,x) & f(y,y) & f(y,z) \\ f(z,x) & f(z,y) & f(z,z) \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2.$$

Da für drei Punkte einer Geraden die Determinante rechts verschwindet, ist wieder wie in Nr. 375

$$f(x,x)f(y,y)f(z,z) + 2f(x,y)f(y,z)f(z,x) - f(x,x)f^2(y,z) - f(y,y)f^2(z,x) - f(z,z)f^2(x,y) = 0,$$

d. h. nach den vorher entwickelten Beziehungen

$$(39)\qquad \left\{\begin{array}{l} \arccos \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{f(x,x)f(y,y)}} + \arccos \dfrac{f(y,z)}{\sqrt{f(y,y)f(z,z)}} \\ \qquad = \arccos \dfrac{f(x,z)}{\sqrt{f(x,x)f(z,z)}}. \end{array}\right.$$

381. **Absoluter Kegelschnitt.** Man denke einen Kegelschnitt innerhalb des ebenen Systems als unveränderlich — wir nennen ihn *den absoluten Kegelschnitt* — so kommt zunächst die Theorie von Nr. 376, 378, 379 mit ihm in folgenden Zusammenhang. *Jedes Elementargebilde erster Stufe hat mit dem absoluten Kegelschnitt zwei Elemente gemeinsam* — nämlich eine Punktreihe das Paar der Schnittpunkte, ein Strahlenbüschel das Paar der berührenden Strahlen — *die das absolute Paar dieses Gebildes liefern.* Insbesondere wird für die Tangenten des absoluten Kegelschnittes als Träger von Reihen das absolute Paar ein Paar zusammenfallender Punkte und für die Punkte des absoluten Kegelschnittes als Träger von Büscheln ein Paar zusammenfallender Strahlen. Die Theorie der Abstände für jedes einzelne von allen diesen Gebilden erster Stufe ist in den genannten Nummern enthalten, und es bleibt nur die Vergleichbarkeit derselben von einem Gebilde zum andern zu begründen. Dies geschieht aber einfach durch die Voraussetzung, *daß die Einheit des Abstandes für dieselben, der Quadrant, von einem Gebilde zum andern und für alle Gebilde des Systems dieselbe Größe sei* — eine Voraussetzung, die dadurch schon im Vorigen stillschweigend gemacht ist, daß der Quadrant durch das Symbol $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet wurde.

Nennt man dann den Pol einer Geraden, bez. die Polare eines Punktes in bezug auf den absoluten Kegelschnitt den absoluten Pol, bez. die absolute Polare, so gilt ferner das Gesetz: *Der Abstand zweier Punkte oder zweier Geraden ist gleich dem Abstand ihrer absoluten Polaren bez. ihrer absoluten Pole.* Denn die Doppelverhältnisse in zusammengehörigen Pol-

reihen und Polarenbüscheln sind untereinander gleich. Damit ist eine Vergleichbarkeit der Messung von Strecken und Winkeln begründet, infolgedessen *in dieser Geometrie von allgemeiner Maßbestimmung die metrischen Beziehungen in gleicher Weise dem Dualitätsprinzip unterliegen, wie die projektiven.*

Unter der Entfernung eines Punktes von einer Geraden hat man seinen Abstand von dem Schnittpunkt der Geraden mit dem ihn enthaltenden Lote derselben zu verstehen; dieses ist die Verbindungslinie des Punktes mit dem absoluten Pol der Geraden (Nr. 374). Danach ist die Entfernung eines Punktes von seiner absoluten Polare (wie von allen seinen konjugierten Polen) oder die Entfernung einer Geraden von ihrem absoluten Pol (wie von allen ihren konjugierten Polaren) ein Quadrant. *Daher ist die Entfernung eines Punktes von einer Geraden das Komplement der Entfernung der absoluten Polare des Punktes von der Geraden oder auch das Komplement der Entfernung des absoluten Pols der Geraden vom Punkte.*

Ein dem absoluten Kegelschnitt eingeschriebener Kegelschnitt heißt Kreis, und der Mittelpunkt und die Achse der Einschreibung *heißen der Mittelpunkt und die Achse des Kreises.* Auf allen Strahlen durch den Mittelpunkt bilden die Schnittpunkte mit dem Kreise Kreispaare nach Nr. 376. Also sind alle Punkte des Kreises äquidistant vom Mittelpunkt und ebenso alle Tangenten des Kreises äquidistant von seiner Achse, wobei diese letzte Entfernung das Komplement der ersten ist.

382. **Abstandsformeln.** Damit ergibt sich die *analytische Ausdrucksform der gewonnenen Begriffe.* Stellt $f(x,x)=0$ oder $F(u,u)=0$ den absoluten Kegelschnitt dar, so ist die Ortsgleichung des Kreises vom Mittelpunkt y_i (Nr. 380) entweder

$$(40)\quad \begin{cases} f(y,y)f(x,x)\cos^2\theta - f^2(y,x) = 0 \quad \text{oder} \quad f(y,y)f(x,x)\sin^2\theta \\ -\{A_{11}(x_2y_3-x_3y_2)^2+\cdots+2A_{23}(x_3y_1-x_1y_3)(x_1y_2-x_2y_1)+\cdots\}=0. \end{cases}$$

Nach ganz analogem Gedankengange wie in Nr. 377 erhält man den Abstand der Punkte x_i, y_i in einer der beiden Formen

$$(41)\quad \begin{cases} \operatorname{arc\,cos} \dfrac{a_{11}x_1y_1 + \cdots + a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)}{\sqrt{(a_{11}x_1^2+\cdots+2a_{12}x_1x_2)(a_{11}y_1^2+\cdots+2a_{12}y_1y_2)}}, \\ \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\dfrac{A_{11}(x_2y_3-x_3y_2)^2+\cdots+2A_{23}(x_3y_1-x_1y_3)(x_1y_2-x_2y_1)}{(a_{11}x_1^2+\cdots+2a_{12}x_1x_2)(a_{11}y_1^2+\cdots+2a_{12}y_1y_2)}}. \end{cases}$$

Auch gilt für die Abstände zwischen drei Punkten einer Geraden

$$\text{Abst.}\,(E, E') + \text{Abst.}\,(E', E'') = \text{Abst.}\,(E, E'').$$

Ist ferner v_i die Achse der Einschreibung, so ist die Tangentialgleichung des Kreises

$$(42)\quad \begin{cases} F(v, v)\,F(u, u)\,\sin^2\theta - F^2(v, u) = 0 \\ \text{oder}\quad F(v, v)\,F(u, u)\,\cos^2\theta - A\{a_{11}(v_2 u_3 - v_3 u_2)^2 + \cdots \\ \qquad + 2a_{23}(v_3 u_1 - v_1 u_3)(v_1 u_2 - v_2 u_1) + \cdots\} = 0. \end{cases}$$

Der „Abstand“ der beiden Geraden mit den Koordinaten u_i, v_i ist daher

$$(43)\quad \begin{cases} \arccos \dfrac{A_{11}u_1 v_1 + \cdots + A_{23}(u_2 v_3 + u_3 v_2) + \cdots}{\sqrt{A_{11}u_1{}^2 + \cdots + 2A_{23}u_2 u_3 + \cdots}\,\sqrt{A_{11}v_1{}^2 + \cdots + 2A_{23}v_2 v_3 + \cdots}} \\ \text{oder} \\ \arcsin \sqrt{\dfrac{A\{a_{11}(v_2 u_3 - v_3 u_2)^2 + \cdots + 2a_{23}(v_3 u_1 - v_1 u_3)(v_1 u_2 - v_2 u_1) + \cdots\}}{(A_{11}u_1{}^2 + \cdots + 2A_{23}u_2 u_3 + \cdots)(A_{11}v_1{}^2 + \cdots + 2A_{23}v_2 v_3 + \cdots)}}. \end{cases}$$

Indem man endlich in der ersten Formel (41) die y_i gemäß (34) durch $(A_{i1}v_1 + A_{i2}v_2 + A_{i3}v_3) : A$ und in der ersten Formel (43) die u_i durch $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$, zugleich arc cos durch arc sin ersetzt, erhält man für den Abstand des Punktes x_i von der Geraden v_i den Ausdruck

$$(44)\quad \left\{ \arcsin \frac{(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)\sqrt{A}}{\sqrt{a_{11}x_1{}^2 + \cdots + 2a_{23}x_2 x_3 + \cdots}\,\sqrt{A_{11}v_1{}^2 + \cdots + 2A_{23}v_2 v_3 + \cdots}} \right. .$$

Auch die Formeln von Nr. 378 lassen sich unmittelbar auf das ternäre Gebiet übertragen, da der symbolische Ausdruck für das Doppelverhältnis zweier Elemente mit dem absoluten Gebilde zweiten Grades unverändert bleibt. Die Entfernung zweier Punkte x_i, y_i, bez. der Winkel zweier Geraden u_i, v_i sind dann

$$(45)\quad \begin{cases} c \log \dfrac{f(x, y) + \sqrt{f^2(x, y) - f(x, x) f(y, y)}}{f(x, y) - \sqrt{f^2(x, y) - f(x, x) f(y, y)}}, \\ \text{bez.}\quad c' \log \dfrac{F(u, v) + \sqrt{F^2(u, v) - F(u, u)\,F(v, v)}}{F(u, v) - \sqrt{F^2(u, v) - F(u, u)\,F(v, v)}}, \end{cases}$$

wo c, c' zwei beliebig, aber fest gewählte Konstanten bedeuten, die nach Nr. 378 passend zu spezialisieren sind.

Hiernach erscheint der absolute Kegelschnitt als das Unendlichferne der Ebene, nämlich als der Ort der Punkte, die

von jedem anderen Punkte einen unendlich großen Abstand haben, und als die Hüllkurve der Geraden, die mit jeder anderen Geraden einen unendlich großen Winkel bilden. Irgend zwei Punkte auf einer Tangente dieses Kegelschnittes haben den Abstand Null, irgend zwei Strahlen durch einen seiner Punkte bilden den Winkel Null, denn das definierende Doppelverhältnis hat den Wert Eins.

383. **Bewegungen in der Ebene.** Es erübrigt noch nachzuweisen, daß diese Theorie der allgemeinen Maßbestimmung in der Ebene mit den besonderen linearen Transformationen, die den Bewegungen in der Ebene entsprechen, im engsten Zusammenhang steht.[120] (Vgl. Nr. 378.)

Ein gegebener absoluter Kegelschnitt kann durch dreifach unendlich viele lineare Transformationen in sich selbst übergeführt werden. Bei einer solchen Transformation bleiben offenbar im allgemeinen zwei Punkte, die Doppelpunkte der projektiven Punktreihen sowie auch die zugehörigen Tangenten des Kegelschnittes, unverändert. Werden diese mit ihrer Berührungssehne als Fundamentaldreieck zugrunde gelegt, so hat die Gleichung des absoluten Kegelschnittes die Form $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$

Die Transformation

(46) $$x_1 = \lambda_1 x_1', \quad x_2 = \lambda_2 x_2', \quad x_3 = \lambda_3 x_3'$$

führt diesen Kegelschnitt in sich selbst über, wenn man hat

$$\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2 = 0.$$

Also ist dies noch auf einfach unendlich viele Arten möglich.

Da hierbei das Verhältnis $x_1 x_3 : x_2^2$ seinen Wert behält, so gehen alle Kegelschnitte des Büschels $x_1 x_3 - k x_2^2 = 0$ in sich selbst über. Hier hat man nun die reellen Transformationen in zwei Gruppen zu scheiden, jenachdem $\lambda_2 = +\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}$ oder $\lambda_2 = -\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}$ ist. Die der ersten Gruppe geben durch Wiederholungen und Kombinationen unter einander nur wieder solche, die der zweiten aber liefern je zu zweien eine der ersten. Sind z. B. der Kegelschnitt und die Doppelpunkte reell, so werden diese von je einem Paar homologer Punkte getrennt oder nicht getrennt. Nur die Transformationen der ersten Gruppe lassen sich durch Wiederholung einer reellen, beliebig kleinen Transformation derselben Art erzeugen, und

sollen als *Bewegungen der Ebene* bezeichnet werden; die der anderen Gruppe sind analog zu den Transformationen, die symmetrisch gleiche Figuren erzeugen.

Dann ist das Vorige in dem Satze zusammengefaßt: *Bei einer Bewegung der Ebene geht der absolute Kegelschnitt in sich selbst über, und ebenso jeder Kegelschnitt (Kreis), der ihn in den beiden festbleibenden Punkten berührt.* Der Berührungspol ist der gemeinsame Mittelpunkt dieser Kreise, und die *Bewegung der Ebene* darf daher als eine *Rotation um diesen Punkt betrachtet werden.*

Da die Kreise auch dieselbe Achse haben und dual entsprechende Eigenschaften gegen diese, *so ist Bewegung oder also Rotation ein sich selbst dualer Begriff.*

Fällt insbesondere der Mittelpunkt der Rotation in den absoluten Kegelschnitt selbst, d. h. unendlich fern, so wird die Bewegung als *Translation der Ebene* zu bezeichnen sein. Die Bahnen der Punkte der Ebene sind Kegelschnitte, die den absoluten im Mittelpunkt der Translation vierpunktig berühren, nicht aber gerade Linien.

Nach diesen Erklärungen ist offenbar der Satz begründet: *Bei den Bewegungen der Ebene bleiben die Maßverhältnisse ungeändert.* Diese Unveränderlichkeit der Maßverhältnisse gilt aber auch von der anderen Art der den absoluten Kegelschnitt in sich überführenden Transformationen und überdies von den im nächsten Kapitel einzuführenden reziproken Substitutionen.

Sobald jedoch der absolute Kegelschnitt selbst zerfällt, geht er nicht nur durch dreifach, sondern durch vierfach unendlich viele lineare Substitutionen in sich selbst über. Dreifach unendlich viele lassen sich in zwei Gruppen teilen, die den Beziehungen der Kongruenz — und diese sind die Bewegungen der Ebene — und der Symmetrie entsprechender Figuren zukommen; die ersten lassen jeden der beiden Punkte bez. Strahlen des zerfallenen absoluten Kegelschnittes ungeändert, die letztgenannten vertauschen dieselben miteinander. Der noch übrig bleibenden einfach unendlichen Reihe der erwähnten Transformationen entspricht aber die Verallgemeinerung der direkten und der inversen Ähnlichkeit entsprechender Figuren.

384. **Elliptische und hyperbolische Geometrie** sind die für die Geometrie allgemeiner Maßbestimmung gebräuchlichen Namen, jenachdem der absolute Kegelschnitt derselben imaginär oder reell ist (vgl. Nr. 378). In der *elliptischen Geometrie* gibt es weder reelle unendlich ferne Punkte noch reelle Geraden, die mit anderen unendlich große Winkel bilden. Demzufolge kann man zu einer reellen Geraden durch einen reellen Punkt *keine reelle Parallele* ziehen. Eine weitere Folgerung zeigt dann, daß *die Winkelsumme im Dreieck nicht konstant sondern größer als zwei Rechte ist* und zwar um so größer, je größer das Dreieck ist.

Diese Eigenschaften weisen auf bekannte Besonderheiten der *Geometrie auf der Kugel* hin. Man kann die gewöhnliche sphärische Trigonometrie geradezu ein Beispiel zur allgemeinen elliptischen Geometrie nennen. Namentlich zeigt die sphärische Geometrie die volle Herrschaft des Dualitätsprinzips. Streng genommen bezieht sich jedoch das Beispiel der elliptischen Geometrie nur auf die Geometrie der Durchmesser und Diametralebenen der Kugel, sofern sie am Mittelpunkt ein *Bündel* bilden. Ist der Scheitel dieses Bündels in der Entfernung Eins von der Ebene unserer Untersuchungen, so können wir den Abstand zweier Punkte der Ebene durch den Winkel ihrer Verbindungslinien mit dem Scheitel, den Winkel zweier Strahlen der Ebene durch den Winkel ihrer Verbindungsebenen mit dem Scheitel messen.

Ist der absolute Kegelschnitt reell, so gilt an allen Punkten außerhalb desselben und auf allen ihn schneidenden Strahlen die hyperbolische, an allen Punkten des Innern und auf allen ihn nicht reell schneidenden Strahlen die elliptische Maßbestimmung. Nur ein Büschel, dessen Scheitel im Innern liegt, kann von einem rotierenden Strahle desselben vollständig durchlaufen werden. Irgend zwei Punkte des Innern haben einen endlichen, reellen Abstand, wenn wir die am Schluß von Nr. 382 eingeführte Konstante c nach Nr. 378 reell wählen. Denken wir uns im *Innern des Absoluten*, so kann keine Bewegung (Nr. 383) uns aus demselben herausführen, sondern für uns ist *die Ebene durch den selbst uner-*

reichbaren absoluten Kegelschnitt völlig begrenzt. Über das Äußere können wir also gar nichts aussagen, was wir nicht durch besondere Definition einführen. Die Geometrie im Inneren des absoluten Kegelschnittes, etwa eines Kreises, kommt der gewöhnlichen um so näher, je größer der Kreis ist.

Wir haben in dieser Geometrie neben Geraden, deren Schnittpunkt im Inneren liegt, auch solche, die sich nicht, d. h. im Äußeren schneiden und einen imaginären Winkel einschließen. Strahlen, die sich auf dem absoluten Kegelschnitt schneiden, bilden den Winkel Null, sind also parallel. Durch einen Punkt gibt es somit zu einer Geraden *zwei Parallelen*, die einen Winkel einschließen, dessen Größe von dem Abstand des Punktes von der Geraden abhängt. In dieser Geometrie ist *die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte*, und zwar um so kleiner, je größeı das Dreieck ist.

385. **Parabolische Geometrie.** Nimmt man als *absoluten Kegelschnitt ein Punktepaar* an*), so vertritt dessen Verbindungslinie doppelt zählend den absoluten Kegelschnitt als Ort (Nr. 311). Eine gerade Punktreihe hat mit diesem nur zusammenfallende Punkte gemeinsam; *die Metrik aller geraden Reihen des Systems ist daher speziell oder parabolisch* (Nr. 379), während dies bei einem wirklichen absoluten Kegelschnitt nur für diejenigen Reihen eintritt, deren Träger ihn berühren. Weil dagegen jeder Punkt des Systems — mit alleiniger Ausnahme derer, die in der absoluten Geraden liegen — mit den beiden Punkten des absoluten Kegelschnittes ein Paar von Tangenten (Verbindungslinien) bestimmt, so *bleibt die Metrik des Strahlenbüschels durch die allgemeinen Formeln von* Nr. 378 *gegeben.*

Die Vergleichbarkeit der Abstände von Punkten in verschiedenen Geraden fällt hinweg mit dem Verschwinden des Quadranten als der allgemeinen Einheit der Distanz. Nennt man aber einen durch die beiden Punkte des Absoluten gehenden (eingeschriebenen) Kegelschnitt einen *Kreis*, so kann dieser *zur Vergleichung solcher Abstände in verschiedenen Geraden*

*) Ebenso kann offenbar eine Geometrie gedacht werden, bei der das Absolute aus einem Geradenpaar besteht.

dienen. Der Pol der absoluten Geraden in bezug auf ihn wird sein Mittelpunkt, jene Gerade seine Achse der Einschreibung genannt, und es wird vorausgesetzt, daß alle Punkte des Kreises von seinem Mittelpunkt gleichen Abstand haben. Die Konstruktion des Euklid, um durch einen Punkt A eine Strecke AD oder AD' gleich der Strecke BC zu ziehen (Fig. 38), gilt nach den hier gemachten Voraussetzungen: Man zieht AB, konstruiert über dieser Strecke das gleichseitige Dreieck ABE, verlängert seine Seiten, EA, EB über A und B hinaus, um von B aus auf die letzte $BF = BC$ abzutragen und dann aus E mit dem Kreise durch F die erste in D zu schneiden.

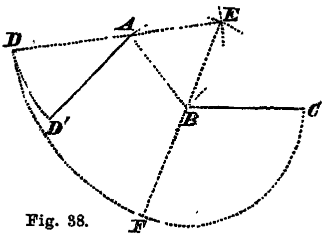


Fig. 38.

Da aber die Längeneinheit in der Metrik der geraden Punktreihe unbestimmt ist, *so fällt die Möglichkeit einer Vergleichung der Abstände innerhalb der Reihe mit Abständen (Winkeln) innerhalb des Büschels weg.* Dagegen kann *der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g* mit dem Abstand zweier Punkte verglichen werden, da er der Abstand desjenigen Punktes der Geraden g von P ist, in dem diese von dem zu ihr in bezug auf das absolute Punktepaar konjugiert harmonischen Strahle geschnitten wird.

Werden die Koordinaten der beiden Punkte des absoluten Kegelschnittes durch z_i' und z_i'' bezeichnet, so lautet seine Gleichung in Linienkoordinaten ($A = 0$):

$$(47)\quad F(u,u) \equiv 2(z_1'u_1 + z_2'u_2 + z_3'u_3)(z_1''u_1 + z_2''u_2 + z_3''u_3) = 0.$$

Mit der leicht verständlichen Bezeichnung der Determinante aus den Koordinaten dreier Punkte lautet die Gleichung der absoluten Geraden $(x, z', z'') = 0$ und es tritt $(x z' z'')^2$ an die Stelle von $Af(x, x)$ (Nr. 311). Daher gelten für den Abstand zweier Geraden u_i, v_i die Ausdrücke

$$(48)\quad \left\{ \begin{array}{c} \arccos \dfrac{u_{z'}v_{z''} + v_{z'}u_{z''}}{\sqrt{F(u,u)\cdot F(v,v)}}, \\ \arcsin \dfrac{\sqrt{-1}(z_2'z_3'' - z_3'z_2'')(u_2v_3 - u_3v_2) + \cdots}{\sqrt{F(u,u)\cdot F(v,v)}}. \end{array} \right.$$

Für den Abstand zweier Punkte x_i, y_i dagegen erhält man aus dem arc sin durch denselben Grenzübergang wie in Nr. 377 und mit einem verfügbaren Faktor C den algebraischen Ausdruck

$$(49)\qquad C\cdot\frac{\sqrt{2(xyz')(xyz'')}}{(xz'z'')(yz'z'')},$$

dessen Zähler, gleich Null gesetzt, angibt, daß die Verbindungsgerade x_i, y_i durch einen der absoluten Punkte geht.

Die elementare Metrik der Ebene ist derjenige besondere Fall der parabolischen Metrik, bei dem die *imaginären Kreispunkte* den absoluten Kegelschnitt darstellen (vgl. B. 1) 2)). Die rechtwinkligen Koordinaten sind zu den metrischen Untersuchungen besonders geeignet infolge der einfachen Beziehung ihrer Fundamentalelemente zum imaginären Kreispunktepaar.

B. 1) Wenn man die Tangentialgleichung des absoluten Kegelschnittes in der Form $\omega(u, u) = 0$ von Nr. 371 voraussetzt, nehmen die vorigen Gleichungen bekannte besondere Formen an, wenn man setzt:

$$z_1' = z_1'' = 1,\quad z_2' = -\cos A_3 - i\sin A_3,\quad z_2'' = -\cos A_3 + i\sin A_3,$$
$$z_3' = -\cos A_2 + i\sin A_2,\quad z_3'' = -\cos A_2 - i\sin A_2.\ \text{(Vgl. Nr. 319.)}$$

Z. B. wird, wenn man in (49) die Konstante $C = -4:\sqrt{2}$ setzt,

$$\overline{xy} = \frac{\{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + \cdots - 2\cos A_1(x_3y_1 - x_1y_3)(x_1y_2 - x_2y_1) - \cdots\}^{\frac{1}{2}}}{(x_1\sin A_1 + \cdots)(y_1\sin A_1 + \cdots)}.$$

2) Setzt man

$$z_1' = 1,\quad z_2' = i,\quad z_3' = 0;\quad z_1'' = 1,\quad z_2'' = -i,\quad z_3'' = 0,$$

so wird die Gleichung des absoluten Kegelschnittes nach (47) $F(u, u) = 2(u_1^2 + u_2^2)$, und wenn man, wie bei rechtwinkligen Parallelkoordinaten, x_1, x_2, x_3 bez. durch $x, y, 1$ ersetzt, und u_1, u_2, u_3 bez. durch $u, v, 1$, sowie y_1, y_2, y_3 durch $x', y', 1$, so tritt $2(u^2 + v^2) = 0$ an Stelle von $F(u, u) = 0$, der absolute Kegelschnitt ist das imaginäre Kreispunktepaar, und die Einführung der genannten Ausdrücke in (49) ergibt mit $C = -4:\sqrt{2}$ für den Abstand der Punkte $x\,|\,y$ und $x'\,|\,y'$ die bekannte Formel

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Ebenso erhält man für den „Abstand" (Winkel) der Geraden $u\,|\,v\,|\,1$ und $u'\,|\,v'\,|\,1$:

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{u'^2+v'^2}}\quad\text{oder}\quad \operatorname{arc\,sin}\frac{uv' - vu'}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{u'^2+v'^2}}.$$

Endlich ist der Abstand des Punktes $x \mid y$ von der Geraden $u \mid v \mid 1$:

$$\frac{ux + vy + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

3) Man bestimme die Länge d der aus einer Geraden $v_x = 0$ durch den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ herausgeschnittenen Sehne bei Anwendung von trimetrischen Normalkoordinaten.

Die Schnittpunkte sind nach Nr. 316 reell, wenn

$$-F(v, v) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv \binom{v}{v}_{a_{ik}}$$

positiv ist, und zwar wird das Schnittpunktepaar in laufenden Linienkoordinaten u_i nach (11a) in Nr. 309 durch die Gleichung

$$\binom{u\,v}{u\,v}_{a_{ik}} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt, die, nach Potenzen der u_i geordnet, von der Form $\Sigma \mathfrak{a}_{ik} u_i u_k = 0$ ist. Bezeichnen wir mit y_i bez. z_i die Normalkoordinaten der Schnittpunkte der Geraden $v_x = 0$ mit der Kurve $f(x, x) = 0$, so muß daher die Gleichung $\Sigma \mathfrak{a}_{ik} u_i u_k = 0$ gleichbedeutend sein mit $y_u z_u = 0$, d. h. es muß eine Identität stattfinden von der Form $\Sigma \mathfrak{a}_{ik} u_i u_k \equiv \Theta y_u z_u$, wo Θ einen gewissen Proportionalitätsfaktor bedeutet, oder es muß $2\mathfrak{a}_{ik} \equiv \Theta(y_i z_k + y_k z_i)$ sein.

Sind nun l_1, l_2, l_3 die Längen der Seiten des Koordinatendreiecks, also $l_y = l_z = M$ dessen doppelter Inhalt, so wird

$$\Theta M^2 = \Theta l_y l_z = \Theta y_l z_l = \Sigma \mathfrak{a}_{ik} l_i l_k = \binom{v\,l}{v\,l}_{a_{ik}}.$$

Die rechts stehende Größe gibt durch ihr Verschwinden die Bedingung, unter der die gegebene Gerade einer Asymptote des Kegelschnittes parallel ist, denn die l_i sind den Koordinaten der unendlich fernen Geraden proportional. Ferner ist

$$\Theta^2 (y_2 z_3 - y_3 z_2)^2 = 4(\mathfrak{a}_{23}{}^2 - \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}) = 4 v_1{}^2 \binom{v}{v}_{a_{ik}},$$

also $$y_2 z_3 - y_3 z_2 = 2M^2 v_1 \sqrt{-F(v, v)} : \binom{v\,l}{v\,l}_{a_{ik}}$$ und

analog $$y_3 z_1 - y_1 z_3 = 2M^2 v_2 \sqrt{-F(v, v)} : \binom{v\,l}{v\,l}_{a_i},$$

$$y_1 z_2 - y_2 z_1 = 2M^2 v_3 \sqrt{-F(v, v)} : \binom{v\,l}{v\,l}_{a_{ik}}.$$

Nun ist das Quadrat des Abstandes zweier Punkte y_i, z_i gegeben durch die Formel

$$d^2 = \frac{l_1^2 l_2^2 l_3^2}{M^4}\{(y_1z_2-y_2z_1)^2+\cdots-2(y_2z_3-y_3z_2)(y_3z_1-y_1z_3)\cos A_3-\cdots\},$$

die sofort aus (28) in Nr. 74 (Teil 1, S. 139) hervorgeht, wenn man daselbst R durch $l_1 l_2 l_3 : 2M$ und a_1, a_2, a_3 der Reihe nach durch $y_2z_3 - y_3z_2$, $y_3z_1 - y_1z_3$, $y_1z_2 - y_2z_1$ ersetzt. Man erhält alsdann für d^2 den Ausdruck[121])

$$d^2 = -\frac{4 l_1^2 l_2^2 l_3^2 F(v,v)\{v_1^2+v_2^2+v_3^2-2v_2v_3\cos A_1-2v_3v_1\cos A_2-2v_1v_2\cos A_3\}}{\begin{pmatrix} v\,l \\ v\,l\end{pmatrix}^2_{a_{ik}}}.$$

Hier gibt die Klammer durch ihr Verschwinden die Bedingung $\omega(v,v)=0$, unter der die gegebene Gerade $v_x=0$ durch einen der unendlich fernen imaginären Kreispunkte geht.

Ist ferner $v_x - \lambda l_x = 0$ eine zur gegebenen Geraden parallele Sehne, so kann der Ausdruck für die Länge dieser Sehne erhalten werden, indem man in dem oben abgeleiteten Werte von d^2 die Größen v_i durch $v_i - \lambda l_i$ ersetzt. Vgl. auch Nr. 371, 3 und 229, 5.

386. **Verallgemeinerung metrischer Sätze.** Die Erkenntnis der wahren Natur der metrischen Beziehungen gestattet nunmehr in verschiedenen Fällen die projektiv allgemeine Gestalt von geometrischen Sätzen aufzufinden, wenn diese durch metrische Beziehungen, die sie enthalten, aus jenem Bereiche von Wahrheiten ausgeschlossen sind, die das Prinzip der Dualität verbindet. So ist es in dem Falle des Satzes (Nr. 321, 3) von der Berührung der einem Dreieck eingeschriebenen Kreise mit dem Kreise, der die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks enthält. Wir haben bereits auf analytischem Wege in Nr. 361, 4 die allgemeinere Form bewiesen, die diesem Satze zukommt: Die vier Kegelschnitte, die dieselben drei Punkte oder Tangenten gemeinsam haben und zugleich einen festen Kegelschnitt doppelt berühren, werden sämtlich von einem Kegelschnitt berührt, der mit dem gegebenen Kegelschnitt auch in doppelter Berührung ist. Die Auffassung der imaginären Kreispunkte als eines Kegelschnittes, der mit den eingeschriebenen Kreisen eine doppelte Berührung hat, weil jene in diesen liegen, führt ohne Weiteres zu dieser allgemeineren Form des Satzes. Wenn der gemeinschaftlich berührende Kreis die

Höhenfußpunkte des Dreiecks enthält, erkennt man, daß der gemeinschaftlich berührende Kegelschnitt durch diejenigen Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit den Geraden aus den bez. Gegenecken geht, die ihnen in bezug auf den festen Kegelschnitt konjugiert sind, usw.

B. 1) Man hat den elementaren Satz: Wenn man durch den Scheitel S eines rechten Winkels (Fig. 39) einen Kreis und an diesen drei Tangenten so legt, daß die zwischen dem Berührungspunkt und den Schenkeln des rechten Winkels enthaltenen Abschnitte einer jeden Aa, Aa'; Bb, Bb'; Cc, Cc' von je gleicher Länge sind, so bilden die Berührungspunkte und also auch die drei Tangenten ein gleichseitiges Dreieck. Hiernach ist der Kreis dem Tangentendreieck eingeschrieben und berührt also seine Seiten in ihren Mittelpunkten, d. h. in den konjugiert harmonischen zu den unendlich fernen Punkten der Seiten; somit ist die unendlich entfernte Gerade die Harmonikale desjenigen Punktes in bezug auf das Dreieck (vgl. Nr. 67, 1, 2), in dem sich die drei Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Gegenecken schneiden (Nr. 302), und sie ist zugleich seine Polare in bezug auf den Kreis. Die Schenkel des Winkels bSb' bilden mit den in jener unendlich entfernten Geraden gelegenen Punkten des Kreises eine harmonische Gruppe.

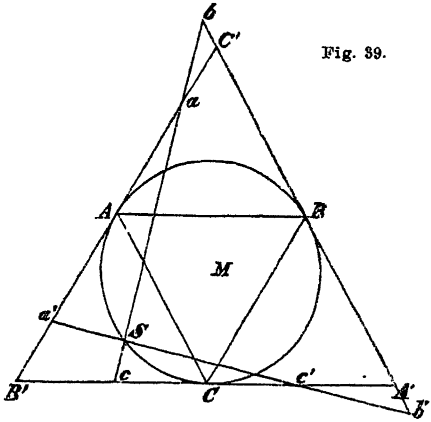


Fig. 39.

Denken wir dann einen Kegelschnitt, der irgend drei Geraden berührt, so ist die Polare des Schnittpunktes der drei von den Berührungspunkten nach den Gegenecken des umgeschriebenen Dreiecks gezogenen Geraden wieder die Harmonikale dieses Punktes in bezug auf das Dreieck; sie schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten, mit denen diejenigen Geraden eine harmonische Gruppe bilden, die die Schenkel des rechten Winkels vertreten. Sie bestimmen in den Dreiecksseiten Punkte, die mit den Ecken Involutionen erzeugen, für die jeder Berührungspunkt ein Doppelpunkt ist. Solche zwei Geraden also schneiden sich immer in der Peripherie des eingeschriebenen Kegelschnittes; ihre Schnittpunkte bilden mit den Seiten des Dreiecks, den bez. Berührungspunkten des ein-

geschriebenen Kegelschnittes und den Punkten in der Polare je ein harmonisches System; ihre Schnittpunkte mit je einer Seite liegen in einem Kegelschnitt, der den entsprechenden Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnittes zum Pol jener Polare hat, und für den und den eingeschriebenen Kegelschnitt sie eine gemeinsame Sehne ist.

Endlich aber darf man die Schenkel des rechten Winkels durch eine Kurve zweiter Ordnung ersetzen; denn die drei Punktepaare in den Seiten des Dreiecks, die mit den Ecken Involutionen bestimmen, die den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnittes zum Doppelpunkt haben, liegen in einem Kegelschnitt, der die Polare zu der ihm mit jener Kurve gemeinsamen Sehne hat. Dann gilt der Satz: Für jede Gerade, die mit diesen Kegelschnitten eine harmonische Teilung bestimmt, liegt der in bezug auf den einen genommene Pol in dem anderen.

2) Wenn zwei Kegelschnitte $f(x, x) = 0$ und $g(x, x) = 0$ und das gemeinschaftliche Polardreieck, ferner auf g zwei Punkte A, B und ihre Tangenten AT, BT, sowie die zu diesen in bezug auf $f(x, x) = 0$ harmonisch konjugierten Geraden AT', BT' gegeben sind, so bestimmt die Harmonikale von T in bezug auf das Polardreieck in g zwei Punkte C und D, für welche die zu ihren Tangenten in bezug auf f harmonisch konjugierten Geraden durch denselben Punkt T' gehen.

Denn in bezug auf den Kegelschnitt $f(x, x) \equiv \Sigma x_i^2 = 0$ sind die Geraden $a_x = 0$, $b_x = 0$ harmonisch konjugiert, wenn $\Sigma a_i b_i = 0$ ist. Sind also x_i' $(i = 1, 2, 3)$ die Koordinaten eines der betrachteten Punkte von $g(x, x) \equiv \Sigma \lambda_i x_i^2 = 0$, so ist die zu seiner Tangente in bezug auf den Kegelschnitt f konjugierte Gerade durch

$$(\lambda_2 - \lambda_3) x_2' x_3' x_1 + (\lambda_3 - \lambda_1) x_3' x_1' x_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) x_1' x_2' x_3 = 0$$

dargestellt, und sie schneidet die den Punkten x_i'', x_i''' entsprechenden Geraden derselben Art im nämlichen Punkte, wenn

$$\begin{vmatrix} x_2' x_3' & x_3' x_1' & x_1' x_2' \\ x_2'' x_3'' & x_3'' x_1'' & x_1'' x_2'' \\ x_2''' x_3''' & x_3''' x_1''' & x_1''' x_2''' \end{vmatrix} = 0$$

ist. Der Lage der Punkte x_i', x_i'', x_i''' auf dem Kegelschnitt $g(x, x) = 0$ entspricht $(x'^2, x''^2, x'''^2) = 0$, und da die Summe dieser und der doppelten ersten Determinante dem Produkte von

$$\{x_1'(x_2'' x_3''' + x_2''' x_3'') + x_1''(x_2''' x_3' + x_2' x_3''') + x_1'''(x_2' x_3'' + x_2'' x_3')\}$$

in die Determinante (x', x'', x''') gleich ist, so muß die erste dieser Größen gleich Null sein, weil die letzte es nicht sein kann. Die Gleichung der die Punkte x_i', x_i'' verbindenden Geraden liefert aber

für die Koordinaten ihres Pols T in bezug auf den Kegelschnitt $g(x, x) = 0$

$$\frac{x_2'x_3'' - x_2''x_3'}{\lambda_1} : \frac{x_3'x_1'' - x_3''x_1'}{\lambda_2} : \frac{x_1'x_2'' - x_1''x_2'}{\lambda_3},$$

d. h., da nach den Gleichungen $\lambda_1 x_1'^2 + \cdots = 0$, $\lambda_1 x_1''^2 + \cdots = 0$ die Beziehung besteht

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (x_2'^2 x_3''^2 - x_2''^2 x_3'^2) : (x_3'^2 x_1''^2 - x_3''^2 x_1'^2) : (x_1'^2 x_2''^2 - x_1''^2 x_2'^2),$$

auch $$\frac{1}{x_2'x_3'' + x_2''x_3'} : \frac{1}{x_3'x_1'' + x_3''x_1'} : \frac{1}{x_1'x_2'' + x_1''x_2'}.$$

Die Harmonikale dieses Punktes T in bezug auf das Fundamentaldreieck hat daher die Gleichung

$$x_1(x_2'x_3'' + x_2''x_3') + x_2(x_3'x_1'' + x_3''x_1') + x_3(x_1'x_2'' + x_1''x_2') = 0;$$

und da diese bei Einführung der Koordinaten x_i''' an Stelle von x_i in den vorhin aufgestellten verschwindenden Ausdruck übergeht, so enthält diese Gerade den Punkt C. Ein analoger Beweis gilt auch dem Punkt D.

Geht man bei der soeben durchgeführten Betrachtung nicht von den Gleichungen der beiden Kegelschnitte in Punktkoordinaten aus, sondern von ihren Gleichungen in Linienkoordinaten $\varphi(u, u) = 0$ bez. $\chi(u, u) = 0$, und läßt man $\varphi(u, u) = 0$ in das Paar der imaginären Kreispunkte ausarten, so werden die Geraden, die in bezug auf dieses Paar den in A und B, C und D gezogenen Tangenten von $\chi(u, u) = 0$ konjugiert sind, zu den Normalen von $\chi(u, u) = 0$ in A und B, C und D. Das gemeinschaftliche System harmonischer Pole liefert den Mittelpunkt und die unendlich fernen Punkte der Achsen von χ, und die Harmonikale des Pols T von AB in bezug auf dieses Poldreieck wird als die Verbindungslinie der Punkte erkannt, die in den Achsen auf den entgegengesetzten Seiten vom Mittelpunkt die Abstände des Punktes T haben; diese Gerade bestimmt auf χ das Paar von Punkten C, D, deren Normalen mit den Normalen in A und B in demselben Punkte T' zusammentreffen.[122])

3) Wenn man die Normale eines Kegelschnittes $f(x, x) = 0$ in einem seiner Punkte X_i als die zur Tangente in bezug auf einen andern festen — den absoluten — Kegelschnitt $g(x, x) = 0$ konjugierte Gerade durch den Punkt auffaßt, so besteht das Problem, *die Normalen von einem beliebigen Punkte y_i aus an den Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ zu ziehen*, darin, den Punkt X_i desselben so zu bestimmen, daß die Gerade yX durch den in bezug auf $g(x, x) = 0$ genommenen Pol der in X an $f(x, x) = 0$ gezogenen Tangente geht, oder anders ausgedrückt: die in X an f gezogene Tangente und die in bezug auf $g = 0$ genommenen Polaren der Punkte X und y müssen durch einen und denselben Punkt, den Pol der Geraden

yX in bezug auf $g = 0$, gehen. In dieser Fassung ist das Problem der allgemeinen analytischen Behandlung zugänglich.[123])

Man hat neben $f(X, X) = 0$ drei Gleichungen von der Form

$$\tfrac{1}{2}g'(y_1) = \tfrac{1}{2}(\lambda f'(X_1) + \mu g'(X_1)),$$
$$\tfrac{1}{2}g'(y_2) = \tfrac{1}{2}(\lambda f'(X_2) + \mu g'(X_2)),$$
$$\tfrac{1}{2}g'(y_3) = \tfrac{1}{2}(\lambda f'(X_3) + \mu g'(X_3)),$$

oder für a_{ik} und b_{ik} als Koeffizienten von f und g:

$$\begin{aligned} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 &= (\lambda a_{11} + \mu b_{11})X_1 + (\lambda a_{12} + \mu b_{12})X_2 \\ &\quad + (\lambda a_{13} + \mu b_{13})X_3, \\ b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 &= (\lambda a_{12} + \mu b_{12})X_1 + (\lambda a_{22} + \mu b_{22})X_2 \\ &\quad + (\lambda a_{23} + \mu b_{23})X_3, \\ b_{13}y_1 + b_{23}y_2 + b_{33}y_3 &= (\lambda a_{13} + \mu b_{13})X_1 + (\lambda a_{23} + \mu b_{23})X_2 \\ &\quad + (\lambda a_{33} + \mu b_{33})X_3. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die aus den Elementen $\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}$ gebildete Determinante mit Δ, die Unterdeterminanten dieser Elemente mit Δ_{ik}, die Ausdrücke $\tfrac{1}{2}g'(y_i)$ mit g_i, so sind

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= g_1\Delta_{11} + g_2\Delta_{12} + g_3\Delta_{13}, \\ \Delta X_2 &= g_1\Delta_{21} + g_2\Delta_{22} + g_3\Delta_{23}, \\ \Delta X_3 &= g_1\Delta_{31} + g_2\Delta_{32} + g_3\Delta_{33} \end{aligned}$$

die Auflösungen der letzten drei Gleichungen nach den X_i. Durch Substitution in $f(X, X) = 0$ erhält man

$$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma a_{ik} g_p \Delta_{ip} g_q \Delta_{kq} = 0.$$

Nach der bekannten Determinantenbeziehung

$$\Delta_{ip}\Delta_{kq} = \Delta_{ik}\Delta_{pq} - \Delta\Delta_{ik,pq}$$

geht diese Gleichung über in

$$\Sigma\Sigma a_{ik}\Delta_{ik}\Sigma\Sigma g_p g_q \Delta_{pq} - \Delta\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma a_{ik} g_p g_q \Delta_{ik,pq} = 0;$$

da a_{ik} auch Ableitung von $\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}$ nach λ ist, so ist

$$\Sigma\Sigma a_{ik}\Delta_{ik} = \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}, \quad \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma a_{ik} g_p g_q \Delta_{ik,pq} = \frac{\partial(\Sigma\Sigma g_p g_q \Delta_{pq})}{\partial\lambda}.$$

Die Endgleichung erhält daher für $\Omega = \Sigma\Sigma g_p g_q \Delta_{pq}$ die Form

$$\Omega\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda} - \Delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = 0.$$

Sie bezeichnet für y_i als Veränderliche einen Kegelschnitt von folgender Entstehung: Er ist, wenn man λ und μ als Konstanten betrachtet, der Ort der in bezug auf den Kegelschnitt $g = 0$ genommenen Pole aller jener Geraden, die für die Punkte von $f = 0$ die

Polaren in bezug auf den Kegelschnitt $\lambda f + \mu g = 0$ sind, der durch die Schnittpunkte von $f = 0$ und $g = 0$ hindurchgeht. Die Gleichung ist bei festen y_i biquadratisch in $\lambda : \mu$, und ihre invariantentheoretische Untersuchung (vgl. Nr. 339) führt auf die vollständige Lösung des Problems der Normalen. Ihre Diskriminante zerfällt in zwei Faktoren sechsten Grades; der erste gibt doppelt zählend die Seiten des gemeinsamen Poldreiecks von f und g, der zweite eine Kurve sechster Ordnung mit je zwei Rückkehrtangenten in diesen Seiten (durch Achsen und unendlich ferne Gerade gebildetes Dreieck und Evolute, wenn f und g konfokale Kegelschnitte sind). Die erste Invariante der biquadratischen Gleichung ist ein vollständiges Quadrat, ein durch die sechs Rückkehrpunkte gehender Kegelschnitt mit demselben Poldreieck (als Ort der Punkte mit äquianharmonischen Normalenbüscheln Nr. 358, B und Nr. 222); allgemein erhält man für beliebigen Wert des Doppelverhältnisses zwei Kurven sechster Ordnung mit denselben Rückkehrpunkten, die in eine zusammenfallen für die harmonischen (Normalen)-Büschel.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Von den reziproken Verwandtschaften.

387. **Lineare Reziprozität.** Als die wichtigsten Unte suchungsmethoden der analytischen wie der reinen Geometr haben wir die Lehre von den linearen Substitutionen od Verwandtschaften und das Dualitätsprinzip erkannt. Die beiden Mittel gestatten aber noch eine Verschmelzung in ein neuen Klasse von Verwandtschaften. Ihrem analytischen Au druck nach sind auch diese in der Eigenschaft der linear Substitutionen, an die Stelle dreier Veränderlichen drei ne Veränderliche einzuführen, enthalten.

Offenbar bleibt die analytische Theorie von Nr. 91 und 9 absolut ungeändert, wenn wir das eine System von Verände lichen als Punktkoordinaten, das andere jedoch als Linie koordinaten deuten, also die Substitutionen schreiben

(1) $\mu u_i' = \Sigma \alpha_{ik} x_k$ oder $\mu u_1' = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3$, usw

und die Umkehrungen

$$(2) \qquad \frac{\Delta}{\mu} x_i = \Sigma \mathsf{A}_{ki} u_k'.$$

Hiernach ist jedem Punkte x_i des ungestrichenen eben Systems eine Gerade u_i' des gestrichenen ebenen Systems z geordnet. Ebenso ist auch jedem Punkte x_i' des gestrichen Systems eine Gerade u_i des ungestrichenen zugeordnet, nämli durch die transponierten Substitutionen

$$(3) \qquad \nu u_i = \Sigma \alpha_{ki} x_k', \quad \frac{\Delta}{\nu} x_i' = \Sigma \mathsf{A}_{ik} u_k,$$

weil $\mu u'_x$ und νu_x nur dann identisch werden. Im allgemeine nämlich so lange α_{ik} von α_{ki} verschieden ist, *entsprechen de*

selben Element (Punkt, Strahl) der Ebene verschiedene reziproke Elemente (Strahl, Punkt), jenachdem man es zum einen oder andern System gehörig ansieht.

Die ausnahmslos eindeutige Verwandtschaft zwischen je einem ebenen System von Punkten und einem ebenen System von Geraden wird als lineare Reziprozität bezeichnet. Unmittelbar einleuchtende Analoga zu Sätzen der Kollineation sind: *Punktreihen des einen Systems sind Strahlenbüschel des andern reziprok; reziproke Reihen und Büschel sind projektiv* (doppelverhältnisgleich, Nr. 92). *Vier Paare reziproker Elemente von unabhängiger Lage bestimmen die Verwandtschaft;* die Konstruktion des einem gegebenen entsprechenden Elementes geschieht durch zweimalige Zuordnung in reziproken Elementargebilden (Nr. 82). *Zwei zu einem dritten reziproke Systeme sind zu einander kollinear.*

Die ungestrichenen und die gestrichenen Veränderlichen können auf *zwei unabhängige Koordinatensysteme* bezogen werden. Wenn den ungestrichenen Fundamentalpunkten die gestrichenen Fundamentallinien als reziprok zugeordnet werden, dem Einheitspunkt dort die Einheitsgerade hier, so treten an die Stelle der Substitutionen die einfachen Proportionalitäten

$$(4) \qquad u_1' : u_2' : u_3' = x_1 : x_2 : x_3, \quad u_1 : u_2 : u_3 = x_1' : x_2' : x_3'.$$

In den folgenden Untersuchungen werden wir dagegen *alle Koordinaten auf dieselben festen Elemente* beziehen; die vorigen Proportionalitäten würden dann *nicht* mehr die *allgemeine* Reziprozität definieren.

388. **Pol- und Polarkegelschnitt.** Nach den allgemeinen Substitutionen besteht zwischen den Koordinaten zweier Punkte, von denen der eine in der reziproken Geraden des anderen liegt, die bilineare Gleichung $\Sigma \alpha_{ik} x_i' x_k = 0$ oder

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_1'(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3) + x_2'(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3) \\ & \qquad + x_3'(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3) \\ & \equiv x_1(\alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2' + \alpha_{31}x_3') + x_2(\alpha_{12}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{32}x_3') \\ & \qquad + x_3(\alpha_{13}x_1' + \alpha_{23}x_2' + \alpha_{33}x_3') = 0. \end{aligned} \right.$$

Daher gibt es auch *Punkte, die auf den ihnen reziproken Geraden liegen*, d. h. für deren Koordinaten $x_i = x_i'$ die Glei-

chung (5) erfüllt wird. Diese Punkte liegen also auf dem Kegelschnitt $\Sigma\alpha_{ik}x_i x_k = 0$ oder

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + (\alpha_{23}+\alpha_{32})x_2x_3 \\ \quad + (\alpha_{31}+\alpha_{13})x_3x_1 + (\alpha_{12}+\alpha_{21})x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

den man den *Polkegelschnitt der Reziprozität* nennt. Durch jeden Punkt desselben gehen zwei Strahlen p, p', die ihm reziprok zugeordnet sind, jenachdem er als Punkt P' oder Punkt P angesehen wird.

Ebenso gilt für zwei Strahlen, deren einer durch den reziproken Punkt des anderen geht, die Beziehung $\Sigma A_{ik}u_i'u_k = 0$, und *die Strahlen, die durch die ihnen reziproken Punkte gehen*, umhüllen einen Kegelschnitt $\Sigma A_{ik}u_iu_k = 0$, den man zum Unterschied von dem vorigen den *Polarkegelschnitt der Reziprozität* nennt. Seine Gleichung kann man in den Substitutionskoeffizienten selbst schreiben

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & u_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & u_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man nennt diese beiden Kegelschnitte die *Ordnungskurven der reziproken Systeme*, denn mit ihrer Hilfe definiert man leicht den Zusammenhang entsprechender Elemente. Einem Punkte des Polkegelschnittes entspricht die eine oder andere der von ihm an den Polarkegelschnitt gehenden Tangenten, je nachdem man ihn als dem ersten oder zweiten System angehörig betrachtet; einer Tangente des Polarkegelschnittes entspricht der eine oder der andere von ihren Schnittpunkten mit dem Polkegelschnitt, je nachdem man sie dem einen oder andern System angehörig ansieht. Ist dann aber *einem* Punkte des Polkegelschnittes, als zu einem der Systeme gerechnet, eine bestimmte der Tangenten zugeordnet, so kann für jeden folgenden Punkt keine Zweideutigkeit mehr bestehen. Denn bewegt sich der ursprüngliche Punkt auf dem Polkegelschnitt in eine zweite Lage, so muß auch die reziproke Tangente des Polarkegelschnittes stetig in die der zweiten Lage entsprechende übergehen. Dasselbe Stetigkeitsprinzip gilt im dualen Fall.

Um nun die Geraden p', p zu bestimmen, die einem beliebigen Punkte P, P' der Ebene entsprechen, zieht man von dem Punkte an den Polarkegelschnitt die Tangenten $P\mathfrak{P}_1, P\mathfrak{P}_2$; bestimmt ihre Schnittpunkte P_1, P_1'; P_2, P_2' bez. mit dem Polkegelschnitt so, daß, wenn $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ bewegt wird, P_1 mit P_2, P_1' mit P_2' zusammenfällt, und erhält in dem Paare ihrer Verbindungslinien $P_1' P_2'$, $P_1 P_2$ die Geraden p', p, die dem Punkte entsprechen. Um den einer gegebenen Geraden p, p' entsprechenden Punkt zu finden, bestimmt man ihre Schnittpunkte P_1, P_2 mit dem Polkegelschnitt und zieht von diesen die Tangenten $P_1\mathfrak{P}_1, P_1\mathfrak{P}_1'$; $P_2\mathfrak{P}_2, P_2\mathfrak{P}_2'$ bez. an den Polarkegelschnitt so, daß $P_1, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1'$ stetig in $P_2, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_2'$ übergeführt werden; entsprechen dann $P_1\mathfrak{P}_1'$, $P_2\mathfrak{P}_2'$ den P_1 und P_2 im ersten System, so ist ihr Schnittpunkt P der der Geraden entsprechende Punkt im ersten und der Schnittpunkt von $P_1\mathfrak{P}_1$ mit $P_2\mathfrak{P}_2$ der ihr entsprechende Punkt P' im zweiten System. Insbesondere nennt man den der unendlich fernen Geraden eines Systems reziproken Punkt den *Gegenpunkt* des anderen Systems.

389. **Involutorisches Tripel.** *Die beiden Ordnungskurven sind miteinander in doppelter Berührung.* Denn für einen Schnittpunkt derselben fallen beide zu ihm reziproken Geraden mit der in ihm berührenden Tangente des Polarkegelschnittes zusammen. Es müssen daher auch, damit dieser Geraden nur *ein* Punkt reziprok sei, die Schnittpunkte dieser Tangente mit dem Polkegelschnitt zusammenfallen. Also berührt dieselbe die Ortskurve und die Hüllkurve in ihrem gemeinschaftlichen Punkte; die vier Schnittpunkte beider vereinigen sich daher in zwei Berührungspunkte. Man beweist dies auch analytisch, indem man aus der mit den u_i gesäumten Substitutionsdeterminante (7) in Nr. 388 durch Entwicklung bildet

$$(8) \qquad A_{11}u_1^2 + \cdots + (A_{23} + A_{32})u_2 u_3 + \cdots = 0$$

und alsdann durch Säumung der Diskriminante von (8) mit den x_i die Gleichung des Polarkegelschnittes in Punktkoordinaten $V = 0$, wo

$$(9)\begin{cases} V \equiv \{(A_{23} + A_{32})^2 - 4A_{22}A_{33}\}x_1^2 + \cdots \\ + 2\{2A_{11}(A_{23} + A_{32}) - (A_{13} + A_{31})(A_{12} + A_{21})\}x_2 x_3 + \cdots = 0; \end{cases}$$

denn man findet durch Subtraktion des Quadrates der linearen Funktion

$$(A_{23}-A_{32})x_1+(A_{31}-A_{13})x_2+(A_{12}-A_{21})x_3$$

von V den Rest

$$4\{(A_{23}A_{32}-A_{22}A_{33})x_1^2+\cdots$$
$$+(A_{11}A_{23}+A_{11}A_{32}-A_{12}A_{31}-A_{21}A_{13})x_2x_3+\cdots\},$$

der leicht als das Produkt des durch (6) definierten Ausdrucks U für den Polkegelschnitt in das Vierfache seiner negativ genommenen Diskriminante A erkannt wird. Man hat also in der Tat

$$V\equiv -4AU+\{(A_{23}-A_{32})x_1+\cdots\}^2. \tag{10}$$

Infolge dieses Zusammenhanges entfällt auch die scheinbare Zweideutigkeit der vorher gegebenen Konstruktion.

In dieser sind nach Nr. 297 die Punktreihen zweiter Ordnung $P_1, P_2, \ldots; P_1', P_2', \ldots$ auf $U=0$, ebenso die Strahlenbüschel zweiter Klasse $P_1\mathfrak{P}_1, P_2\mathfrak{P}_2, \ldots; P_1\mathfrak{P}_1', P_2\mathfrak{P}_2', \ldots$ an $V=0$ untereinander derart projektiv, daß ihre Doppelelemente die Schnittpunkte A_1, A_3 der reellen Berührungssehne A_1A_3, bez. die gemeinsamen Tangenten A_2A_1, A_2A_3 des reellen Berührungspols A_2 sind; daß ferner der Schnittpunkt der Verbindungslinien P_1P_2', P_2P_1' auf A_1A_3 liegt, bez. die Verbindungslinie der Schnittpunkte $P_1\mathfrak{P}_1$, $P_2\mathfrak{P}_2'$, $P_2\mathfrak{P}_2$, $P_1\mathfrak{P}_1'$ durch A_2 geht. Diese Bemerkung genügt in der Tat, um die Konstruktion ohne Benutzung des Stetigkeitsprinzips eindeutig zu machen.

Gemäß dieser Konstruktion sind *die beiden Berührungspunkte* A_1, A_3 *und die durch sie gehenden gemeinsamen Tangenten* A_1A_2, A_3A_2, *daher auch der Berührungspol* A_2 *und die Berührungssehne* A_1A_3 *reziprok*, ob man sie nun zum einen oder andern System rechnet, also, wie wir sagen wollen, *involutorisch reziprok*. Von diesen drei Punkten und Geraden liegen also zwei reziproke Paare ineinander, das dritte, stets reelle, aber nicht.

Es gibt in einer Reziprozität nur ein Tripel involutorisch reziproker Elemente. Denn, damit für einen Punkt $x_i=y_i$, $x_i'=y_i$ die reziproken Geraden u_i' und u_i zusammenfallen, müssen nach (1) und (3) die Gleichungen bestehen

$$\mu u_i' = \varrho \nu u_i \quad \text{oder} \quad \Sigma(\alpha_{ik} - \varrho \alpha_{ki}) y_i = 0,$$

was nur für drei Werte von ϱ möglich ist.

Den einfachsten analytischen Ausdruck der Reziprozität erhält man in bezug auf das involutorische Tripel als Fundamentaldreieck. Denn, sollen den Punkten $1|0|0$, $0|1|0$, $0|0|1$ die Geraden $0|0|1$, $0|1|0$, $1|0|0$ vertauschbar entsprechen, so müssen $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{33} = 0$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{32} = 0$ sein; also lauten die Substitutionen

$$(11) \quad \begin{cases} \mu u_1' = \alpha_{13} x_3, & \mu u_2' = \alpha_{22} x_2, & \mu u_3' = \alpha_{31} x_1, \\ \nu u_1 = \alpha_{31} x_3', & \nu u_2 = \alpha_{22} x_2', & \nu u_3 = \alpha_{13} x_1', \end{cases}$$

und die Gleichungen der Ordnungskurven (Nr. 388)

$$\alpha_{22} x_2^2 + (\alpha_{31} + \alpha_{13}) x_1 x_3 = 0, \quad \alpha_{31} \alpha_{13} u_2^2 + \alpha_{22} (\alpha_{31} + \alpha_{13}) u_1 u_3 = 0.$$

Im allgemeinen, nämlich so lange $\alpha_{13} \gtrless \alpha_{31}$ ist, entspricht jedem Elemente der Ebene nur *ein* anderes als *doppelt reziprok* (vgl. Nr. 387), einem Punkte der Schnittpunkt seiner beiden reziproken Strahlen p, p', einem Strahl die Verbindungsgerade seiner beiden reziproken Punkte P, P'. Die Koordinaten y_i und v_i dieser Elemente sind

$$(12) \begin{cases} y_1 : y_2 : y_3 = \alpha_{22} x_2 x_1 : -(\alpha_{31} + \alpha_{13}) x_1 x_3 : \alpha_{22} x_3 x_2 \\ v_1 : v_2 : v_3 = \alpha_{31} \alpha_{13} u_2 u_1 : -\alpha_{22} (\alpha_{31} + \alpha_{13}) u_1 u_3 : \alpha_{31} \alpha_{13} u_3 u_2. \end{cases}$$

Da somit $y_1 : y_3 = x_1 : x_3$, $v_1 : v_3 = u_1 : u_3$ ist, *so liegen doppelt reziproke Punkte auf Strahlen aus dem Berührungspol und doppelt reziproke Strahlen schneiden sich auf der Berührungssehne.* Dies liefert eine lineare Konstruktion von A_2 und $A_1 A_3$ aus gegebenen Elementenquadrupeln.

Weil die vorige Substitution vom zweiten Grade ist, so nennt man auch *die Verwandtschaft der doppelt reziproken Elementenpaare vom zweiten Grade.* Wir betrachten sie in Kürze am Schluß des Kapitels.

B. Das anschaulichste Beispiel der Reziprozität wird durch die einfachste Wahl zweier Kegelschnitte in Doppelberührung erhalten: *Die Ordnungskurven seien zwei konzentrische Kreise*

$$U \equiv x^2 + y^2 - \varrho_1^2 = 0, \quad V \equiv x^2 + y^2 - \varrho_2^2 = 0.$$

Da die Tangentialgleichung zu V lautet $-\varrho_2^2(u^2 + v^2) + 1 = 0$, so sind die Bedingungen für die Substitutionskoëffizienten zu erfüllen $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$, $A_{11} = A_{22} = -\lambda \varrho_2^2$, $\alpha_{33} = -\varrho_1^2$, $A_{33} = \lambda$

und $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$, $A_{ik} = -A_{ki}$, falls $i \neq k$; aber aus $A_{11} = A_{22}$ folgt $\alpha_{13}^2 = \alpha_{23}^2$, aus $A_{12} = -A_{21}$ aber $\alpha_{13}\alpha_{23} = 0$. Da endlich $\lambda = \alpha_{12}^2 + 1$ und $\lambda\varrho_2^2 = \varrho_1^2$ ist, so ist zu setzen

$$u' = \frac{x + \alpha y}{-\varrho_1^2}, \quad v' = \frac{-\alpha x + y}{-\varrho_1^2}; \quad u = \frac{x' - \alpha y'}{-\varrho_1^2}, \quad v = \frac{\alpha x' + y'}{-\varrho_1^2}.$$

Analog können zwei gleichseitige Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten gebraucht werden.

390. **Polarsystem.** Die vorangehenden Eigenschaften einer allgemeinen Reziprozität hinsichtlich involutorisch reziproker Elemente sind daran geknüpft, daß wenigstens ein Substitutionskoeffizient α_{ik} von α_{ki} verschieden sei. In der Tat lehrt der Anblick der Substitutionen, *daß unter den Bedingungen*

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

alle reziproken Elemente einander vertauschbar entsprechen. Es hat dann keinen Sinn mehr zweierlei, in derselben Ebene liegende reziproke Systeme zu unterscheiden, sondern *in dieser involutorischen Reziprozität sind je ein Punkt und eine Gerade der Ebene einander eindeutig zugeordnet,* vermöge

$$(13) \qquad \mu u_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k, \quad \frac{\Delta}{\mu} x_i = \Sigma A_{ki} u_k.$$

Die beiden Ordnungskurven der Reziprozität fallen in einen Kegelschnitt $f(x, x) \equiv \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k = 0$, *die Leitkurve oder Direktrix der involutorischen Reziprozität,* zusammen. Die Gleichung der zum Punkte y_i reziproken Geraden $\Sigma \alpha_{ik} y_i x_k = 0$, ebenso die Anwendung der Konstruktion in Nr. 388 zeigt, *daß die zugeordneten Elemente Pol und Polare in bezug auf die Leitkurve sind.* Man bezeichnet diese Zuordnung daher als *Polarreziprozität* und faßt die reziproken Systeme als *Polarsystem* zusammen. Pole, Polaren und Polardreiecke, Mittelpunkt, Durchmesser und Achsen der *Leitkurve* oder des *Polarsystems* sind gleichbedeutende Benennungen.

Eine Reziprozität, die zwei involutorische Paare von nicht in einander liegenden Elementen enthält, ist eine Polarreziprozität. Denn sind A_1 und a_1, A_2 und a_2 vertauschbar, so sind es auch $a_1 a_2 (A_3)$ und $A_1 A_2 (a_3)$, d. h. es gibt ein Polardreieck $A_1 A_2 A_3$. Nehmen wir dieses zum Fundamentaldreieck der

Koordinaten, so entsprechen sich $x_i = 0$ und $u_i = 0$ nur, wenn $\alpha_{ik} = 0$ $(i \gtrless k)$, also lauten die Substitutionen

$$\mu u_i = \alpha_i x_i,$$

und die Gleichung der Leitkurve ist $\Sigma \alpha_i x_i^2 = 0$. Daher erfordert die Bestimmung der Konstanten die Angabe eines weiteren Elementenpaares A_4, a_4. *Das Polarsystem ist also durch drei Elementenpaare bestimmt, die kein Polardreieck bilden.* Jedes weitere Elementenpaar P, p ist durch zwei Projektivitäten zugeordnet

$$(A_1 \cdot A_2 A_3 A_4 P) = (a_1 \cdot a_2 a_3 a_4 p), \quad (A_2 \cdot A_3 A_1 A_4 P) = (a_2 \cdot a_3 a_1 a_4 p).$$

Die Leitkurve des Polarsystems wird als Ort und Hüllkurve der in einander liegenden Elementenpaare erhalten. Auf jeder beliebigen Geraden ist eine Punktinvolution definiert durch ihre Schnittpunktpaare mit $A_i P$, a_i, die die Schnittpunkte mit der Leitkurve als ihre Doppelpunkte liefert. *Daher sind alle Konstruktionen der Kegelschnittlehre im Polarsystem reell durchführbar, unabhängig von der Realität der Leitkurve.* Die Einführung des Polarsystems bedeutet so genau dieselbe von der Realität unabhängige Definition für die Kurven zweiten Grades, wie die der Involution für das Punktepaar. Man kennzeichnet das Polarsystem auch kurz als *ebene Involution.* Übrigens ist das Polarsystem mit imaginärer Leitkurve mit Hilfe der Sätze von Nr. 16, 17 und 18 leicht dadurch zu charakterisieren, daß dann einem Pol im Innern eines Polardreiecks eine Polare entspricht, die ganz außerhalb desselben liegt.

B. 1) Ist ein Polardreieck $A_1 A_2 A_3$ (Seiten bez. a_1, a_2, a_3) und ein Paar A_4, a_4 gegeben, so sind auch für $i = 1, 2, 3$ die Geraden $A_4 A_i$ und bez. die Punkte $a_4 a_i$ Paare von Polaren und Pol. Hiermit sind auch die Involutionen harmonischer Polaren und harmonischer Pole an den Punkten $A_1, \ldots A_4$ und in den Geraden $a_1, \ldots a_4$ je durch zwei Paare bestimmt.

Um dann zu einer beliebigen Geraden der Ebene den Pol zu konstruieren, nimmt man zu ihren Schnittpunkten mit a_1, a_2, a_3 die entsprechenden in den bez. Polinvolutionen. Der Schnittpunkt ihrer Verbindungsgeraden mit den Gegenecken A_1, A_2, A_3 bez. ist der gesuchte Pol. So erhält man insbesondere den Pol der unendlich fernen Geraden oder den Mittelpunkt des Polarsystems; so

auch die Involution harmonischer Polaren, die das Polarsystem in ihm bestimmt, insbesondere ihr Rechtwinkelpaar und ihre Doppelstrahlen: die Achsen und die Asymptoten der Leitkurve.

Mittelpunkt, Achsen, auch Brennpunkte und Leitlinien sind in jedem Polarsystem reell; die Brennpunkte sind (Nr. 300, 6) die Doppelpunkte der Involutionen in den Achsen, die durch ihren Schnitt mit einer beliebigen Geraden p und den Schnitt ihrer Normale aus ihrem Pol P als zweites Paar bestimmt werden, während Mittelpunkt und bez. Achsenrichtung ihr erstes Paar bilden.

Ist die Leitkurve reell, so findet man unmittelbar als Doppelelemente der bezüglichen Involutionen ihre Schnittpunkte mit zwei Seiten des Polardreiecks und die zugehörigen Tangenten als ihre Verbindungslinien mit den bez. Gegenecken derselben, also vier Punkte mit ihren Tangenten. Die Bestimmung des Polarsystems aus den Achsen oder aus einem Paar konjugierter Durchmesser ist davon nicht wesentlich verschieden.

2) Wenn das Polarsystem durch die Achsen und ein Paar von solcher Lage bestimmt ist, daß die Polinvolutionen in den Achsen (also auch in der unendlich fernen Geraden) elliptisch sind oder seine Leitkurve eine Ellipse ohne reelle Peripherieelemente ist, so kann man sie vertreten lassen durch die reelle Ellipse, die die symmetrischen Paare der Involutionen zu Scheiteln hat. Die Konstruktion zeigt sofort, daß die Polaren desselben Punktes und ebenso die Pole derselben Geraden für die imaginäre und für die reelle Ellipse in bezug auf den Mittelpunkt symmetrisch parallel liegen *(Antipolare und Antipol)*.

391. **Polarreziprozität ist im allgemeinen nur eine besondere Lage allgemein reziproker Systeme**, also nicht wesentlich von der allgemeinen Reziprozität verschieden. Man kann nämlich durch Verschiebung und Drehung des einen von zwei reziproken Systemen beide in involutorische Lage bringen. Bezieht man die allgemeinen Substitutionsformeln auf rechtwinklige Koordinaten und setzt für $x \mid y$ die allgemeinsten Ausdrücke einer rechtwinkligen Koordinatentransformation, so wird

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu u &= \alpha_{11}(x_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi) \\ &\quad + \alpha_{12}(y_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \alpha_{13}, \\ \mu v &= \alpha_{21}(x_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi) \\ &\quad + \alpha_{22}(y_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \alpha_{23}, \\ \mu &= \alpha_{31}(x_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi) \\ &\quad + \alpha_{32}(y_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \alpha_{33}. \end{aligned} \right.$$

Die Ordnung der rechten Seiten nach den Veränderlichen x, y zeigt, daß man x_0, y_0, φ so zu bestimmen hat, daß $\alpha_{ik}' = \alpha_{ki}'$ ist. So ergibt sich

$$(15)\quad \begin{cases} -\alpha_{11}\sin\varphi + \alpha_{12}\cos\varphi = \alpha_{21}\cos\varphi + \alpha_{22}\sin\varphi, \\ \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{13} = \alpha_{31}\cos\varphi + \alpha_{32}\sin\varphi, \\ \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \alpha_{23} = -\alpha_{31}\sin\varphi + \alpha_{32}\cos\varphi. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen liefert *zwei* Werte von φ, die andern bestimmen sodann $x_0 \,|\, y_0$ linear:

$$(16)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\alpha_{12} - \alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}}, \\ x_0 = \\ \dfrac{(\alpha_{31}\alpha_{22} - \alpha_{32}\alpha_{12})\cos\varphi + (\alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{32}\alpha_{22})\sin\varphi - (\alpha_{13}\alpha_{22} - \alpha_{23}\alpha_{12})}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \\ y_0 = \\ \dfrac{(\alpha_{32}\alpha_{11} - \alpha_{31}\alpha_{21})\cos\varphi - (\alpha_{32}\alpha_{21} + \alpha_{31}\alpha_{11})\sin\varphi - (\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{13}\alpha_{21})}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}. \end{cases}$$

Geometrisch betrachtet kann diese Transformation auf folgende Weise geschehen. Man bestimmt zuerst in jedem der Systeme den *Gegen- oder Mittelpunkt*, der der unendlich fernen Geraden als einer Geraden des anderen Systems entspricht, dessen Strahlen also den Richtungen in demselben entsprechen. Bringt man dann diese beiden Punkte durch Lagenveränderung eines Systems zur Deckung in O, so sind O und die unendlich ferne Gerade unverändert und involutorisch reziprok. Dieser Punkt O wird der gemeinschaftliche Mittelpunkt, seine Strahlen werden Durchmesser der beiden Ordnungskurven sein, die nun, weil sie in doppelter Berührung bleiben müssen, zu ähnlichen und konzentrischen Kegelschnitten werden. (Nr. 226.) Man hat ferner noch O und ∞ als Elemente eines Polardreiecks zu nehmen. Daher muß man das eine der beiden reziproken Systeme so um den gemeinsamen Mittelpunkt O drehen, daß die einer Richtung A reziproke Gerade OA' die nämliche ist, ob man dieselbe zum einen oder zum andern System zählt; dann gilt dasselbe für *jede* Richtung B und die reziproke Gerade OB' (Nr. 94). Es besteht dann Involution zwischen den Büscheln $OA, OB, \ldots$; OA', OB'. Da nun aber die absoluten Richtungen der Ebene

bei jeder Drehung des Systems unverändert bleiben, so sind durch eine solche die reziproken Geraden einer derselben wirklich zum Zusammenfallen zu bringen. (Vgl. B. 3.)

Aber wir erzielen die involutorische Vereinigung durch reelle Konstruktion; denn die Durchmesser der beiden ursprünglichen reziproken Systeme bilden zwei zu einander projektive Büschel, in denen je zwei einander entsprechen, von denen der eine der Richtung des andern zugehört. Unter diesen Durchmessern gibt es im allgemeinen nur ein Paar zu einander rechtwinkliger q, r, denen ein Paar rechtwinklige konjugierte q', r' entsprechen. Ihre Verkehrt-Vereinigung q' mit r, r' mit q führt zur Involution und liefert die Achsen der Leitkurve. Daher ist die involutorische Lage nur *auf zwei Arten* herzustellen und hängt an der Endlichkeit der Koordinaten x_0, y_0 des Mittelpunktes O, also an $\alpha_{12}\alpha_{21} \lesseqgtr \alpha_{11}\alpha_{22}$; der Fall der Gleichheit ist zunächst ausgeschlossen; bei parabolischer Leitkurve ist er verwirklicht.

Wir können aber mit den wie oben bestimmten x_0, y_0, φ die Gleichung der Leitkurve aus den nach den Veränderlichen geordneten Bedingungsgleichungen S. 333 sofort schreiben:

$$(17)\begin{cases} (\alpha_{11}\cos\varphi + \alpha_{12}\sin\varphi)x^2 + (\alpha_{22}\cos\varphi - \alpha_{21}\sin\varphi)y^2 \\ + 2(\alpha_{12}\cos\varphi - \alpha_{11}\sin\varphi)xy + 2(\alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{13})x \\ + 2(\alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \alpha_{23})y + (\alpha_{31}x_0 + \alpha_{32}y_0 + \alpha_{33}) = 0 \end{cases}$$

und betrachten nun ihre Diskriminante

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\cos\varphi + \alpha_{12}\sin\varphi & \alpha_{12}\cos\varphi - \alpha_{11}\sin\varphi & \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{13} \\ \alpha_{12}\cos\varphi - \alpha_{11}\sin\varphi & \alpha_{22}\cos\varphi - \alpha_{21}\sin\varphi & \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \alpha_{23} \\ \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{13} & \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \alpha_{23} & \alpha_{31}x_0 + \alpha_{32}y_0 + \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man sie nach den Elementen der letzten Spalte, so findet man die zugehörigen Unterdeterminanten unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen (15) gleich den entsprechenden Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante $\triangle$ der vorgelegten Reziprozität, z. B.

$$A_{13}' = \begin{vmatrix} \alpha_{21}\cos\varphi + \alpha_{22}\sin\varphi & \alpha_{22}\cos\varphi - \alpha_{21}\sin\varphi \\ \alpha_{31}\cos\varphi + \alpha_{32}\sin\varphi & \alpha_{32}\cos\varphi - \alpha_{31}\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}.$$

Ebenso auch $A_{23}' = A_{23}$, $A_{33}' = A_{33}$ und überhaupt immer nach denselben Gesetzen der Umformung $\varDelta' = \triangle$.

Wir können also aus der Substitution der reziproken Ebenen Schlüsse ziehen auf die Art der Leitkurve der zum Polarsystem vereinigten Ebenen.

Zunächst folgt, daß die Leitkurve ein eigentlicher Kegelschnitt sein wird, so lange $\triangle$ nicht verschwindet; für $A_{33} < 0$ eine Hyperbel, für $A_{33} > 0$ Ellipse; sodann ein Geradenpaar, reell und getrennt, parallel oder konjugiert imaginär, je nachdem zugleich $A_{33} \lesseqgtr 0$ bei $\triangle = 0$ ist. (Vgl. Nr. 310 und weiterhin die *singulären Projektivitäten.*) Unter den Beispielen 4—6 sind die Sonderfälle besprochen.

B. 1) Die den Punkten eines Durchmessers reziproken Geraden sind einander parallel, und einer Schar von Parallelen entsprechen Punkte auf einerlei Durchmesser.

2) Die Koordinaten der zu $u' = 0$, $v' = 0$ und $u = 0$, $v = 0$ reziproken Gegenpunkte sind $A_{31} : A_{33} \mid A_{32} : A_{33}$; $A_{13} : A_{33} \mid A_{23} : A_{33}$. Daher geschieht die Transformation der Systeme auf gemeinsamen Mittelpunkt durch

$$A_{33}(x' - x) = A_{13} - A_{31}, \quad A_{33}(y' - y) = A_{23} - A_{32}.$$

3) Man soll für die konzentrische Lage beider Systeme den Drehungswinkel berechnen, der der Transformation des Textes entspricht. Die Polaren eines beliebigen Punktes sind bei rechtwinkligen Koordinaten aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt

$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1)x + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1)y + \alpha_{33} = 0,$$
$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}y_1)x + (\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1)y + \alpha_{33} = 0,$$

und daher für den unendlich fernen Punkt $y_1 = ix_1$

$$(\alpha_{11} + i\alpha_{12})x + (\alpha_{21} + i\alpha_{22})y = 0,$$
$$(\alpha_{11} + i\alpha_{21})x + (\alpha_{12} + i\alpha_{22})y = 0.$$

Der Winkel dieses letzten Geradenpaares ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{\alpha_{21} - \alpha_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}}.$$

Oder: Die dem Punkte $x_1 \mid y_1$ des ersten reziproke Gerade des zweiten Systems erhält durch Drehung um den Winkel θ die Gleichung

$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1)(x\cos\theta - y\sin\theta) + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1)(x\sin\theta + y\cos\theta) + \alpha_{33} = 0$$

oder $\{(\alpha_{11}\cos\theta + \alpha_{21}\sin\theta)x_1 + (\alpha_{12}\cos\theta + \alpha_{22}\sin\theta)y_1\}x$
$+\{(\alpha_{21}\cos\theta - \alpha_{11}\sin\theta)x_1 + (\alpha_{22}\cos\theta - \alpha_{12}\sin\theta)y_1\}y + \alpha_{33} = 0.$

Dagegen ist die Gerade, die dem Punkte $x_1 \mid y_1$, als dem transformierten System angehörig betrachtet, entspricht

$$\{(\alpha_{11}\cos\theta + \alpha_{21}\sin\theta)x_1 + (\alpha_{21}\cos\theta - \alpha_{11}\sin\theta)y_1\}x$$
$$+\{(\alpha_{12}\cos\theta + \alpha_{22}\sin\theta)x_1 + (\alpha_{22}\cos\theta - \alpha_{12}\sin\theta)y_1\}y + \alpha_{33} = 0.$$

Und diese Gerade ist mit der vorigen identisch, wenn man hat

$$\alpha_{12}\cos\theta + \alpha_{22}\sin\theta = \alpha_{21}\cos\theta - \alpha_{11}\sin\theta.$$

Für $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ ist zur Herstellung des Polarsystems aus den reziproken Ebenen eine Drehung nicht erforderlich.

4) Für die Leitkurve als gleichseitige Hyperbel muß nach (17) $\alpha_{11}' = -\alpha_{22}'$ sein oder $\alpha_{11}\cos\varphi + \alpha_{12}\sin\varphi = \alpha_{21}\sin\varphi - \alpha_{22}\cos\varphi$; man erhält

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{\alpha_{21} - \alpha_{12}},$$

also aus dem allgemeinen Werte in (16)

$$\frac{\alpha_{12} - \alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}}$$

die Bedingung $(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 + (\alpha_{12} - \alpha_{21})^2 = 0$.

5) Soll die Leitkurve ein Kreis werden, so wird $\alpha_{11}' = \alpha_{22}'$ und $\alpha_{12}' = 0$ gefordert, also nach (17)

$$\alpha_{11}\cos\varphi + \alpha_{12}\sin\varphi = \alpha_{22}\cos\varphi - \alpha_{21}\sin\varphi, \quad \alpha_{12}\cos\varphi = \alpha_{11}\sin\varphi.$$

Also wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}}$$

und somit die Bedingung

$$\alpha_{22}^2 + \alpha_{21}^2 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = A_{33}.$$

Vgl. für Beispiele Nr. 396.

6) Den Fall der elliptischen Leitkurve als reell oder rein imaginär entscheidet das Vorzeichen der Halbachsenquadrate oder der Potenzen der auf den Achsen der Leitkurve durch das Polarsystem bestimmten Polinvolutionen nach Nr. 152 und 142 dahin, daß entgegengesetzte Zeichen von $\alpha_{11}' + \alpha_{22}' - R$ und Δ, wo $R^2 = (\alpha_{11}' - \alpha_{22}')^2 + 4\alpha_{12}'^2$, die Realität bedingen und umgekehrt.

Ersetzt man in

$$\alpha_{11}' = \alpha_{11}\cos\varphi + \alpha_{12}\sin\varphi, \quad \alpha_{22}' = \alpha_{22}\cos\varphi - \alpha_{21}\sin\varphi$$

die Funktionen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ durch ihre Werte in den α_{ik}, also durch Brüche mit den Zählern $\alpha_{11} + \alpha_{22}$ bez. $\alpha_{12} - \alpha_{21}$ und dem gemeinsamen Nenner

$$\{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 + (\alpha_{12} - \alpha_{21})^2\}^{\frac{1}{2}},$$

so erhält man die Bedingung in den Koeffizienten der Reziprozitäts-Substitution

7) Wenn man das Polarsystem bestimmt denkt durch seine Achsen qr' (oder x-Achse) und $q'r$ (oder y-Achse, also durch das absolut größte Polardreieck) und ein Paar P, p von Pol und Polare von solcher Lage, daß beide Koordinaten von P positiv und die Plückerschen Linienkoordinaten von p negativ sind, so ist die Leitkurve die reelle Ellipse $ax^2 + by^2 = 1$ für $a = \alpha_{11} : \alpha_{33}$, $b = \alpha_{22} : \alpha_{33}$ oder mit den reziproken Werten als den Potenzen k_x^2 und k_y^2 der Polinvolutionen in den Achsen $k_y^2 x^2 + k_x^2 y^2 = k_x^2 k_y^2$.

Dreht man die Ebene mit P um die Achse x bez. y in sich zurück, so daß P die Lage P_1 bez. P_2 erhält, indem zugleich das Zeichen von k_y^2 bez. k_x^2 wechselt, so entstehen Polarsysteme mit konjugiert-hyperbolischen Leitkurven von den Gleichungen

$$k_y^2 x^2 - k_x^2 y^2 = k_x^2 k_y^2, \quad \text{bez.} \quad k_y^2 x^2 + k_x^2 y^2 = k_x^2 k_y^2.$$

Auf demselben Wege kommt man durch Drehung von P_1 um y bez. von P_2 um x nach P_3 mit negativen Koordinaten, mit der imaginären Ellipse $-k_y^2 x^2 - k_x^2 y^2 = k_x^2 k_y^2$.

8) Die entsprechenden Rechtwinkelpaare aus den Mittelpunkten der reziproken Ebenen qr und $q'r'$ bilden mit der unendlich fernen Geraden die rechtwinkligen Koordinatensysteme, mit Hilfe deren die Substitution der allgemeinen Reziprozität die einfachste und für metrische Untersuchungen vorzugsweise geeignete Ausdrucksform erhält.

392. **Polarreziproke Kegelschnitte.** Wenn ein Polarsystem mit der Leitkurve $L = 0$ fest gegeben ist, so betrachten wir nun *zu jeder Figur ihre Polarreziproke* in dem Polarsystem, d. h. in bezug auf den Kegelschnitt L, indem wir die reziproke Figur aus den Polaren der Punkte als Hüllkurve und aus den Polen der Tangenten der ersten als Ort bilden. Wir nennen kurz Pol und Polare bezüglich L *entsprechende* Elemente, so daß sich in polarreziproken Figuren die Elemente paarweise entsprechen und jede aus der anderen in gleicher Weise hervorgeht.

Die Hüllkurve der Polaren aller Punkte einer Kurve S heißt die Polkurve s zu S, während der Ort S etwa als die Polkurve von s unterschieden wird. Da aber auch S die Hüllkurve aller Punkte der Polarkurve s ist, so sind polarreziproke Kurven S und s von gleichartiger Bedeutung. *Die Ordnung der Polarreziproken einer Kurve ist der Klasse der Kurve gleich.* Denn ist n die Anzahl der Punkte, in denen eine beliebige Gerade die Kurve s schneidet, so entspricht

denselben in der polarreziproken Figur S die gleiche Anzahl der Tangenten von S, die durch den jener Geraden entsprechenden Punkt gehen (Nr. 28). Weil an einen Kegelschnitt S nur zwei Tangenten von irgend einem Punkte aus gezogen werden können, so schneidet eine beliebige Gerade die Kurve s nur in zwei Punkten, d. h. die Polarreziproke einer Kurve zweiter Klasse ist eine Kurve zweiter Ordnung.

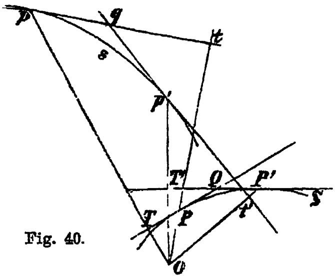


Fig. 40.

Aber nicht nur die Kegelschnitte S und s, sondern auch die durch sie als Leitkurven definierten Polarsysteme sind polarreziproke Figuren. Konstruktiv folgert man dies daraus, daß, wenn zwei Punkte P, P' in S den Tangenten pt, $p't'$ an s entsprechen (Fig. 40), auch die Tangenten in P, P' an S den Berührungspunkten p, p' entsprechen müssen. Denn dann entspricht der Schnittpunkt Q von TP und $T'P'$ der Berührungssehne pp'. *Einem Punkte Q und seiner Polare PP' in bezug auf S entspricht eine Gerade pp' und ihr Pol q in bezug auf s.*

Analytisch sind diese Sätze einleuchtend, da lineare Substitutionen in quadratische oder in bilineare Gleichungen wieder solche Gleichungen liefern (vgl. Nr. 175, 13).

393. **Die Methode der reziproken Polaren**[124]) hat in der geschichtlichen Entwickelung die Lehre von der reziproken Verwandtschaft und von dem Dualismus geometrischer Wahrheiten vorbereitet. Ihre Ergebnisse folgen aus diesen allgemeinen Theorien durch besondere Annahmen über die Lage. Gerade durch die konstruktiv einfache und übersichtliche Lage der zu vergleichenden Figuren hat diese Untersuchungsmethode ihren selbständigen Wert. Sie setzt lediglich die Kenntnis der Polarentheorie der Kegelschnitte voraus.

Aus jedem nur auf Beschreibung der Lagenverhältnisse sich beziehenden oder projektiven Satz über eine gegebene Figur kann rein mechanisch durch Vertauschung dual entsprechender Worte der reziproke Satz über die polarreziproke

Figur abgeleitet werden. Z. B. folgt aus dem Pascalschen Satz für das einem Kegelschnitt S eingeschriebene Sechseck $ABCDEF$ der Brianchonsche Satz für das dem Kegelschnitt s umgeschriebene Sechsseit $abcdef$ (vgl. Nr. 283).

Durch die Nebeneinanderstellung einiger Sätze mit ihren Reziproken soll im Folgenden Gelegenheit zur Anwendung und Übung dieser Methode gegeben werden. Auf die besondere Lagenbeziehung wird erst weiterhin einzugehen sein.

B. 1) Wenn sich zwei Ecken eines Dreiecks auf festen Geraden bewegen, während sich die Seiten um drei feste Punkte drehen, so ist der Ort der dritten Ecke ein Kegelschnitt. (Nr. 276, 6.)	Wenn sich zwei Seiten eines Dreiecks um feste Punkte drehen, während sich die Ecken in drei festen Geraden bewegen, so ist die Hüllkurve der dritten Seite ein Kegelschnitt.
2) Der bezeichnete Ort ist eine Gerade, wenn die festen Punkte der Seiten in einer Geraden liegen. (Nr. 52, 2, 3.)	Die bezeichnete Hüllkurve ist ein Punkt, wenn die festen Geraden der Ecken in einem Punkte zusammenlaufen.
3) Wenn von einem Kegelschnitt zwei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind, geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte dieser Tangenten durch den einen oder andern von zwei festen Punkten.	Wenn von einem Kegelschnitt zwei Tangenten und zwei Punkte gegeben sind, liegt der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten stets auf der einen oder der andern von zwei festen Geraden.
4) Die Polaren eines festen Punktes in bezug auf alle demselben Viereck umgeschriebenen Kegelschnitte bilden ein Strahlenbüschel.	Die Pole einer festen Geraden in bezug auf alle demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte bilden eine gerade Reihe.
5) Der Ort des Pols einer festen Geraden in bezug auf alle durch dieselben vier Punkte gehenden Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt. (Nr. 301, 1.)	Die Hüllkurve der Polare eines festen Punktes in bezug auf alle dieselben vier Geraden berührenden Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt.
6) Die drei Geraden, die die Ecken eines Dreiecks mit den entsprechenden Ecken des in bezug auf einen Kegelschnitt gebildeten polaren Dreiecks verbinden, gehen durch einen Punkt. (Nr. 299, 3; 348, 1.)	Die drei Schnittpunkte der entsprechenden Seiten eines Dreiecks und des in bezug auf einen Kegelschnitt gebildeten polaren Dreiecks liegen in einer Geraden. (Nr. 348, 1; 67, 4.)
7) Man soll einem Kegelschnitt	Man soll einem Kegelschnitt

ein Dreieck einschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. (Nr. 298.)

ein Dreieck umschreiben, dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden liegen.

394. Wenn zwei Kegelschnitte S und S' und ihre Reziproken s und s' gegeben sind, so entsprechen den vier Schnittpunkten A, B, C, D von S und S' die vier Tangenten a, b, c, d, die s und s' gemeinschaftlich sind; den sechs Sehnen AB, CD; AC, BD; AD, BC jener Schnittpunkte entsprechen die sechs Schnittpunkte ab, cd; ac, bd; ad, bc dieser gemeinschaftlichen Tangenten; d. h. dem *vollständigen Viereck der ersten das vollständige Vierseit der letzten.*

Wenn sich zwei Kegelschnitte berühren, so berühren sich auch ihre Reziproken; denn da die ersten einen Punkt und die zugehörige Tangente gemein haben, so müssen die letzten eine Tangente und den zugehörigen Berührungspunkt gemein haben. Und wenn zwei Kegelschnitte mit einander in doppelter Berührung sind, so sind es auch ihre Reziproken. *Die Reziproken eines Büschels bilden eine Schar.*

Sind die Kegelschnitte S, s und die Leitkurve L gegeben, so entsprechen den gemeinsamen Punkten oder Tangenten von L und s die gemeinsamen Tangenten oder Punkte von L und S. Denn die Schnittpunkte L, s und die Tangenten L, S sind paarweise Berührungspunkte und Tangenten der sich selbst reziproken Leitkurve. *Somit haben je zwei reziproke Kegelschnitte S, s mit der Leitkurve L ein gemeinschaftliches Polardreieck.*

Sind nur S und s gegeben, so kann die Leitkurve L nur einer von den vier Kegelschnitten sein, die durch das gemeinsame Polardreieck und die fernere Bedingung bestimmt sind, daß einer der vier gemeinsamen Punkte A, B, C, D von S, s der Pol zu einer ihrer vier gemeinsamen Tangenten a, b, c, d in bezug auf ihn sein muß. *Es gibt also vier Kegelschnitte L_1, L_2, L_3, L_4 bezüglich deren zwei gegebene S und s einander polarreziprok sind.*

B. 1) Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt umgeschrieben bleibt während zwei seiner Ecken in festen Geraden fortschreiten, so be-

Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben bleibt während sich zwei seiner Seiten um feste Punkte drehen, so umhüllt

schreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist. (Nr. 295, 1.)

die dritte Seite einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist. (Nr. 295, 2.)

2) Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, oder wenn sie alle mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so gehen die sechs Schnittsehnen derselben viermal zu je dreien durch einen Punkt. (Nr. 267.) Man darf diese Punkte als die vier Potenzmittelpunkte der drei Kegelschnitte bezeichnen, die denselben vierten Kegelschnitt doppelt berühren.

Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Punkte haben, oder wenn sie alle mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so liegen die sechs Schnittpunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten viermal zu je dreien in einer Geraden. Man kann diese Geraden als die vier Ähnlichkeitsachsen der drei Kegelschnitte bezeichnen, die denselben vierten Kegelschnitt doppelt berühren. (Vgl. Teil 1, Nr. 122.)

3) Wenn sich zwei Kegelschnitte berühren, so schneiden sich die Tangenten derselben in den Endpunkten einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne in der gemeinschaftlichen Sehne der Kegelschnitte.

Wenn sich zwei Kegelschnitte berühren, so gehen die Verbindungslinien der Berührungspunkte ihrer Tangenten aus einem Punkte ihrer gemeinsamen Tangente durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte.

4) Wenn man durch einen Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte zwei beliebige Sehnen zieht, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in einer oder der andern von den gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte.

Wenn man in einer gemeinschaftlichen Sehne zweier Kegelschnitte zwei Punkte wählt, so liegen die Schnittpunkte der von ihnen ausgehenden Tangenten in Geraden, die durch einen oder den anderen von den Schnittpunkten der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte gehen.

5) Wenn die Kegelschnitte A und B beide mit dem Kegelschnitt S in doppelter Berührung sind, so schneiden sich ihre Berührungssehnen mit S und ihre Schnittsehnen mit einander in einem Punkte und bilden ein harmonisches Büschel. (Nr. 261.)

Wenn die Kegelschnitte A und B mit dem Kegelschnitt S in doppelter Berührung sind, so liegen die Schnittpunkte ihrer mit S gemeinschaftlichen Tangenten und die der Paare ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in einer Geraden und bilden eine harmonische Reihe. (Nr. 309, 4.)

6) Wenn die Kegelschnitte A, B, C den Kegelschnitt S je doppelt und überdies A und B beide C einfach berühren, so schneiden sich die Tangenten in den Berührungspunkten in einer gemeinschaftlichen Sehne von A und B.

Wenn die Kegelschnitte A, B, C den Kegelschnitt S je doppelt und überdies A und B beide C einfach berühren, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten von A und B.

395. **Invariantentheorie reziproker Kegelschnitte.** Für die analytische Untersuchung polarreziproker Figuren wird die äußerste Vereinfachung dadurch erreicht, daß die Leitkurve in der Gleichungsform

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{18}$$

vorausgesetzt werden darf. Die Substitutionen der Reziprozität reduzieren sich dann auf $\mu u_i = x_i$, d. h. auf einen bloßen Bedeutungswechsel der Koordinaten. *Jede ternäre Gleichung definiert, in Punkt- oder in Linienkoordinaten gedeutet, polarreziproke Kurven,* mit (18) als Leitkurve. Abgesehen von der Deutung ist daher die Tangentialgleichung einer gegebenen Kurve identisch mit der Gleichung der Reziproken (der Reziprokalgleichung) in den gegebenen Veränderlichen.

Bei monomischen Substitutionen bleiben Normalformen der Gleichungen erhalten (Nr. 299). Also kann das Fundamentaldreieck in einem Polarsystem stets so gewählt werden, daß mit bezug auf $L \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ als Leitkurve irgend zwei reziproke Kegelschnitte die Gleichungen haben

$$\left\{\begin{aligned} f(x, x) &\equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0, \\ \chi(u, u) &\equiv a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 = 0, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

wo die letzte gleichbedeutend ist mit

$$a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 = 0.$$

Diese beiden Kegelschnitte sind aber nicht nur bezüglich der angegebenen Leitkurve reziprok, sondern überhaupt, so lange die Bedingungen $\mu^2 u_i^2 = x_i^2$ erfüllt sind. Daher gibt es je *vier* Kegelschnitte, hinsichtlich deren zwei Kegelschnitte zu einander polarreziprok sind. Ihre Gleichungen können gleichzeitig als

$$x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 0 \tag{20}$$

(für alle Zeichenkombinationen) geschrieben werden, sie haben also ein gemeinsames Polardreieck und paarweise doppelte Berührung, können aber nicht sämtlich reell sein (Nr. 394).

Die Polarkurve, also die Hüllkurve der in bezug auf eine Leitkurve $g(x, x) = 0$ genommenen Polaren aller Punkte von $f(x, x) = 0$, ist eine simultane Kovariante. In der Tat ist ihre Gleichung in der Form

$$3\mathsf{H}g(x, x) - 2k(x, x) = 0 \tag{21}$$

darstellbar (Nr. 354, 1), wobei die Invariante $3\mathsf{H}$ in Nr. 343 und 348, die Kovariante $2k(x, x)$ in Nr. 354 definiert ist.

Ebenso können wir nun $f(x, x)$ als eine Leitkurve betrachten, in bezug auf die wir die Polarkurve von $g(x, x)$ bilden; diese erscheint dann in der Gleichungsform

$$3\Theta f(x, x) - 2k(x, x) = 0. \tag{21a}$$

Daher geht die Kovariante $2k(x, x)$ zweier Kegelschnitte $f(x, x)$, $g(x, x)$ durch die Schnittpunkte jedes der beiden Kegelschnitte mit der Polarkurve des anderen in bezug auf ihn. Ist die Kovariante $2k$ selbst die Reziproke eines der Kegelschnitte in bezug auf den anderen, so sind diese konjugiert (Nr. 349), und umgekehrt.

Also decken sich für $\mathsf{H} = 0$, $\Theta = 0$ die beiden Polarkurven (21) und (21a) mit der Kovariante k. Aus den Gleichungen

$$a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2 = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

folgt aber, daß, für ε als eine komplexe Kubikwurzel der Einheit, zu setzen ist

$$a_1 = \varepsilon a_2 = \varepsilon^2 a_3 .$$

Somit gibt es Tripel von doppelt-harmonischen Kegelschnitten

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad \varepsilon^2 x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ \varepsilon x_1^2 + \varepsilon^2 x_2^2 + x_3^2 = 0, \end{array} \right. \tag{22}$$

deren jeder zugleich die Hauptkovarianten $2k$ und $2H$ und die vereinigten Polarkurven für die beiden andern darstellt (vgl. auch Nr. 360, S. 246). Jedem derselben können dann Dreiecke eingeschrieben werden, die einem der andern umgeschrieben sind (Nr. 351). Die imaginäre Darstellungsform beweist nur, daß das gemeinsame Polardreieck nicht reell ist; die drei Kegelschnitte können reell sein (vgl. B. 3).

B. 1) Die Polarreziproke der gleichseitigen Hyperbel $c^2xy = a^2x'y - b^2y'x$ (Nr. 178, Gl. (9)) in bezug auf die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist eine Parabel $(x'x - y'y - c^2)^2 + 4x'y'xy = 0$, die die Koordinatenachsen berührt. Die gemeinsamen Tangenten der Parabel und Ellipse berühren diese Kurven in den Fußpunkten der von $x' \mid y'$ auf sie gefällten Normalen.

2) Der mit $f(x, x)$, $g(x, x)$ kovariante Kegelschnitt $\Theta f(x, x) - \mathsf{H} g(x, x) = 0$ geht durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte f, g und durch die ihrer Polarkurven.

3) Ein Tripel doppelt-harmonischer Kegelschnitte wird bestimmt durch zwei gleiche Kreise, deren gemeinsame Sehne dem Radius gleich ist. Vgl. Nr. 350, 9.

Denn, setzen wir in den Gleichungen (22) des Textes

$$x_1 = 1 + xi, \quad x_2 = 1 - xi, \quad x_3 = y,$$

so gehen sie über in

$$2(1 - x^2) + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{3}x - 1 = 0.$$

Der erste von diesen drei Kegelschnitten ist eine Hyperbel, bei der das Quadrat der halben Nebenachse halb so groß wie das Quadrat der Radien der beiden Kreise ist.

4) Je zwei doppelt-harmonische Kegelschnitte haben Schnittpunkte von äquianharmonischem Doppelverhältnis (Nr. 359, Gl. (69)).

5) Die Leitkurven zweier polarreziprok gedachter Kegelschnitte

$$\Sigma a_i x_i^2 = 0, \quad \Sigma b_i x_i^2 = 0$$

sind
$$x_1^2 \sqrt{a_1 b_1} \pm x_2^2 \sqrt{a_2 b_2} \pm x_3^2 \sqrt{a_3 b_3} = 0.$$

Man unterscheide die hinsichtlich ihrer Realität möglichen Fälle.

6) Ein Kegelschnitt kann so bestimmt werden, daß ihm von fünf Polarsystemen je ein Polardreieck eingeschrieben werden kann, oder daß er in k Polarsystemen harmonisch ist und durch $5 - k$ gegebene Punkte geht. Diese Bestimmung umfaßt sehr viele besondere Fälle. (Vgl. Nr. 349 und Beispiele.)

396. **Zirkulares Polarsystem.** Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Leitkurve L ein ganz beliebiger Kegelschnitt sei. Man pflegt diesen jedoch zumeist als einen Kreis anzunehmen, weil die Reziprozität dann einen metrisch elementaren Charakter annimmt. Wir wollen darum im Folgenden überall, wo von Polarkurven ohne weiteren Beisatz die Rede ist, *Polarkurven in bezug auf einen Kreis* verstanden denken. *Aus diesem zirkularen Polarsystem geht jedes andere durch*

kollineare Umformung hervor. Die Beziehung zwischen Polarkurven in bezug auf einen Kreis läßt sich (Nr. 110) wie folgt aussprechen: *Wenn man von einem gegebenen Punkte O aus* (Fig. 41) *auf jede Tangente der Kurve S eine Normale O T fällt und diese so weit verlängert, daß das Rechteck der Segmente $OT \cdot Op$ einen konstanten Wert k^2 erhält, so ist der Ort der Punkte p eine Kurve s, die die reziproke Polare von S genannt wird.* Denn dies ist mit der Bestimmung gleichbedeutend,

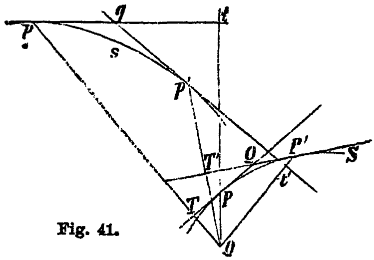


Fig. 41.

daß p der Pol von PT in bezug auf einen Kreis vom Mittelpunkt O und Radius k ist; die Tangente pt entspricht daher dem Berührungspunkte P, d. h. es ist auch OP rechtwinklig zu pt und $OP \cdot Ot = k^2$.

Eine Veränderung der Größe k ändert zwar die Stelle, aber nicht die Gestalt von s, die allein in den meisten Fällen uns angeht. Darum kann in dieser Anschauungsweise von der Beziehung der Polarkurven die Beziehung auf den Kreis ganz unterdrückt werden, die Polarkurve s in bezug auf den Leitkreis kann als die *Reziproke von S in bezug auf den Punkt O* bezeichnet werden, den man für diesen Fall den *Ursprung* der Reziprozität nennt.

Die mit der Anwendung des Kreises als Hilfskegelschnitt verbundenen Vorteile erlauben, mit Hilfe dieser Methode außer Sätzen über die *Lage* der Figuren auch solche zu transformieren, die *metrische Beziehungen* von Linien und Winkeln enthalten. Die Grundlage bilden die beiden Sätze: *Die Entfernung eines Punktes P vom Ursprung ist der reziproke Wert der Entfernung des Ursprungs von der entsprechenden Geraden pt. Der von zwei beliebigen Geraden TQ, $T'Q$ eingeschlossene Winkel ist dem Winkel pOp' gleich, den die entsprechenden Punkte p, p' am Ursprung bestimmen*; denn Op ist normal zu TQ und Op' zu $T'Q$.

397. **Polarreziproke eines Kreises.** Ist der Ort des Pols p einer Tangente PT des Kreises C in bezug auf den Kreis k vom

Mittelpunkt O zu ermitteln (Fig. 42) und ist MN die Polare des Mittelpunktes von C in bezug auf den Kreis k, so besteht für die Punkte C, p und ihre Polaren MN, PT nach Nr. 112 die Beziehung

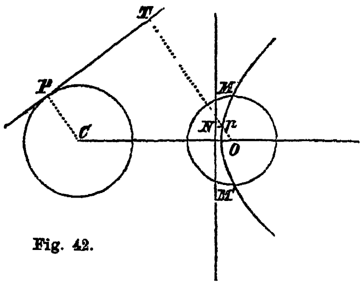


Fig. 42.

$$OC : CP = Op : pN.$$

Diese zeigt nach der Konstanz von OC und CP, daß der Abstand des Punktes p von O zu seinem Abstand von der Geraden MN in einem konstanten Verhältnis $OC : CP$ steht. Der Ort von p ist daher ein Kegelschnitt, der O zum Brennpunkt, MN zur entsprechenden Leitlinie und $OC : CP$ als Exzentrizität hat (Nr. 183).

Diese ist demnach größer oder kleiner als Eins, je nachdem O außerhalb oder innerhalb des Kreises C liegt, und sie ist gleich Eins, wenn der Punkt O der Peripherie desselben angehört. *Die Polarreziproke eines Kreises ist ein Kegelschnitt, der den Ursprung zum Brennpunkt und die dem Mittelpunkt entsprechende Gerade zur Leitlinie hat; derselbe ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem der Ursprung innerhalb oder außerhalb des Kreises oder auf demselben liegt.*

Analytisch liefert in der Tat die formale Übereinstimmung der Kreisgleichung und der Fokalgleichung von Nr. 196 den Beweis. So ist die Reziproke des Kreises $(x - \alpha)^2 + y^2 = \varrho^2$ in bezug auf $x^2 + y^2 - 1 = 0$ der Kegelschnitt

$$\varrho^2(x^2 + y^2) - (\alpha x - 1)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (u + \alpha)^2 + v^2 - \varrho^2 = 0.$$

Daher fällt die Hauptachse desselben in die Gerade OC und ist gleich dem durch die Kreispotenz des Ursprungs dividierten Durchmesser. Die Kegelschnittsordinate im Brennpunkt ist $1 : \varrho$, *also ist der Hauptparameter der Reziproken eines Kreises gleich dem reziproken Wert des Radius,* unabhängig von der Lage des Kreises.

B. 1) Wenn drei Kegelschnitte einen Brennpunkt gemein haben, so liegen die Schnittpunkte der Paare ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in einer Geraden. Denn für den gemeinschaftlichen Brennpunkt als Anfangspunkt sind die reziproken Kurven

Kreise, und die besagten Schnittpunkte werden die Potenzlinien derselben.

2) Man konstruiere die Leitlinien der vier Kegelschnitte, die durch drei gegebene Punkte gehen und einen vorgeschriebenen Brennpunkt haben.

Dazu hat man nur den Mittelpunkt des Kreises zu suchen, der die Polaren der drei Punkte in bezug auf den Brennpunkt berührt.

398. **Winkelbeziehungen.** Zur reziproken Umformung einer Reihe von Eigenschaften, die sich auf die Größe von Winkeln beziehen, machen wir von dem letzten Satze in Nr. 396 Gebrauch.

B. 1) Zwei Tangenten eines Kreises bilden mit ihrer Berührungssehne gleiche Winkel.	Die Verbindungslinie des Schnittpunktes zweier Tangenten mit einem Brennpunkt halbiert den Winkel der Brennstrahlen der Berührungspunkte. (Nr. 190.)

Denn der Winkel QPP' (Fig. 41) ist dem Winkel gleich, der an O von p, q gespannt wird; ebenso ist der Winkel $QP'P$ dem von p', q an O gespannten Winkel gleich; wegen $QPP' = QP'P$ ist daher $pOq = p'Oq$.

2) Jede Tangente eines Kreises ist senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit dem Mittelpunkt.	Jeder Punkt eines Kegelschnittes faßt mit dem Schnittpunkt seiner Tangente mit der Leitlinie am Brennpunkt einen rechten Winkel.

Denn die Leitlinie des Kegelschnittes entspricht dem Mittelpunkt des Kreises.

3) Jede Gerade ist senkrecht zu der Verbindungsgeraden ihres Pols mit dem Mittelpunkt des Kreises.	Jeder Punkt faßt mit dem Schnittpunkt seiner Polare mit der Leitlinie am Brennpunkt einen rechten Winkel.
4) Die Gerade, die einen Punkt mit dem Mittelpunkt eines Kreises verbindet, bildet mit den durch diesen Punkt an den Kreis gezogenen beiden Tangenten gleiche Winkel.	Die Verbindungsgerade des Brennpunktes mit dem Schnittpunkte einer Geraden mit der Leitlinie halbiert den Winkel zwischen den Brennstrahlen der Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt.
5) Der Ort des Schnittpunktes derjenigen Tangenten eines Kreises, die einander unter gegebenem	Die Hüllkurve der Sehnen eines Kegelschnittes, die einen gegebenen Winkel am Brennpunkt span-

Winkel schneiden, ist ein konzentrischer Kreis.

nen, ist ein Kegelschnitt mit dem nämlichen Brennpunkt und derselben Leitlinie. (Nr. 300, 3.)

6) Die Hüllkurve der Berührungssehnen derjenigen Tangenten eines Kreises, die sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, ist ein konzentrischer Kreis.

Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten eines Kegelschnittes, deren Berührungssehnen am Brennpunkt einen gegebenen Winkel spannen, ist ein Kegelschnitt mit demselben Brennpunkt und derselben Leitlinie.

7) Wenn man von einem festen Punkte an eine Reihe konzentrischer Kreise Tangenten zieht, so ist der Ort der Berührungspunkte ein durch den festen Punkt und den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gehender Kreis.

Wenn eine feste Gerade eine Reihe von Kegelschnitten mit demselben Brennpunkt und derselben Leitlinie schneidet, so ist die Hüllkurve der Tangenten in den Schnittpunkten ein Kegelschnitt von demselben Brennpunkte, der die feste Gerade und die Leitlinie berührt.

Wenn wir die Gerade unendlich fern voraussetzen, so ergibt sich als ein besonderer Fall des Satzes, daß die Hüllkurve der Asymptoten aller derjenigen Hyperbeln, die denselben Brennpunkt und dieselbe Leitlinie haben, eine Parabel ist, die denselben Brennpunkt hat und die gemeinschaftliche Leitlinie berührt.

8) Die Hypotenuse eines dem Kreise eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Der Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, die einander rechtwinklig schneiden, ist die Leitlinie.

Wir sagen „einer *Parabel*", denn wenn die der Hypotenuse eines solchen rechtwinkligen Dreiecks gegenüberliegende Ecke als Ursprung gewählt wird, ist die Polarkurve des Kreises eine Parabel (Nr. 397).

9) Die Hüllkurve einer Sehne im Kreise, die an einem gegebenen Punkte seiner Peripherie einen vorgeschriebenen Winkel spannt, ist ein konzentrischer Kreis.

Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten einer Parabel, die einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist ein Kegelschnitt, der denselben Brennpunkt und dieselbe Leitlinie hat.

Eine nochmalige reziproke Umformung des letzten Satzes liefert den zum ersten kollinearen Satz: Wenn die Sehne eines Kegelschnittes an einem gegebenen Punkt desselben einen konstanten Winkel spannt, so berührt sie stets einen Kegelschnitt, der den gegebenen doppelt berührt.

10) Wenn die Basis und der Winkel an der Spitze eines Dreiecks gegeben sind, so ist der Ort der Spitze ein Kreis, der durch die Endpunkte der Basis geht.

Wenn von einem Dreieck zwei Seiten nach ihrer Lage und der Sehwinkel der Basis an einem bestimmten Punkte gegeben sind, so umhüllt die Basis einen Kegelschnitt, der diesen Punkt zum Brennpunkt hat und die beiden gegebenen Seiten berührt.

11) Der Ort des Schnittpunktes zu einander rechtwinkliger Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel ist ein Kreis.

Die Hüllkurve der Sehne eines Kegelschnittes, die an einem gegebenen Punkte einen rechten Winkel spannt, ist ein Kegelschnitt, der diesen Punkt zum Brennpunkt hat. (Nr. 264.)

12) Die Fußpunkte der Lote, die aus einem Punkte in der Peripherie eines Kreises auf die Seiten eines ihm eingeschriebenen Dreiecks gefällt werden, liegen in einer Geraden (Nr. 302, 3). Wenn wir jenen Punkt zum Ursprung der Reziprozität wählen, so entspricht dem Dreieck ein einer Parabel umgeschriebenes Dreiseit; es entspricht auch dem Fußpunkt des auf eine Gerade gefällten Lotes die durch den entsprechenden Punkt senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Ursprung gezogene Gerade. Wenn wir also die Ecken eines Dreiecks, das einer Parabel umgeschrieben ist, mit dem Brennpunkt derselben verbinden und in jenen Eckpunkten auf diesen Verbindungslinien Senkrechte errichten, so gehen diese durch denselben Punkt. Der Kreis, der die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Brennpunkt zum Durchmesser hat, geht daher durch die Ecken des umgeschriebenen Dreiecks. Somit: *Die Brennpunkte der Parabeln, die die Seiten eines Dreiecks zu Tangenten haben, liegen auf dem umgeschriebenen Kreis des Dreiecks.* (Nr. 212.)

13) Der Ort des Fußpunktes der Senkrechten (oder gleichgeneigten Geraden) vom Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangenten der Kurve ist ein Kreis.

Wenn man von irgend einem Punkte aus nach einem Kreise Strahlen zieht und in den Endpunkten derselben Senkrechte (oder gleichgeneigte Geraden) auf ihnen errichtet, so ist deren Hüllkurve ein Kegelschnitt, der den Punkt zum Brennpunkt hat.

399. **Vektorenbeziehungen.** Die Umformung von Sätzen, die die Größen von Vektoren aus dem Ursprung enthalten, kann auf Grund des ersten Satzes in Nr. 396 geschehen.

B. 1) Die Summe (bez. die Differenz) der Abstände paralleler Tangenten eines Kreises vom Ursprung ist konstant.	Die Summe der reziproken Werte der Abschnitte einer Fokalsehne in der Ellipse ist konstant.

Denn parallelen Geraden entsprechen Punkte in einer durch den Ursprung gehenden Geraden. Da diese Summe bez. Differenz dem doppelten reziproken Wert des Parameters des Kegelschnittes gleich ist (Nr. 184, 1), so ist bestätigt, daß dieser nur vom Durchmesser und nicht von der Lage des reziproken Kreises abhängt (Nr. 397). Also haben die Reziproken gleicher Kreise in bezug auf irgend einen Ursprung denselben Parameter.

2) Das Rechteck der Abschnitte jeder durch den Ursprung gezogenen Sehne eines Kreises ist konstant.	Das Rechteck aus den Senkrechten, die man vom Brennpunkt auf zwei parallele Tangenten fällt, ist konstant.

Daher ist mit der durch den Ursprung an einen Kreis zu ziehenden Tangente auch die konjugierte Achse der reziproken Hyperbel gegeben.

3) Die Summe der Entfernungen des Brennpunktes von den Berührungspunkten paralleler Tangenten ist konstant, nämlich gleich der Summe der Brennstrahlen eines der Punkte.	Die Summe der reziproken Werte der Abstände eines beliebigen Punktes von solchen zwei Tangenten eines Kreises, deren Berührungssehne durch jenen Punkt geht, ist konstant.

400. **Reziproke homogene Gleichungen.** Jede homogene Gleichung zwischen den Längen der Normalen Pa, Pb, usw., die von einem veränderlichen Punkte P auf feste Geraden a, b, usw. gefällt werden, kann so transformiert werden, daß wir eine homogene Gleichung zwischen den Loten Ap, Bp, usw. erhalten, die von den den festen Geraden entsprechenden festen Punkten A, B, usw. auf die veränderliche Gerade p gefällt werden, die dem Punkte P entspricht. Denn wir haben die Gleichung nur durch eine Potenz von OP, den Abstand des Ursprungs vom Punkte P, zu dividieren, um dann nach Nr. 112 für jedes Verhältnis $Pa : OP$ das gleichwertige $Ap : OA$ zu substituieren.

Wenn z. B. Pa, Pb, Pc, Pd die vom beweglichen Punkte eines Kegelschnittes auf die Seiten eines eingeschriebenen Vierecks gefällten Lote sind, so ist nach Nr. 279

$$Pa \cdot Pc = k \cdot Pb \cdot Pd. \tag{23}$$

Die Division jedes Faktors mit OP und die angegebene Substitution liefert die Beziehung

$$\frac{Ap}{OA} \cdot \frac{Cp''}{OC} = k \frac{Bp'}{OB} \cdot \frac{Dp'''}{OD}. \tag{24}$$

Da OA, OB, OC, OD konstant sind, so steht für ein festes, dem Kegelschnitt umgeschriebenes Vierseit das Produkt der Abstände einer veränderlichen Tangente von zweien seiner Gegenecken zu dem Produkt ihrer Abstände von den beiden andern Gegenecken in einem konstanten Verhältnis, wie in Nr. 279.

Da nun jede Gleichung in trimetrischen Normalkoordinaten x_i (Nr. 69 und 87) eine homogene Beziehung zwischen den Abständen eines Punktes von drei festen Geraden ist, so können wir die Gleichung nach dieser Methode in eine Beziehung zwischen den Abständen dreier fester Punkte von der entsprechenden Geraden verwandeln, d. h. in eine Beziehung zwischen trimetrischen Linienkoordinaten u_i; also die homogene Gleichung einer Kurve in den x_i in die ihrer Reziprokalkurve in den u_i. So wird für ϱ_i als die Entfernungen des Ursprungs von den Ecken des neuen Fundamentaldreiecks die allgemeine homogene Ortsgleichung zweiten Grades transformiert in

$$\Sigma a_{ik} \frac{u_i u_k}{\varrho_i \varrho_k} = 0.$$

Und für y_i als die Dreieckskoordinaten des Ursprungs geht aus einer Gleichung zweiten Grades $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$ die Gleichung der Reziprokalform in den x_i hervor

$$\Sigma A_{ik} \frac{x_i x_k}{y_i y_k} = 0.$$

B. 1) Das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes eines Kegelschnittes von zwei festen Tangenten desselben steht zu dem Quadrat seines Abstandes von ihrer Berührungssehne in einem konstanten Verhältnis. (Nr. 279.)

Das Produkt der Abstände zweier fester Punkte eines Kegelschnittes von einer beliebigen Tangente desselben steht in einem konstanten Verhältnis zu dem Quadrate des Abstandes jener Tangente vom Schnittpunkt der in jenen Punkten gezogenen Tangenten.

Wählt man bei dieser Transformation den Ursprung der Reziprozität in der Berührungssehne selbst, so lautet der reziproke

Satz: Das Rechteck aus den Abschnitten, die eine veränderliche Tangente eines Kegelschnittes in zwei parallelen festen Tangenten desselben bestimmt, ist konstant. (Nr. 286, 4.)

2) In jedem Kegelschnitte ist das Produkt der Längen der Lote, die man von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) auf eine beliebige Tangente fällt, konstant.

Das Quadrat des Abstandes eines festen Punktes von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnittes steht zu dem Produkte der Abstände dieses Punktes der Kurve von zwei festen Geraden in einem konstanten Verhältnis.

3) Wenn für einen Kegelschnitt ein Brennpunkt und ein umgeschriebenes Dreieck gegeben sind, so sind die Abstände u_i der Ecken des Dreiecks von einer beliebigen Tangente durch die Beziehung verbunden

$$\frac{\varrho_1}{u_1}\sin\theta_1 + \frac{\varrho_2}{u_2}\sin\theta_2 + \frac{\varrho_3}{u_3}\sin\theta_3 = 0$$

für $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ als die Winkel, unter denen die Seiten vom Brennpunkte aus erscheinen. Dies lehrt die Bildung der Reziproken von der homogenen Gleichung des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises.

Wird der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises als Brennpunkt genommen, so ist $\theta_i = \frac{1}{2}(\pi + A_i)$, $\varrho_i \sin\frac{1}{2}A_i = \varrho$, und die Gleichung des eingeschriebenen Kreises in diesem System ist

$$u_2 u_3 \cot\tfrac{1}{2}A_1 + u_3 u_1 \cot\tfrac{1}{2}A_2 + u_1 u_2 \cot\tfrac{1}{2}A_3 = 0.$$

Für jeden der äußerlich berührenden Kreise sind zwei der Kotangenten durch die entsprechenden Tangenten zu ersetzen.

4) Wenn für einen Kegelschnitt der Brennpunkt und ein eingeschriebenes Dreieck gegeben sind, so werden die Abstände seiner Ecken von einer veränderlichen Tangente der Kurve durch die Beziehung verbunden

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta_1\cdot\sqrt{\frac{u_1}{\varrho_1}} + \sin\tfrac{1}{2}\theta_2\cdot\sqrt{\frac{u_2}{\varrho_2}} + \sin\tfrac{1}{2}\theta_3\cdot\sqrt{\frac{u_3}{\varrho_3}} = 0.$$

Die Gleichung des umgeschriebenen Kreises in Linienkoordinaten erhält die Form

$$\sin A_1\sqrt{u_1} + \sin A_2\sqrt{u_2} + \sin A_3\sqrt{u_3} = 0.$$

5) Die Gleichung eines Kegelschnittes bei einem gegebenen Brennpunkt und drei Tangenten ist

$$\sin\theta_1\cdot\sqrt{\frac{x_1}{y_1}} + \sin\theta_2\cdot\sqrt{\frac{x_2}{y_2}} + \sin\theta_3\cdot\sqrt{\frac{x_3}{y_3}} = 0.$$

Man erhält sie durch die Bildung der Reziproken zu der zuletzt gefundenen Gleichung des umgeschriebenen Kreises.

6) In derselben Art erhalten wir aus 3) die Gleichung eines Kegelschnittes bei gegebenem Brennpunkt und drei Punkten

$$\frac{y_1}{x_1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta_1+\frac{y_2}{x_2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta_2+\frac{y_3}{x_3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta_3=0.$$

401. **Doppelverhältnis-Eigenschaften.** Manche auf Größenverhältnisse bezügliche Sätze lassen sich in solche über harmonische oder gleiche Doppelverhältnisse umwandeln. Ihre Transformation wird alsdann durch die grundlegende Eigenschaft ermöglicht: *Vier Punkten einer geraden Reihe entsprechen vier Strahlen eines Büschels von gleichem Doppelverhältnis.* Zur selbständigen elementaren Begründung derselben hat man nur anzuführen, daß jeder Strahl, der den Ursprung mit einem Punkte der Reihe verbindet, zu dem Strahle des Büschels, der dem Punkte entspricht, rechtwinklig ist. Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises ableiten.

Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ist aber nicht die einzige Streckenbeziehung, die durch eine Winkelbeziehung ausgedrückt werden kann. Für jede Gleichung, die durch die wie in Nr. 84 vollzogene Substitution des Ausdrucks

$$\frac{OA\cdot OB\cdot\sin AOB}{OP}\tag{25}$$

für jede in ihr vorkommende gerade Strecke AB in eine Gleichung zwischen den Sinus der an einem gegebenen Punkte O gespannten Winkel übergeführt werden kann, gilt ebenfalls, daß sie für die Schnittpunkte jeder beliebigen Transversale mit den Geraden OA, $OB\dots$ wahr ist, die jene Punkte mit diesem gegebenen Punkte verbinden. Indem man alsdann den gegebenen Punkt zum Ursprung der Reziprozität nimmt, kann ein reziproker Satz leicht abgeleitet werden. So ist z. B. der folgende *Carnot*sche Satz eine unmittelbare Folge von Nr. 150: Wenn ein Kegelschnitt die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 eines Dreiecks bez. in den Punktepaaren B_1, B_1'; B_2, B_2'; B_3, B_3' schneidet, so ist

$$\frac{A_2B_1\cdot A_2B_1'\cdot A_3B_2\cdot A_3B_2'\cdot A_1B_3\cdot A_1B_3'}{A_2B_3\cdot A_2B_3'\cdot A_3B_1\cdot A_3B_1'\cdot A_1B_2\cdot A_1B_2'}=1.\tag{26}$$

Dieses Verhältnis besitzt die eben erwähnte Eigenschaft, also

dürfen für die in ihm auftretenden Strecken die Sinus der Winkel eingeführt werden, die die Punkte O bestimmen. Wir können dann den zum Carnotschen Satze reziproken Satz von *Chasles* bilden, den wir in Nr. 314 gegeben haben.

B. Das Doppelverhältnis des Büschels, das durch die Verbindung von vier festen Punkten eines Kegelschnittes mit einem veränderlichen fünften Punkte entsteht, ist konstant.	Das Doppelverhältnis der Punkte, in denen vier feste Tangenten eines Kegelschnittes von einer veränderlichen fünften Tangente geschnitten werden, ist konstant.

Der erste dieser Sätze ist für den Kreis wahr, weil alle Winkel des Büschels konstant sind; infolgedessen ist der zweite für alle Kegelschnitte richtig. Der zweite Satz gilt für den Kreis, weil die von den vier Punkten am Mittelpunkt bestimmten Winkel konstant sind; infolgedessen ist der erste Satz für alle Kegelschnitte wahr.

Indem man die Winkel betrachtet, die in der reziproken Figur den am Kreise vorhandenen konstanten Winkeln entsprechen, erkennt man, daß die von den vier Punkten der veränderlichen Kegelschnittstangente am Brennpunkt bestimmten Winkel konstant sind, und daß ferner die Winkel, die von den Schnittpunkten der vier Strahlen des Büschels mit der Leitlinie am Brennpunkt gespannt werden, von konstanter Größe sind.

402. **Metrische Theorie reziproker Kegelschnitte.** Je näher eine Gerade oder ein Punkt dem Ursprung ist, desto weiter muß offenbar der entsprechende Punkt oder die entsprechende Gerade von demselben entfernt sein; insbesondere entspricht jeder durch den Ursprung gehenden Geraden ein unendlich ferner Punkt und dem Ursprunge selbst die unendlich ferne Gerade. Hieraus ergibt sich allgemein *die Bestimmung der Gattung des reziproken Kegelschnittes.*

Den beiden durch den Ursprung an die Kurve zu ziehenden Tangenten entsprechen die unendlich fernen Punkte der reziproken Kurve. Je nachdem vom Ursprung aus zwei reelle oder imaginäre Tangenten an die Kurve gezogen werden können, hat die reziproke Kurve zwei reelle oder imaginäre unendlich ferne Punkte, und wenn der Ursprung in der Kurve liegt, so daß die von ihm aus zu ziehenden Tangenten zusammenfallen, so fallen die unendlich fernen Punkte der reziproken Kurve zusammen und die zugehörige Tangente ist

die unendlich ferne Gerade. Mit den genau definierten Unterscheidungen gilt somit das Kriterium von Nr. 397 allgemein: *Der reziproke Kegelschnitt ist eine Hyperbel, eine Ellipse oder eine Parabel, je nachdem der Ursprung außerhalb, innerhalb des gegebenen Kegelschnittes oder auf demselben liegt, unabhängig von dessen Gattung.*

Den Berührungspunkten der Tangenten aus dem Ursprung entsprechen die Tangenten in den unendlich fernen Punkten der Reziproken, d. h. die Asymptoten derselben. *Die Exzentrizität der Reziproken* hängt nur von ihrem Asymptotenwinkel ab (Nr. 163) und dieser ist gleich oder supplementär dem Winkel, den die vom Ursprung ausgehenden Tangenten der Originalkurve einschließen. *Die Reziproke eines Kegelschnittes in bezug auf einen Punkt seines reellen Hauptkreises als Ursprung ist eine gleichseitige Hyperbel.*

Ferner entspricht der Schnittpunkt der Asymptoten der Reziproken der Berührungssehne der vom Ursprung an die gegebene Kurve gezogenen Tangenten. *Also entspricht der Mittelpunkt der Reziproken der Polare des Ursprungs in bezug auf den gegebenen Kegelschnitt.* Es ist nur ein besonderer Fall hiervon, wenn dem Mittelpunkt eines Kreises die Leitkurve des reziproken Kegelschnittes entspricht (Nr. 180).

Die Achsen der Reziprokalkurve sind parallel der Tangente und Normale eines mit dem gegebenen konfokalen Kegelschnittes, der durch den Ursprung geht. Denn sie sind parallel den Halbierungslinien des Winkels, den die vom Ursprung an die gegebene Kurve gehenden Tangenten mit einander bilden (Nr. 188 und 229). Auch sind die Achsen der Reziproken aus ihrer Durchmesser-Involution zu bestimmen, die zur Involution harmonischer Polaren des gegebenen Kegelschnittes am Ursprung projektiv ist. Sofort bekannt sind die Achsen dann, wenn eine Achse der gegebenen Kurve durch den Ursprung geht. Insbesondere gilt offenbar der Satz: *Die Reziproke eines Kegelschnittes in bezug auf seinen Mittelpunkt als Ursprung ist der koachsiale Kegelschnitt, dessen Achsen die reziproken Werte der gegebenen haben.*

B. 1) Die Reziproke einer Parabel in bezug auf einen Punkt ihrer Leitlinie ist eine gleichseitige Hyperbel.

2) Man weise die folgenden Sätze als reziprok nach:

Die Höhen eines der Parabel umgeschriebenen Dreiecks schneiden sich in der Leitlinie.	Die Höhen eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks schneiden sich auf der Kurve.

3) Man leite den letzten Satz aus dem von Pascal ab. (Vgl. Nr. 275, 3.)

403. **Reziproke Kegelschnittsysteme.** Durch die polarreziproke Umformung gehen die punktuell-linearen Kurvensysteme aller Stufen in tangentiell-lineare Systeme derselben Stufen über (Nr. 271). Sehr häufig kann man durch geeignete Wahl des Ursprungs dem reziproken System einen besonderen Charakter geben, der die Untersuchung desselben übersichtlicher werden läßt.

Allen Kegelschnitten mit einem gemeinsamen reellen Punkt entsprechen für diesen als Ursprung gleichzeitig *Parabeln*. Allen Kegelschnitten mit zwei reellen oder imaginären gemeinsamen Tangenten entsprechen für deren Schnittpunkt als Ursprung gleichzeitig Kegelschnitte mit parallelen Achsen und Asymptoten, d. h. *homothetische Kegelschnitte*.

Die Reziproken von irgend zwei Kegelschnitten können konzentrisch gemacht werden, indem man eine Ecke ihres gemeinsamen Polardreiecks als Ursprung nimmt. Jedes Büschel oder jede Schar entspricht so einer Schar oder einem Büschel *konzentrischer Kegelschnitte*, deren Grundelemente ein Parallelogramm bilden.

Die reziproken Umformungen beliebiger Kreissysteme geben das Mittel, Eigenschaften von Kegelschnitten zu erkennen, die *einen* gemeinsamen Brennpunkt haben. Zu den Kreisen eines Büschels ohne reelle Schnittpunkte läßt sich stets ein Punkt finden, für den als Ursprung die reziproken Kurven der Kreise *konfokale Kegelschnitte* werden (Nr. 228). Denn diese Reziproken werden konfokal, sobald sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben. Also muß der Ursprung in bezug auf die Kreise die nämliche Polare haben, d. h. er muß einer der beiden *Grenzpunkte* des Büschels sein.

B. 1) Konfokale Kegelschnitte schneiden einander rechtwinklig. (Nr. 229.)

Die gemeinschaftliche Tangente von zwei Kreisen bestimmt an jedem der Grenzpunkte einen rechten Winkel.

2) Die Tangenten von zwei konfokalen Kegelschnitten aus einem beliebigen Punkte bilden gleiche Winkel mit einander. (Nr. 229.)

Die auf einer Sekante von zwei Kreisen zwischen denselben gelegenen Abschnitte spannen an jedem der Grenzpunkte gleiche Winkel.

3) Der Ort des Pols einer festen Geraden in bezug auf die Kegelschnitte eines konfokalen Systems ist zur festen Geraden rechtwinklig. (Nr. 229, 1.)

Die Polaren eines festen Punktes in bezug auf die Kreise eines Büschels gehen durch einen festen Punkt, der mit jenem an jedem der Grenzpunkte einen rechten Winkel bestimmt.

4) Die Methode der reziproken Polaren bietet eine einfache Auflösung der Aufgabe des *Apollonius* dar: *Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt.* Der Ort des Mittelpunktes für einen Kreis, der zwei gegebene Kreise (1), (2) berührt, ist offenbar eine Hyperbel, die die Mittelpunkte dieser Kreise zu Brennpunkten hat; denn die Aufgabe reduziert sich sogleich auf diese andere: Man soll den Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmen, für das die Basis und die Differenz der Seiten gegeben ist. Infolgedessen muß (Nr. 396) die Polare des Mittelpunktes in bezug auf einen der gegebenen Kreise immer einen Kreis berühren, der leicht konstruiert werden kann. Ebenso muß die Polare des Mittelpunktes für einen unter denjenigen Kreisen, die die Kreise (1) und (3) zugleich berühren, auch einen gegebenen Kreis berühren. Wenn wir daher zu den zwei so bestimmten Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente ziehen und den Pol derselben in bezug auf den Kreis (1) nehmen, so ist mit ihm der Mittelpunkt eines die drei Kreise berührenden Kreises gefunden.

404. **Gleichung des reziproken Kegelschnittes.** Wenn die Länge des vom Mittelpunkt auf die Tangente gefällten Lotes mit Hilfe des von ihr mit den Achsen gebildeten Winkels α durch $p = \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)}$ ausgedrückt wird (Nr. 167, 1), so ist der Abstand p_0 eines beliebigen Punktes $x_0 \mid y_0$ von dieser Tangente gleich $p - x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha$. Mit Hilfe von $p_0 r_0 = k^2$ ergibt sich hieraus unmittelbar *die Gleichung der Reziproken eines Kegelschnittes mit bezug auf einen Punkt $x_0 \mid y_0$ als Ursprung in der Form*

$$(27) \qquad (x_0 x + y_0 y + k^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2;$$

insbesondere erhält man $a^2x^2 + b^2y^2 = k^4$, wenn der Mittelpunkt selbst Ursprung ist. (Nr. 397.)

Ist überhaupt die Reziproke einer Kurve in bezug auf den zum Ursprung genommenen Nullpunkt der Koordinaten bekannt, so kann man daraus die Gleichung ihrer für einen beliebigen Punkt $x_0 \mid y_0$ als Ursprung gebildeten Reziproken ableiten. Ist nämlich p der Abstand einer Tangente vom Nullpunkt, also ihr Abstand $P_0 Q_0 = P$ vom Punkte $x_0 \mid y_0$ gleich $(p - x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha)$, so ist wegen $pr = k^2$, $P \cdot R = K^2$ die Polargleichung der reziproken Kurve

$$\frac{K^2}{R} = \frac{k^2}{r} - x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha; \qquad \text{daher}$$

$$\frac{k^2}{r} = \frac{x_0 x + y_0 y + k^2}{R} \quad \text{und} \quad \frac{r\cos\alpha}{k^2} = \frac{R\cos\alpha}{x_0 x + y_0 y + k^2}.$$

Wir müssen demnach in die Gleichung der auf den Koordinatenanfang bezogenen reziproken Kurve für x und y bez.

$$(28) \qquad \frac{k^2 x}{x_0 x + y_0 y + k^2} \quad \text{und} \quad \frac{k^2 y}{x_0 x + y_0 y + k^2}$$

einsetzen, um die gesuchte Gleichung zu erhalten.

Das Ergebnis dieser Substitution kann in der folgenden Art einfach ausgedrückt werden: Sei die Gleichung der auf den Anfangspunkt der Koordinaten bezogenen reziproken Kurve

$$u^{(n)} + u^{(n-1)} + u^{(n-2)} + \cdots = 0,$$

wo $u^{(m)}$ die Vereinigung der Glieder m^{ten} Grades bedeutet. Dann ist die Gleichung der dem Punkte $x_0 \mid y_0$ entsprechenden Reziproken

$$u^{(n)} + u^{(n-1)}\left(\frac{x_0 x + y_0 y + k^2}{k^2}\right) + u^{(n-2)}\left(\frac{x_0 x + y_0 y + k^2}{k^2}\right)^2 + \cdots = 0.$$

Sie ist offenbar mit der ersten von demselben Grade.

So wird die Reziproke eines durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnittes in bezug auf die Leitkurve $x^2 + y^2 = k^2$ durch Einsetzen von $-x : k^2 \mid -y : k^2$ für $u \mid v$ in die Tangentialgleichung erhalten als

$$A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 - 2A_{13}k^2x - 2A_{23}k^2y + A_{33}k^4 = 0.$$

Allgemein hat die reziproke Polare einer Kurve $f(x, x) = 0$ in bezug auf eine Leitkurve $g(x, x) = 0$ die Gleichung

$$F(g_1, g_2, g_3) = 0, \text{ wo } g_i = \tfrac{1}{2} g'(x_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Dies wurde bereits in Nr. 354, 1 gezeigt; dabei ist

(29) $$F(g_1, g_2, g_3) \equiv 3\,\mathsf{H} g(x, x) - 2k(x, x).$$

(Vgl. auch Nr. 395.)

B. Man erläutere den Fall der Bildung der Polarreziproken in bezug auf die symmetrisch geschriebene Leitkurve $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

405. **Parabolische Polarreziprozität.** Es gibt eine Gruppe von Sätzen, zu deren Transformation vorteilhaft eine *Parabel als Leitkurve*[125]) genommen werden kann. Diese Sätze beziehen sich auf die Größe von Strecken, die einer festen Geraden parallel gemessen sind. Die Parabel ist zur reziproken Umformung dieser Sätze besonders geeignet, weil der zwischen irgend zwei Geraden gelegene Abschnitt in der Achse der Parabel demjenigen Abschnitt der Achse gleich ist, der zwischen den von den Polen dieser Geraden gefällten Achsennormalen liegt. (Nr. 204.)

Bei der Anwendung dieser Methode entsprechen den zwei Kurventangenten, die der Achse der als Leitkurve gewählten Parabel parallel sind, die unendlich fernen Punkte in der Reziproken. Daher ist diese Kurve eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem jene Tangenten reell oder imaginär sind; endlich ist die Kurve eine Parabel, wenn diese Achse durch einen der unendlich fernen Punkte der gegebenen Kurve geht.

Immerhin ist diese Methode der parabolischen Polaren in ihrer Anwendung offenbar beschränkt.

B. 1) Jede veränderliche Tangente eines Kegelschnittes bestimmt in zwei festen parallelen Tangenten desselben Abschnitte, deren Rechteck von konstanter Größe ist (Nr. 151 und 171, 3).	Die Asymptoten und die durch irgend einen Punkt der Kurve zu ihnen gezogenen Parallelen bestimmen in einer festen Geraden Abschnitte, deren Rechteck konstant ist (Nr. 164).

Den Berührungspunkten der parallelen Tangenten entsprechen die Asymptoten der reziproken Hyperbel, den Schnittpunkten mit der beweglichen Tangente aber Asymptotenparallelen durch den reziproken beweglichen Punkt. Der reziproke Satz ist gleichbedeutend mit dem Satze von der Konstanz des Rechtecks der Asymptotenparallelen.

2) Diejenigen Sehnen einer Hyperbel, die von zwei festen Punkten derselben nach einem ver-	Wenn eine beliebige Tangente einer Parabel zwei feste Tangenten derselben schneidet, so be-

änderlichen dritten Punkte der Kurve gezogen werden, bestimmen auf jeder Asymptote je einen Abschnitt von unveränderlicher Länge (Nr. 174, 2).

stimmen die von ihren Endpunkten auf die Scheiteltangente gefällten Lote in dieser einen Abschnitt von konstanter Länge.

406. **Inversion.** Das eindeutige Entsprechen von Punkten mit Punkten oder von Geraden mit Geraden, das *zusammen* für die *Kollineation*, und das von Punkten mit Geraden oder von Geraden mit Punkten, das *zusammen* für die *Reziprozität* charakteristisch ist, kann *getrennt* nach verschiedenen Gesetzen in sehr verschiedenen Arten hergestellt werden. Alle diese Arten geben Anlaß zur Transformation von Figuren in andere Figuren und zur Übertragung der auf jene bezüglichen Sätze auf diese, somit zur Erkenntnis neuer geometrischer Wahrheiten.

Im Anschluß an die zirkulare Polarreziprozität ist es leicht genug, ein Entsprechen von Punkten ganz analog zu begründen, wie hier das Entsprechen von Pol und Polare. Der Fußpunkt der Polare in dem Durchmesser des Pols kann als dem Pol entsprechend angesehen werden; dann gilt das Gesetz: Entsprechende Punkte liegen auf einerlei Durchmesser des Leitkreises, und das Produkt ihrer Abstände vom Mittelpunkt ist konstant. Damit kommen wir zurück auf die in Nr. 125—127 betrachtete Verwandtschaft der *zirkularen Inversion* oder *der reziproken Radienvektoren.*[126])

Inverse Punkte sind auch doppelt reziproke Elemente in jeder Reziprozität, die den Inversionskreis und irgend einen konzentrischen Kreis zur Ordnungskurve hat.[127]) (Nr. 389 und B.) Das involutorische Tripel besteht aus dem Inversionszentrum und den imaginären Kreispunkten, d. h. diesen sind alle Punkte der reziproken Dreiecksseiten doppelt reziprok oder invers (Nr. 125).

Infolge der quadratischen Substitution wird *die Inverse einer Kurve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen von der Ordnung $2n$.* Man übersieht sofort, daß diese Ordnung sich stets dann erniedrigt, wenn die gegebene Kurve durch Ecken des Tripels geht. Denn, so oft dies geschieht, sondert sich von der Kurve

$2n^{\text{ter}}$ Ordnung eine Seite des Tripels ab; nur der von dem Tripel unabhängige Teil dieser zerfallenden Kurve entspricht der Kurve n^{ter} Ordnung eindeutig. Zu einem Kegelschnitt ist die Inverse im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung; zu einem Kreise, da er durch die imaginären Kreispunkte geht, wieder ein Kreis; zu einem Kreise durch das Inversionszentrum nur noch eine Gerade.

Bilden wir in bezug auf denselben festen Kreis O zu einer gegebenen Kurve gleichzeitig die Polarreziproke und die Inverse, so ist auf jeder Tangente der ersten ein Punkt der letzten der Fußpunkt des vom Mittelpunkt O auf sie gefällten Lotes: *Die Inverse ist die Fußpunktkurve der Polarreziproken für den Mittelpunkt des gemeinsamen Leitkreises.* So ist die Fußpunktkurve eines Kegelschnittes für einen der Brennpunkte der Scheitelberührungskreis (Nr. 189 und 161).

Neben der Eigenschaft der Inversion, Winkelgrößen nicht zu ändern (Nr. 127), tritt als die wichtigste diejenige auf, *Doppelverhältnisse am Kreise nicht zu ändern.* Nennt man das Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kreises geradezu das Doppelverhältnis des Kreisvierecks, so kann man den Satz so aussprechen: *Inverse Kreisvierecke sind doppelverhältnisgleich.* Damit können projektive Beziehungen von Punktreihen und von Strahlenbüscheln auf zirkulare Reihen und Kreisbüschel übertragen werden.

Den Beweis liefert der Satz von Nr. 297, daß Strahlen eines Büschels einen Kegelschnitt in Punktepaaren einer Involution schneiden, dessen besondere Anwendung auf den Kreis schon Nr. 119 enthält. Nun haben offenbar vier Punkte eines Kreises und die auf den Inversionsstrahlen ähnlich gelegenen Punkte des inversen Kreises gleiche Doppelverhältnisse, denn diese werden durch ähnlich gelegene Strahlenbüschel gemessen. Mit diesen sind aber die vier inversen Punkte involutorisch, nämlich perspektiv zu einer und derselben Reihe in der Polare von O in bezug auf den inversen Kreis (Nr. 125). Endlich haben vier Punkte einer Geraden und die entsprechenden auf dem durch O gehenden inversen Kreise als gemeinsames Doppelverhältnis dasjenige ihrer Inversionsstrahlen.

B. 1) Aus den Substitutionen $x : y : 1 = x' : y' : (x'^2 + y'^2)$ folgt die einfache Beziehung komplexer Koordinatenverbindungen

$$x' \pm iy' = \frac{1}{x \mp iy}.$$

Schreibt man $x_1 : x_3 \,|\, x_2 : x_3$ für $x - iy \,|\, x + iy$ und $x_1' : x_3' \,|\, x_2' : x_3'$ für $x' + iy' \,|\, x' - iy'$, d. h. führt man das involutorische Tripel als Fundamentaldreieck ein, so erhält man *die symmetrischen homogenen Substitutionen der Inversion:*

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2.$$

2) Aus dem Satze, daß eine sich um einen festen Punkt drehende Gerade in zwei festen Geraden projektive Reihen bestimmt, folgt invers: Die Kreise eines Büschels bestimmen in jedem von zwei festen Kreisen, die durch je einen der Grundpunkte des Büschels gehen, projektive Punktreihen. Ebenso folgt: Die Kreise eines Büschels bestimmen in einem festen Kreise zwei involutorische Punktreihen; usw.

3) Die drei Kreise, die durch einen Punkt und die Schnittpunkte von je zweien unter drei beliebigen Kreisen gelegt werden können, haben einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt. Denn die Potenzlinien von drei Kreisen gehen durch einen Punkt.

4) In jedem System von drei Kreisen bestimmen die sechs Paare Berührungskreise von je zweien unter ihnen, die durch einen und denselben Punkt gehen, sechs Schnittpunkte mit einander, die viermal zu dreien in Kreisen durch jenen Punkt liegen. Denn die sechs Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von drei Kreisen liegen viermal zu dreien in Geraden.

5) Wenn sich zwei veränderliche Kreise unter konstantem Winkel auf einer festen Kreisperipherie und überdies in einem festen Punkte schneiden, so umhüllt der Kreis, der in jeder ihrer Lagen durch den festen Punkt mit ihren veränderlichen Schnittpunkten im festen Kreise bestimmt wird, einen zweiten festen Kreis, der mit dem ersten und jenem Punkte dieselbe Potenzlinie hat. Denn wenn sich zwei Geraden in einem festen Punkte eines gegebenen Kreises unter konstantem Winkel schneiden, so umhüllt die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit dem Kreise einen zweiten festen, dem ersten konzentrischen Kreis.

6) Man transformiere durch Inversion die Figur, durch die man aus drei Paaren entsprechender Punkte zweier projektiver konzyklischer Reihen die Doppelpunkte derselben bestimmt (Nr. 297), für ein auf der Kreisperipherie gelegenes Zentrum. Man erhält eine von *Chasles* benutzte Konstruktion.

7) Aus dem Satz vom Schneiden der Höhen eines Dreiecks folgt nach der Theorie der reziproken Polaren: Die drei Lote, die

man in einem Punkte O auf seinen Verbindungslinien mit den Ecken eines Dreiecks ABC errichten kann, treffen die Gegenseiten des Dreiecks in Punkten einer Geraden. Durch Inversion mit dem Zentrum O folgt: Wenn man auf den gemeinschaftlichen Sehnen OA, OB, OC von drei in O sich schneidenden Kreisen in O Lote errichtet, so liegen ihre zweiten Schnittpunkte mit den entsprechenden Kreisen auf einem durch O gehenden Kreise. Die abermalige Bildung der Reziprokalfigur mit dem Ursprung O gibt: Wenn drei Parabeln von einerlei Brennpunkt von je zwei Seiten desselben Dreiecks berührt werden, so berühren die zu diesen Seiten rechtwinkligen Tangenten der entsprechenden Parabeln eine und dieselbe Parabel vom nämlichen Brennpunkt.

407. **Methode der reziproken Koordinaten.** Um ein im allgemeinen eindeutiges Entsprechen von Elementen zu definieren, kann, wie bisher ein Kegelschnitt, auch ein Dreieck oder Viereck als feste Hilfsfigur dienen. Es genügt auf einige solche Methoden hinzuweisen.

Verbindet man einen Punkt x_i mit den Ecken eines Dreiecks und nimmt man zu jedem Eckstrahl den symmetrischen in bezug auf die Halbierungslinie des zugehörigen Dreieckswinkels, so schneiden sich diese drei Eckstrahlen wieder in einem Punkte y_i (Nr. 65, 8). Die trimetrischen Normalkoordinaten des einen Punktes sind die reziproken Werte von denen des andern. Man kann offenbar diese Punkte als einander eindeutig und vertauschbar entsprechend in bezug auf das Dreieck oder nach der *Methode der reziproken Koordinaten* ansehen. (Nr. 317, 2.)[55]

Die Zuordnung ist wiederum quadratisch, und zwar so, daß bei Benutzung trimetrischer Normalkoordinaten einer Geraden $\Sigma a_i x_i = 0$ ein dem Dreieck umgeschriebener Kegelschnitt $\Sigma(a_i : x_i) = 0$ entspricht (Nr. 302) und umgekehrt. Damit erkennt man die Inversion als Sonderfall dieses Entsprechens (Nr. 406, 1). Der unendlich fernen Geraden entspricht der umgeschriebene *Kreis* des Dreiecks (Nr. 302, 3), jedem Eckpunkt aber entsprechen alle Punkte der Gegenseite. Die einzigen sich selbst entsprechenden Punkte sind die Mittelpunkte der vier dem Dreieck eingeschriebenen Kreise. (Teil 1, Nr. 73, S. 138.)

Ebenso könnte man ein Entsprechen von Geraden nach reziproken Linienkoordinaten aufstellen.

Endlich kann jedem Punkte eine Gerade zugeordnet werden, deren Linienkoordinaten die Reziproken der Punktkoordinaten sind. Geometrisch bedeutet dies nach Nr. 67, 1 *das Entsprechen zwischen einem Punkte* y_i *und seiner Harmonikale* $\Sigma(x_i : y_i) = 0$ *in bezug auf das Fundamentaldreieck.* Die unendlich ferne Gerade ist die Harmonikale des Schwerpunktes. Den Punkten einer geraden Reihe $\Sigma a_i x_i = 0$ entsprechen als Harmonikalen die Tangenten eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes $\Sigma(a_i : u_i) = 0$. Den Ecken des Dreiecks entsprechen alle durch sie gehenden Strahlen.

B. 1) Nach der Methode reziproker Koordinaten liegen entsprechende Punkte entweder zugleich im Innern des Dreiecks, also auch des umgeschriebenen Kreises, oder beide außerhalb dieses Kreises und in derselben Winkelfläche des Dreiecks, oder der eine in dem zwischen einer Dreiecksseite und dem umgeschriebenen Kreise gelegenen Abschnitt und der andere im Scheitelwinkelraum der Gegenecke. Dem Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises entspricht der Höhenschnittpunkt usw. Je zwei einander entsprechende Punkte können als die Brennpunkte eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes angesehen werden.

2) Einer beliebigen Geraden entspricht der Neunpunkte-Kegelschnitt derselben in bezug auf das durch die Punkte von den Koordinaten $\pm 1 \mid \pm 1 \mid 1$ gebildete Viereck. (Vgl. Nr. 365, B.)

3) Den Tangenten eines mit dem umgeschriebenen Kreise konzentrischen Kreises entsprechen umgeschriebene, unter einander ähnliche Kegelschnitte; jenem Kreise selbst die Hüllkurve dieser Kegelschnitte, eine Kurve vierter Ordnung.[128]) Man erörtere den Sonderfall der gleichseitigen Hyperbeln. (Nr. 165, 2.)

4) Die Harmonikalen der unendlich fernen Punkte umhüllen diejenige Ellipse, die die Seiten des Dreiecks in ihren Mittelpunkten berührt.

408. **Quadratische Verwandtschaft.** Suchen wir ein Entsprechen von Elementen unter Benutzung von vier festen Elementen zu vermitteln, so können wir diese durch die mit ihnen bestimmten linearen Kegelschnittsysteme ersetzt denken. Eine Zuordnung von Punkten, bei der geraden Reihen wiederum Kegelschnitte entsprechen, gibt die Beziehung der doppelt konjugierten Pole eines Kegelschnittbüschels (Nr. 250 und 322).

nach $x_1 : x_2 : x_3$. Demnach gehen alle Kegelschnitte, die den geraden Reihen $y_i = 0$ entsprechen, durch diese drei Punkte x_i, und jedem von diesen entsprechen umgekehrt alle Punkte y_i der Geraden $\Sigma X_i y_i = 0$. Jedem andern Punkte y_i entspricht also, da er als Schnittpunkt zweier Geraden angegeben werden kann, der vierte Schnittpunkt der jenen zugeordneten Kegelschnitte, einem Strahlenbüschel ein Kegelschnittbüschel. Die drei festen Punkte des Kegelschnittnetzes nennen wir *die Hauptpunkte des Systems der* x_i.

Umgekehrt gilt für die Bestimmung des einem Punkte x_i entsprechenden Punktes y_i das Analoge, vermittelt durch *dieselben*, nur nach den x_i geordneten, Gleichungen $\Sigma Y_i x_i = 0$, $\Sigma Y_i' x_i = 0$, in denen Y_i, Y_i' die y_i linear enthalten. Den geraden Reihen $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ entsprechen die Kegelschnitte des Netzes

$$(33)\quad \lambda_1(Y_2 Y_3' - Y_3 Y_2') + \lambda_2(Y_3 Y_1' - Y_1 Y_3') + \lambda_3(Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1') = 0$$

durch die *drei Hauptpunkte des Systems der* y_i. Den durch einen Hauptpunkt der x_i gehenden Geraden entsprechen nun zerfallende Kegelschnitte, denen eine Verbindungslinie zweier Hauptpunkte der y_i angehört. *In den beiden Hauptdreiecken entsprechen einander daher eine Ecke des einen und eine Seite des andern.* Endlich gibt es noch *vier sich selbst entsprechende Punkte* in der Verwandtschaft, nämlich die Schnittpunkte der Polkegelschnitte $\Sigma X_i x_i = 0$, $\Sigma X_i' x_i = 0$ beider Reziprozitäten.

Beschäftigen wir uns nur mit dem allgemeinen Fall, wo die Hauptdreiecke nicht ausarten, so können wir auf eines derselben die Koordinaten beziehen. Sollen z. B. allen Geraden x_i Kegelschnitte $\lambda_1 y_2 y_3 + \lambda_2 y_3 y_1 + \lambda_3 y_1 y_2 = 0$ entsprechen, so muß es drei Konstanten k_i geben, so daß $X_i' = k_i X_i$ wird; nur dann entsprechen den Fundamentalpunkten drei Geraden $X_i = 0$, die das Hauptdreieck der x_i bilden. Nun werden die Substitutionen der *einen* Gruppe

$$x_1 : x_2 : x_3 = (k_2 - k_3) X_2 X_3 : (k_3 - k_1) X_3 X_1 : (k_1 - k_2) X_1 X_2.$$

Die allgemeine quadratische Verwandtschaft enthält die Kollineation) als Sonderfall.* Ihre Grundgleichungen drücken

*) Auch die Reziprozität ist in der allgemeinen Verwandtschaft

die Koordinatenverhältnisse $y_1 : y_3 \,|\, y_2 : y_3$ in Form von *gleichbenannt* gebrochenen Funktionen der x_i aus, und man erhält dies, sobald man identisch $X_1 \equiv 0$, $X_2' \equiv 0$, $X_2 \equiv X_1'$ setzt. Auf die allgemeine quadratische Verwandtschaft kommt man umgekehrt, wenn man die Nenner der jenen Verhältnissen gleichwertigen Ausdrücke als *ungleich* voraussetzt $y_1 : y_3 = L_1 : L_3$, $y_2 : y_3 = L_2 : L_4$. Einer Geraden $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$ entspricht jetzt ein Kegelschnitt $aL_1L_4 + bL_2L_3 + cL_3L_4 = 0$, der durch die drei Punkte $L_1 = L_3 = 0$, $L_2 = L_4 = 0$, $L_3 = L_4 = 0$ hindurchgeht; diese sind jetzt die Hauptpunkte der x_i, aber $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ sind nicht Seiten ihres Dreiecks.

409. **Verwandtschaft doppelt konjugierter Elemente.** Von Wichtigkeit ist vorzüglich der Fall der *involutorischen* Verwandtschaft zweiten Grades, für die das Gleichungspaar in den x_i und y_i symmetrisch sein muß. Alsdann kann nur entweder $X_i = Y_i$, $X_i' = Y_i'$ oder $X_i = Y_i'$, $Y_i = X_i'$ sein, sofern man x_i und y_i als gleichartige Veränderliche rechnet. Diese Bedingungen definieren aber die durch zwei *Polar*systeme oder *eine* Reziprozität vermittelte Verwandtschaft. In beiden decken sich die Hauptdreiecke, nur in verschiedener Zuordnung der Ecken und Seiten (Nr. 389).

Nehmen wir die Fundamentalpunkte als die Hauptpunkte, so müssen $X_i = 0$ deren Verbindungslinien darstellen (Nr. 408). Also sind für die Substitutionen nur die Anordnungen möglich

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_2y_3 : y_3y_1 : y_1y_2 \quad \text{und} \quad x_1 : x_2 : x_3 = y_2y_1 : y_1y_3 : y_3y_2,$$

die nach dem Früheren die genannten Hauptfälle charakterisieren. *Somit ist die Methode der reziproken Koordinaten der Ausdruck der allgemeinen Verwandtschaft doppelt konjugierter Elemente.*

Nach früheren Ergebnissen kann sie leicht geometrisch konstruiert werden, sobald man ihre sich selbst entsprechenden Elemente, die gemeinsamen Elemente der die Polarsysteme definierenden Kegelschnitte, kennt. Das Hauptdreieck ist das Diagonaldreieck jenes Quadrupels, von dem ein Element als

---

mit enthalten, nämlich dann, wenn eine der definierenden Gleichungen identisch wird ($X_i \equiv 0$).

Einheitselement gewählt werden kann. Alsdann definiert die allgemeine Methode der reziproken Koordinaten *die Verwandtschaft der in bezug auf das Quadrupel* $1 \mid \pm 1 \mid \pm 1$ *doppelt konjugierten Elemente* folgendermaßen: Die Gleichungen $x_i y_i = x_k y_k$ definieren involutorische Strahlenbüschel mit den Doppelstrahlen $x_i^2 = x_k^2$, d. h. die Verbindungsstrahlen von entsprechenden Punkten mit einem Diagonalpunkt sind konjugiert harmonisch zu den durch ihn gehenden Seiten des sich selbst entsprechenden Vierecks. (Vgl. die B. 1, 2, 3 über die Konstruktion der gemeinsamen Elemente von zwei Polarsystemen.)

Wir können aber z. B. *die Verwandtschaft in bezug auf ein Vierseit* auch direkt auf einen Sonderfall des Satzes von Nr. 314, 5) gründen:[130]) Die harmonisch konjugierten der Schnittpunkte einer Geraden L mit den Diagonalen in bezug auf die zugehörigen Ecken liegen in einer Geraden L'. Dreht sich L um einen Punkt P, so schneidet L' in den Diagonalen projektive Punktreihen aus, d. h. L' umhüllt einen dem Diagonaldreiseit eingeschriebenen Kegelschnitt **P**, und umgekehrt. Dieser P entsprechende Kegelschnitt **P** artet nur aus, wenn P einer Diagonale angehört, nämlich in das Punktepaar, das aus dem zu P in der Diagonale harmonisch konjugierten und dem gegenüberliegenden Diagonalpunkt besteht.

Damit tritt deutlich hervor, daß vier Strahlen von P und die entsprechenden Tangenten von **P** dasselbe Doppelverhältnis haben. *Doppelverhältnisse in entsprechenden Gebilden ersten und zweiten Grades einer quadratischen Transformation haben gleichen Wert* (vgl. Nr. 406).

Die vorige Zuordnung ist aber identisch mit der Verwandtschaft der doppelt konjugierten Polaren in bezug auf die Schar der dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte, denn ihr analytischer Ausdruck ist $u_i v_i = u_k v_k$, und die Gleichungen der Punktepaare der Schar sind in $u_1^2 = u_2^2 = u_3^2$ enthalten. Durch jeden Punkt P gehen also zwei doppelt konjugierte Polaren, die die Tangenten aus P an den entsprechenden Kegelschnitt **P** sind und in P von den durch diesen Punkt gehenden beiden Kurven der Schar berührt werden.

B. 1) Man konstruiere die *gemeinsamen Elemente von zwei Polarsystemen*, die durch je ein Polardreieck und ein Paar bestimmt sind.[131])

Insofern wir die Polarsysteme als zwei Kegelschnitte auffassen, erscheinen ihre vier gemeinsamen Punkte und ihre vier gemeisamen Tangenten als die Objekte der Aufgabe — sie ist biquadratisch. Da aber die gemeinsamen Punkte durch sechs gemeinsame Sehnen verbunden werden und die gemeinsamen Tangenten sich in Paaren in sechs Punkten schneiden, erhalten wir jene vier Punkte als Schnitte der gemeinsamen Sehnen zu je drei, und dual die vier gemeinsamen Tangenten als Verbindungsgeraden jener sechs Schnittpunkte zu je drei. Auch ist die Definition der die vier Punkte verbindenden Sehnen und die der Schnittpunkte der vier gemeinsamen Tangenten nach der Natur der Polarsysteme klar: Die sechs Verbindungsgeraden s der gemeinsamen Punkte sind die Geraden, denen in beiden Polarsystemen dieselbe Involution harmonischer Pole zukommt, und die sechs Schnittpunkte T der gemeinsamen Tangenten sind die Punkte mit einerlei Involution harmonischer Polaren. Wir wissen auch schon, daß die Sehnen zwischen den gemeinsamen Punkten in Paaren durch die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks beider Kegelschnitte gehen, und daß die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten in Paaren auf den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks liegen. Ist also dieses gemeinsame Polardreieck gefunden, so wird alles Übrige durch Involutionen, also durch quadratische Gleichungen erhalten — das Polardreieck ist so zu sagen der Vertreter der kubischen Resolvente der biquadratischen Gleichung der Aufgabe.

2) Die Bestimmung des gemeinsamen Polardreiecks geschieht ebenso leicht durch Ermittelung seiner Ecken wie dual durch die seiner Seiten mit Hilfe der doppelt konjugierten Elemente der beiden Polarsysteme. Weil der doppelt konjugierte Punkt zu einem gegebenen der Schnittpunkt seiner beiden Polaren ist, so entsprechen einer geraden Punktreihe in der Ebene der Polarsysteme zwei zu einander (weil zu ihr) projektive Strahlenbüschel ihrer Polaren und damit als Punkten der Reihe doppelt konjugiert die Punkte eines Kegelschnittes. Diese Kegelschnitte gehen alle durch die drei Punkte mit einerlei Polaren und ihre Verbindungsgeraden sind diese Polaren selbst. Zwei gerade Reihen g, l, in denen wir außer dem gemeinsamen Punkt je zwei Punkte willkürlich wählen, liefern je fünf Punkte für solche Kegelschnitte G, L, die sich im doppelt konjugierten des Punktes gl und in den drei Ecken des gemeinsamen Polardreiecks schneiden. (Und dual.)

3) An dies Dreieck schließt sich nun die Konstruktion der gemeinsamen Punkte und Tangenten der Leitkegelschnitte wie folgt:

Die beiden Verbindungsgeraden gemeinsamer Punkte, die durch eine seiner Ecken gehen, sind die Doppelstrahlen der Involution, die durch die Verbindung dieser Ecke mit zwei Paaren doppelt konjugierter Punkte bestimmt wird. Und die beiden Schnittpunkte gemeinsamer Tangenten, die in einer seiner Seiten liegen, sind die Doppelpunkte der Involution, die in ihr durch die Schnittpunkte mit zwei Paaren doppelt konjugierter Geraden bestimmt wird. (In B. 2 sind g und die Verbindungsgerade g^* ihrer Pole, und wieder l, l^* zwei solche Paare.) Nach dem Früheren sind die Realitätsverhältnisse ersichtlich.

4) An das Polardreieck der vorigen Beispiele kann man die Definition der *Büschel und Scharen von Polarsystemen* knüpfen. Die Angabe eines Polardreiecks und zweier konjugierter Punkte bestimmt unendlich viele Kegelschnitte, weil jede durch den einen dieser Punkte gehende Gerade als Polare des andern einen solchen liefert; weil die Involutionen mit den s als Doppelstrahlen für alle dieselben sind, so bilden diese Polarsysteme wie ihre Leitkurven ein Büschel; zu einem Punkte ein Polarenbüschel. Der Angabe eines Polardreiecks und zweier konjugierten Geraden entspringt die Schar von Polarsystemen mit der dualen Grundeigenschaft.

5) Nimmt man als Definitionsgleichungen $x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$, $\lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \lambda_3 x_3 y_3 = 0$, wo das erste Polarsystem in die Verbindungsstrahlen der Pole mit einem Hauptpunkt ausartet, so entsprechen den Geraden u_i die Kegelschnitte

$$u_3(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) - \lambda_3 x_3 (u_1 x_1 + u_2 x_2) = 0.$$

Bei Deutung in rechtwinkligen Koordinaten $(x_3 = y_3 = 1)$ besteht das Netz aus den durch den Nullpunkt gehenden homothetischen Kegelschnitten. Je zwei Kegelschnitte schneiden sich im Nullpunkt unter demselben Winkel, wie die entsprechenden Geraden. Mit $\lambda_1 = 0$ oder mit $\lambda_1 = \lambda_2$ erhält man ein Netz von Parabeln oder von Kreisen. Der letzte Fall ist derjenige der Inversion (Nr. 406).

6) Eine Anwendung der allgemeinen involutorischen Transformation bietet die Figur zweier projektiven Strahlenbüschel in perspektiver Lage. So entspringt der Satz: Wenn zwei projektive Büschel von Kegelschnitten $f(x, x) + \lambda g(x, x) = 0$, $\mathfrak{f}(x, x) + \lambda \mathfrak{g}(x, x) = 0$ (Nr. 322) durch dieselben drei Punkte A, B, C gehen, so daß der vierte Grundpunkt des einen D, der des andern E ist, und sie so liegen, daß der durch die fünf Punkte A, B, C, D, E bestimmte Kegelschnitt sich selbst entspricht, so liegen die vierten Schnittpunkte der entsprechenden Kegelschnitte beider Büschel sämtlich auf einem dem Dreieck A, B, C umgeschriebenen Kegelschnitt.

Besonders bequem erlaubt diese Methode von Kegelschnitten zu Kurven höherer Ordnung überzugehen; so gibt die Erzeugung

der Kegelschnitte durch projektive Büschel eine Erzeugung von Kurven vierter Ordnung; usw.

7) Wenn die Punkte c, c' (Fig. 36, S. 112) mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammenfallen, so bilden die dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte eine Schar konfokaler Kurven, für die die assoziierten Punkte (Nr. 115 und 181) a, a' und b, b' die reellen und imaginären Brennpunkte bezeichnen, während C der gemeinsame Mittelpunkt ist. Nach Nr. 374 sind nun die entsprechenden Geraden L, L' zu einander rechtwinklig, und da sie die Abschnitte aa', bb' zwischen den Brennpunkten harmonisch teilen, so sind sie Tangente und Normale zweier konfokaler Kegelschnitte in ihrem Schnittpunkt. Zugleich entspricht jedem Punkte p eine Parabel P, die die Geraden aa', bb' berührt und die Gerade pC zur Leitlinie hat.

Den Normalen, die von p an einen Kegelschnitt S der konfokalen Schar gezogen werden können, entsprechen die Tangenten, die der Kegelschnitt S mit dieser Parabel gemeinsam hat. Wenn diese gemeinschaftlichen Tangenten konstruiert sind, so bestimmen ihre Berührungspunkte in S mit C die fraglichen Normalen. Das Doppelverhältnis der vier Tangenten ist dem der vier Normalen gleich.

Die Fußpunkte der Normalen sind die Schnittpunkte von S mit einem Kegelschnitt H, der die Polarkurve von P in bezug auf C ist und daher, weil P dem zu S harmonischen Dreieck ABC eingeschrieben ist, demselben Dreieck ABC umgeschrieben sein muß. Also ist er eine gleichseitige Hyperbel durch den Mittelpunkt von S, deren Asymptoten den Achsen von S parallel sind. (Vgl. Nr. 178.) Umgekehrt bestimmt jede dem Dreieck ABC umgeschriebene gleichseitige Hyperbel in S vier Punkte, deren Normalen sich in einem Punkte p schneiden, wo p der Parabel P entspricht, die die Polarkurve jener Hyperbel in bezug auf S ist.

Wenn nun den Tangenten von S die zugehörigen Normalen entsprechen, so entspricht der Kurve S ihre Evolute (Nr. 245), eine Kurve von der vierten Klasse, die durch diese Zuordnung mit Hilfe der bekannten Kurve S untersucht werden kann

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Von der Methode der Projektion.

410. **Zentralprojektion.** Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, wie die allgemeine Idee der Verwandtschaft zweier geometrischer Figuren in mannigfachen Formen erscheint. Die einfachste und anschaulichste Begründung einer solchen Beziehung bietet *die Methode der Projektion* dar.[132])

Wenn alle Punkte einer in der Ebene E gelegenen Figur mit irgend einem reellen, festen Punkte im Raume O durch Strahlen verbunden werden, so bilden diese einen *Kegel* von der *Spitze* O; die Schnittlinie dieses Kegels mit einer beliebigen Ebene E' bildet eine Figur, die man die *Zentralprojektion* der gegebenen Figur aus dem *Projektionszentrum* O auf die Bildebene oder *Projektionsebene* E' nennt. Man bezeichnet den Kegel dann auch als den *projizierenden Kegel.*

Jedem Punkte in der einen Figur entspricht ein Punkt in der andern, nämlich der Schnittpunkt ihrer Ebene mit dem projizierenden Strahle des ersten. *Eine Gerade wird immer als Gerade projiziert.* Denn die projizierenden Strahlen aller Punkte der Geraden bilden eine O enthaltende Ebene, die *projizierende Ebene* der Geraden, die durch ihren Schnitt mit E' die Projektion der gegebenen Geraden bestimmt.

Wenn Punkte in der einen Figur in einer Geraden liegen, so liegen auch die entsprechenden Punkte der andern Figur in einer geraden Linie; wenn Geraden in der einen Figur durch denselben Punkt hindurchgehen, so schneiden sich auch die entsprechenden Geraden der andern in einem Punkte, nämlich dem entsprechenden Punkte jenes ersten.

Die den Punkten einer Geraden entsprechenden Punkte und ebenso die Büschel einander entsprechender Geraden sind projektiv oder von gleichen Doppelverhältnissen nach Nr. 84ff. und kurz: Die geometrische Verwandtschaft, die die Zentralprojektion zwischen zwei Ebenen begründet, ist die aus Nr. 92 bekannte *Kollineation*. Ihr algebraischer Ausdruck ist somit die lineare Substitution der Punktkoordinaten von Nr. 91 mit der transponierten der Linienkoordinaten bei nichtverschwindendem Modul Δ. In Nr. 387f. ist ebenso die Verwandtschaft der *Reziprozität* zwischen vereinigten ebenen Systemen von den linearen Substitutionen mit nichtverschwindendem Modul aus behandelt worden, in der jedem Punkt eine Gerade und umgekehrt, jeder geraden Reihe ein zu ihr projektives Büschel und umgekehrt entspricht; die durch einen reellen Kegelschnitt definierte Polarreziprozität bildet einen gründlich bekannten Sonderfall; dabei ist aber mit dem Fall der verschwindenden Diskriminante in Nr. 310 die Unbestimmtheit der polaren Zuordnung als wichtig hervorgetreten, also die Frage nach der geometrischen Bedeutung der linearen Substitutionen mit verschwindendem Modul. Es ist ein Vorzug der Methode der Projektion, daß sie dieselbe in allen hierher gehörigen Fällen klar stellt und damit auch sicher zur algebraischen Behandlung führt.

411. **Die singulären Projektivitäten.** Solche sind in der Methode der Projektion, also für die Kollineation, fundamental, weil sie mit den *projizierenden Strahlen und Ebenen* entspringen, die die Projektion vermitteln.[133])

Wenn a) *die Ebene* E *das Projektionszentrum* O *enthält*, so liegen die Bilder aller ihrer Punkte außer O in ihrer Schnittlinie s mit der Bildebene E', in der Art, daß jeder Punkt von dieser alle Punkte der Geraden abbildet, die ihn mit O verbindet; und zugleich liegen in s die Bilder aller Geraden in E, die nicht durch O gehen. Dagegen liegen die Originale aller Punkte von E' außer s in O, und die Originale aller Geraden in E' außer s sind gerade Linien durch O in E, so zwar, daß alle durch denselben Punkt von s gehenden denselben Originalstrahl haben.

Wir haben also in der einen Ebene einen *singulären Punkt O* oder sagen wir hier S, dem *alle* Punkte der andern Ebene entsprechen, und in der andern Ebene eine *singuläre Gerade* s', die *alle* Geraden der andern Ebene abbildet; den geraden Reihen durch S entsprechen die Punkte auf s' projektiv, den Strahlenbüscheln aus Punkten von s' die nach diesen gehenden Geraden aus S.

Wir gehen zum algebraischen Ausdruck dieser Besonderheiten. Damit dem Punkte S von den Koordinaten s_i jeder Punkt des gestrichenen Systems und der Geraden von den Koordinaten σ_i' jede Gerade des ungestrichenen entspricht, d. h. damit die Verhältnisse der Koordinaten der dem Punkt s_i und der Geraden σ_i entsprechenden Gebilde die Form $0:0$ erhalten, müssen die Substitutionen

$$\mu x_i' = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3, \quad \nu u_i = \alpha_{1i} u_1' + \alpha_{2i} u_2' + \alpha_{3i} u_3'$$

die Besonderheit haben, daß

$$\alpha_{i1} s_1 + \alpha_{i2} s_2 + \alpha_{i3} s_3 = 0, \quad \alpha_{1i} \sigma_1' + \alpha_{2i} \sigma_2' + \alpha_{3i} \sigma_3' = 0$$

ist; also nach der ersten Bedingung

$$\alpha_{i1} = -\frac{\alpha_{i2} s_2 + \alpha_{i3} s_3}{s_1}$$

und nach der zweiten

$$\alpha_{12} = -\frac{\alpha_{22} \sigma_2' + \alpha_{32} \sigma_3'}{\sigma_1'}, \quad \alpha_{13} = -\frac{\alpha_{23} \sigma_2' + \alpha_{33} \sigma_3'}{\sigma_1'}.$$

Damit erhalten wir die Substitution wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mu x_1' &= \frac{x_1}{s_1 \sigma_1'} \{ s_2(\alpha_{22}\sigma_2' + \alpha_{32}\sigma_3') + s_3(\alpha_{23}\sigma_2' + \alpha_{33}\sigma_3') \} \\
&\quad - \frac{x_2}{\sigma_1'}(\alpha_{22}\sigma_2' + \alpha_{32}\sigma_3') - \frac{x_3}{\sigma_1'}(\alpha_{23}\sigma_2' + \alpha_{33}\sigma_3'), \\
\mu x_2' &= -\frac{x_1}{s_1}(\alpha_{22} s_2 + \alpha_{23} s_3) + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3, \\
\mu x_3' &= -\frac{x_1}{s_1}(\alpha_{32} s_2 + \alpha_{33} s_3) + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3.
\end{aligned}$$

Sie ist bestimmt, aber ihre Moduldeterminante ist Null, weil die Elemente der ersten Zeile die Summen der mit Konstanten multiplizierten entsprechenden Elemente der zweiten und dritten Zeile sind. Die Substitution wird vereinfacht, wenn wir bei beliebig gedachter Vereinigung der Ebenen E

und E' den singulären Punkt als Fundamentalpunkt A_1 mit Koordinaten s_1, 0, 0 und die singuläre Gerade als gegenüberliegende Fundamentallinie x_1' mit Koordinaten σ_1', 0, 0 wählen; sie ist dann

$$\mu x_1' = 0, \quad \mu x_2' = \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3, \quad \mu x_3' = \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3$$

und invers

$$\nu u_1 = 0, \quad \nu u_2 = \alpha_{22} u_2' + \alpha_{32} u_3', \quad \nu u_3 = \alpha_{23} u_2' + \alpha_{33} u_3'.$$

Eine der ersten Unterdeterminanten ihres Moduls ist von Null verschieden, man hat zwei statt drei Gleichungen zur Bestimmung. Einer bestimmten Geraden durch den singulären Punkt $x_2 - \lambda x_3 = 0$ entspricht nun z. B. außer der singulären Geraden die andere Gerade durch ihn aus

$$(\alpha_{33} + \lambda \alpha_{32}) x_2 - (\alpha_{23} + \lambda \alpha_{22}) x_3 = 0,$$

die nur für

$$x_2 : x_3 = \lambda = (\alpha_{22} \lambda + \alpha_{23}) : (\alpha_{32} \lambda + \alpha_{33})$$

mit jener zusammenfällt, usw.

Aber noch ein anderer Fall ist möglich, nämlich b) *daß das Projektionszentrum ein Punkt in der Schnittlinie* EE' *ist.* Wir können kurz sagen, *daß dann jede der beiden Ebenen einen singulären Punkt O oder S in einer singulären Geraden s enthält,* also daß jene Punkte allen Punkten der jeweiligen andern Ebene und diese Geraden allen Geraden derselben entsprechen; überdies jeder Geraden durch den singulären Punkt des einen alle Geraden durch den singulären Punkt des andern Systems. Denken wir wieder beide Ebenen beliebig vereinigt, so können wir die singulären Punkte zu Ecken und die durch sie gehenden singulären Geraden zu Seiten des Fundamentaldreiecks wählen und erhalten nach dem Vorigen die Substitution mit $\mu x_1' = 0$, $\mu x_2' = 0$, $\mu x_3' = \alpha_{33} x_3$; statt drei Gleichungen hat man nur eine, und neben Δ verschwinden auch alle ersten Unterdeterminanten.

Gemäß der Definition, nach der wir die Projektivitäten in Kollineationen und Reziprozitäten scheiden, ergeben sich aber hieraus auch die möglichen *Fälle der singulären Reziprozitäten.* Ersetzen wir das eine der kollinearen Systeme a) durch ein reziprokes, so ist dieses zum andern reziprok

und es entstehen so zwei Fälle singulärer Reziprozität, nämlich durch Überführung des Systems mit singulärem Punkt in ein reziprokes mit singulärer Geraden aα) *Reziprozität mit zwei singulären Geraden*, denen je alle Punkte der andern Ebene entsprechen, während jedem Punkte einer singulären Linie jede Gerade durch einen bestimmten Punkt der andern entspricht. Ersetzen wir aber das andere der beiden kollinearen Systeme durch ein reziprokes, so entsteht aβ) *die Reziprozität mit singulären Punkten*, wo jedem derselben jede Gerade des andern Systems entspricht und insbesondere jeder Geraden durch den singulären Punkt des einen ein unbestimmter Punkt in einer projektiv zugeordneten Geraden durch den singulären Punkt des andern. Dagegen entsteht aus der singulären Kollineation b) nur *eine* singuläre Reziprozität bβ) *mit einem singulären Punkt in einer singulären Geraden in jedem System*, denen je eine unbestimmte Gerade und ein unbestimmter Punkt des andern entsprechen, während einem andern Punkte der singulären Linie ein unbestimmter Strahl durch den singulären Punkt des andern Systems entspricht.

Die zugehörigen Substitutionen bildet man durch die geeigneten Ersetzungen der x_i durch die u_i, usw. Die Übertragung alles dessen auf kollineare und reziproke Bündel, insbesondere Bündel von einerlei Scheitel (Nr. 415) ist augenscheinlich.

B. 1) Wenn das Projektionszentrum in einer Originalgeraden liegt, so ist deren Bild ein Punkt, ihr Schnitt mit der Bildebene. Die Projektivitätsgleichung (Nr. 93) zwischen zwei entsprechenden Reihen $a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$ enthält diesen Fall; sie gibt für λ' den Wert σ' bei $\lambda = 0:0$, wenn man hat $d = -c\sigma'$, $b = -a\sigma'$. Sie wird dann

$$a\lambda\lambda' - a\sigma'\lambda + c\lambda' - c\sigma' = 0, \quad \text{d. i.} \quad (\lambda' - \sigma')(c + a\lambda) = 0.$$

Man bemerke, daß die Auswertung der Parameter in beiden Reihen die Bestimmtheit der projizierenden Ebene der projizierenden Geraden gibt. Dasselbe ergibt die Behandlung der Substitution $\mu x_i' = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2$ für den singulären Fall, aus der durch

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \lambda' = \frac{\alpha_{11}\lambda + \alpha_{12}}{\alpha_{21}\lambda + \alpha_{22}}$$

oder

$$\alpha_{21}\lambda\lambda' - \alpha_{11}\lambda + \alpha_{22}\lambda' - \alpha_{12} = 0$$

als Parametergleichung entspringt. Das gilt offenbar auch für projektive Büschel. Der Zusammenhang mit der parabolischen Involution ist offenbar. (Nr. 18 und 331.)

2) Man untersuche die Ausartungsformen der Kegelschnitte, die aus der Verbindung solcher singulär projektiver Elementargebilde hervorgehen.

3) Bei den beliebig vereinigten singulären Reziprozitäten aα), aβ) den Polkegelschnitt und den Polarkegelschnitt zu bestimmen, ist leicht. Für aα) ist der Polkegelschnitt ein die singulären Punkte enthaltender Kegelschnitt; diese zwei Punkte selbst bilden den Polarkegelschnitt. Für aβ) wird der Polkegelschnitt von den singulären Geraden gebildet, und der Polarkegelschnitt ist eine sie berührende Kurve zweiter Klasse. Endlich bilden im Falle bβ) die singulären Geraden den Polkegelschnitt und die in ihnen liegenden singulären Punkte den Polarkegelschnitt.

4) Durch Deckung der singulären Elemente singulär-reziproker ebener Systeme entstehen Polarsysteme. Welcher Art ist der Leitkegelschnitt? Punktepaar, Geradenpaar, Doppelpunkt und Doppelgerade ineinanderliegend.

412. Wir projizieren nun eine *nicht* durch das Zentrum gehende Ebene. Wenn eine durch das Zentrum O parallel zur Bildebene E' gelegte Ebene die Originalebene E in einer Geraden r schneidet, so projiziert sich jedes Strahlenbüschel in E, das seinen Scheitel in dieser Geraden r hat, in ein System von Parallelen in E'. Denn ein Strahl, der vom Zentrum O nach einem beliebigen Punkte der Geraden r gezogen wird, begegnet der Projektionsebene erst in unendlicher Entfernung. Insofern jener Punkt Schnittpunkt von mehreren Geraden ist, müssen sich diese als solche Geraden projizieren, deren Schnittpunkt unendlich fern liegt. Umgekehrt wird jedes System von Parallelen in E in ein solches Strahlenbüschel projiziert, das seinen Scheitel in einem Punkte der Geraden q' hat, in der eine durch O parallel zur Originalebene E gelegte Ebene die Projektionsebene E' schneidet. Nur die Parallelen zur Bildebene haben auch parallele Bilder.

So führt uns die Methode der Projektionen zu dem Schlusse, daß ein beliebiges System von Parallelen als ein durch einen unendlich fernen Punkt gehendes Büschel betrachtet werden kann (Nr. 68); ebenso, daß alle unendlich entfernten Punkte einer Ebene als in einer Geraden gelegen

anzusehen sind (Nr. 75), da ihre Projektionen in der Geraden q' liegen.

Wir bemerken endlich, daß die Schnittlinie s der Projektionsebene mit der Ebene der Figur zugleich der Ort der Schnittpunkte der Geraden der Figur mit ihren bez. Projektionen ist. Man nennt diese Gerade, den Ort der in beiden Systemen sich selbst entsprechenden Punkte, die *Spur* der einen Ebene in der andern. Auf jedem Strahl durch O nach s ist die Mitte zwischen O und s auch Mitte zwischen q' und r. Jede der beiden Geraden r, q', die in jeder Ebene der unendlich fernen Geraden der andern entsprechen, heißt *Fluchtlinie* oder *Gegenachse* der einen Ebene in der andern. Die Punkte jeder Fluchtlinie entsprechen den Richtungen der Strahlen der andern Ebene und heißen Gegen- bez. *Fluchtpunkte* der zugehörigen Parallelen.

413. *Jede ebene Kurve wird in eine andere Kurve von derselben Ordnung und Klasse projiziert.* Denn wenn die gegebene Kurve durch eine Gerade in einer Anzahl von Punkten A, B, C, D ... geschnitten wird, so wird ihre Projektion durch die Projektion der Geraden in eben so vielen entsprechenden Punkten A', B', C', D' ... geschnitten. Aber die Ordnung einer Kurve wird durch die Zahl von Punkten geometrisch bestimmt, die sie mit einer Geraden gemein haben kann (Nr. 27). Wenn unter den Schnittpunkten der Kurve mit einer Geraden neben reellen auch imaginäre sind, so bleibt die Zahl der reellen und der imaginären Punkte durch Projektion ungeändert. Wenn sich zwei Kurven schneiden, so schneiden sich ihre Projektionen in derselben Anzahl von Punkten; reellen Schnittpunkten entsprechen reelle, imaginären aber imaginäre.*)

Jede Tangente der einen Kurve wird in die entsprechende Tangente der andern Kurve projiziert. Denn jede Sehne AB der einen Kurve wird als eine Sehne $A'B'$ projiziert; wenn aber die Punkte A, B zusammenfallen, so fallen auch A', B' zusammen, und die Sehne $A'B'$ ist die entsprechende Tangente

*) Eine Ausnahme machen nur die Kurven, deren Ebenen durch das Projektionszentrum gehen, da ihre Projektionen in die Spur der Ebene fallen.

der Projektion der Kurve (Nr. 104). Wenn zwei Kurven einander in einer Anzahl von Punkten berühren, so berühren ihre Projektionen einander in eben so vielen zu jenen entsprechenden Punkten.

Wenn irgend eine Eigenschaft, die sich nicht auf die Größe von Strecken oder von Winkeln, sondern auf die Lage von Geraden als durch gewisse Punkte gehend oder gewisse Kurven berührend, oder auf die Lage von Punkten usw. bezieht, für eine gegebene Kurve wahr ist, so bleibt diese Eigenschaft für alle die Kurven gültig, die aus der gegebenen durch Projektion hervorgehen.[134]) Beispiele bietet Nr. 423f.

414. **Projektive Eigenschaften** heißen Eigenschaften einer Figur, die erhalten bleiben, wenn man durch Projektion aus der gegebenen Figur eine neue Figur entstehen läßt. Zu diesen Eigenschaften gehören außer den vorhin bezeichneten auch einige solche, die die Größen von Strecken und Winkeln scheinbar enthalten. So stimmt das Doppelverhältnis von vier Punkten in einer Geraden $(ABCD)$, da es durch das Doppelschnittverhältnis des projizierenden Büschels $(O \cdot ABCD)$ am Zentrum der Projektion gemessen wird, mit dem der vier Punkte $(A'B'C'D')$ überein, in denen dies Büschel durch eine beliebige Transversale geschnitten wird. *Doppelverhältnisse werden durch Projektion nicht geändert.* (Vgl. Kap. V.) Aber Halbierungen werden zu harmonischen Gruppen, symmetrische Reihen oder Büschel zu involutorischen.

Oder, wenn zwischen den durch eine beliebige Anzahl von Punkten in einer Geraden bestimmten Strecken eine Gleichung von der Form

$$AB \cdot CD \cdot EF + k \cdot AC \cdot BE \cdot DF + l \cdot AD \cdot CE \cdot BF + \cdots = 0$$

besteht, in der jedes Glied die nämlichen Punkte nur in verschiedener Ordnung enthält, so ist diese Eigenschaft projektiv. Denn nach Nr. 84 kann man für AB das Verhältnis

$$OA \cdot OB \cdot \sin AOB : OP$$

und für die übrigen Strecken entsprechende Ausdrücke einsetzen, wodurch die Gleichung in allen Gliedern das Produkt

$$OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \cdot OE \cdot OF$$

im Zähler und die Größe $\overline{OP}^3$ im Nenner enthält; durch Division mit diesen Faktoren wird sie daher auf eine Beziehung zwischen den Sinus der am Punkte O gebildeten Winkel zurückgeführt.

Auch ist leicht zu erkennen, daß die Punkte A, B, C, D, E, F nicht in einer Geraden zu liegen brauchen, um diese Projektivität zu begründen; wenn die Senkrechte OP nicht für alle in der Gleichung auftretenden Strecken die nämliche ist, so müssen diese nur so geordnet sein, daß in jedem Gliede der Gleichung im Nenner das nämliche Produkt solcher zugehörigen Lote $OP \cdot OP' \cdot OP'' \ldots$ auftritt. Als ein Beispiel dafür erwähnen wir den Satz: Wenn Geraden, die von den Ecken eines Dreiecks ABC nach demselben Punkte seiner Ebene gezogen werden, die Gegenseiten desselben in den Punkten a, b, c schneiden, so ist $Ab \cdot Bc \cdot Ca$ gleich $Ac \cdot Ba \cdot Cb$. Weil diese Gleichung von der eben besprochenen Art ist, so reicht es hin, sie für irgend eine Projektion des Dreiecks ABC zu beweisen; machen wir für diese die Voraussetzung, daß der Punkt C in unendlicher Entfernung projiziert sei, so werden die Geraden AB, BC, Cc einander parallel und die Gleichung wird $Ab \cdot Bc = Ac \cdot Ba$, deren Wahrheit ohne Weiteres ersichtlich ist.

Offenbar reicht es überhaupt zum Beweise solcher projektiver Eigenschaften von Figuren hin, den Beweis für die einfachste derjenigen Figuren zu liefern, in die die gegebene projiziert werden kann; z. B. oft für eine solche, in der eine gewisse Gerade der Figur unendlich fern erscheint. Wenn z. B. gefordert wäre, *die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks $ABCD$ mit den Diagonalpunkten EFG* zu untersuchen, so verbinden wir alle Punkte dieser Figur mit einem Punkte O im Raume durch Strahlen und schneiden die Verbindungslinien durch eine zur projizierenden Ebene OEF bez. OFG oder OGE parallele Ebene, so daß etwa EF in unendlicher Entfernung projiziert erscheint. Die Projektion $A'B'C'D'$ des Vierecks ist dann ein Parallelogramm. *Jedes Viereck kann demnach zunächst* (vgl. Nr. 424, 8) *zentral in ein Parallelogramm projiziert werden.* Da nun die Diagonalen $G'E'$,

$G'F'$ eines Parallelogramms die Seiten $B'C'$ und bez. $A'B'$ halbieren und zu $A'B'$ bez. $B'C'$ parallel sind, d. h. je mit den Ecken und dem unendlich fernen Punkt dieser Seiten harmonische Gruppen bilden, so schließt man aus der projektiven Natur dieser Beziehung die Sätze von Nr. 66. Die Projektion in ein Rechteck oder Quadrat ändert hieran nichts.

B. 1) Wenn zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ so gelegen sind, daß die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ in einer Geraden liegen, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken AA', BB', CC' in einem Punkte. (Vgl. Nr. 67, 4.)

Der Satz bedarf keines Beweises mehr, wenn man, wie es seine projektive Natur erlaubt, die Figur, auf die er sich bezieht, so projiziert, daß die Gerade, in der sich die entsprechenden Seiten beider Dreiecke schneiden, in unendlicher Entfernung erscheint; denn er geht alsdann in den einfachen Ausdruck der Ähnlichkeit und ähnlichen Lage beider Dreiecke über: Wenn in zwei Dreiecken abc; $a'b'c'$ die Seiten des einen den Seiten des andern parallel sind, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken in einem Punkte; dies geht einfach aus der Bemerkung hervor, daß die Geraden aa' und bb' beide die Gerade cc' in dem nämlichen Verhältnis teilen.

2) Aber der vorige Satz und sein dualer: Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind, daß die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Eckenpaare durch einen Punkt S gehen, so schneiden sich die Paare ihrer entsprechenden Seiten in einer Geraden s — erscheinen nach den Projektionsgesetzen unmittelbar klar aus den Definitionen. Denn in der Figur des ersten sehen wir eine Projektion der zwei Dreiecke, die die Schnittpunkte von drei nicht in derselben Ebene liegenden Geraden durch S mit zwei S nicht enthaltenden Ebenen bilden; ihre entsprechenden Seiten schneiden sich in der Schnittlinie dieser Ebenen. Und wenn man von drei Punkten dieser Schnittlinie s zweier Ebenen ausgeht, und in diesen Ebenen Dreiseite gebildet denkt, deren entsprechende Seitenpaare durch jene drei Punkte bez. gehen, so liegen ihre entsprechenden Ecken auf drei Geraden durch einen Punkt S, weil sich Geraden, die paarweise aber nicht alle in einer Ebene liegen, in einem Punkte schneiden. Die betrachteten Sätze sprechen nur die Eigenschaften der Projektionen dieser räumlichen Figuren aus.

3) Daran schließt sich ohne neue Voraussetzungen die Erweiterung auf *die perspektiven Vierecke und Vierseite*: Wenn zwei ebene Vierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$ so liegen, daß sich fünf ihrer entsprechenden Seitenpaare AB, $A'B'$, usw. in fünf Punkten einer

Geraden s schneiden, so liegt auch der Schnittpunkt des sechsten Seitenpaares, etwa CD, $C'D'$, in dieser Geraden, und die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken AA', usw. gehen durch einen Punkt S. Und: Wenn zwei ebene Vierseite so liegen, daß fünf ihrer entsprechenden Eckenpaare in Geraden aus einem Punkte S enthalten sind, so liegt auch ihr sechstes Eckenpaar in einer Geraden durch diesen Punkt, und die vier Schnittpunkte ihrer entsprechenden Seiten liegen in einer Geraden s.

Denn für den ersten Satz: Die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ und wieder ABD, $A'B'D'$ liegen nach Voraussetzung perspektiv für die Gerade s als Achse und einen Punkt S als Zentrum; daher geht DD' auch durch S, und die Dreiecke BCD, $B'C'D'$ sind, weil sich BC, $B'C'$ und BD, $B'D'$ in s schneiden, ebenso perspektiv, oder die Geraden CD, $C'D'$ gehen durch *einen* Punkt von s. Und dual.

Denken wir das erste Viereck (Vierseit) und die Gerade s (den Punkt S) gegeben, so läßt sich das zweite in seiner Ebene auf dreifach unendlich viele Arten bilden, weil man seine Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ durch die Schnittpunkte von s mit bez. AB, BC, CA beliebig — nur so, daß sie ein Dreieck $A'B'C'$ bilden — ziehen kann; dann treffen sich die von A' nach dem Schnittpunkt von s mit AD und die von B' nach dem Schnittpunkt von s mit BD gezogene Gerade in einem Punkte D', dessen Verbindungsgerade mit C' durch den Schnitt der Geraden s und CD gehen muß. Die Bildung *eines* Vierecks $ABCD$ genügt offenbar um den sechsten Punkt s, CD zu erhalten; und die Bildung *eines* Vierseits $abcd$ um den sechsten Strahl S, cd zu finden: Das vollständige Viereck (Vierseit) liefert durch die Schnittpunkte zweier Gegenseitenpaare mit s (die Verbindungsgeraden seiner Gegenseitenpaare mit S) drei Paare der Involution in s (an S). Man hat die Konstruktion einer involutorischen Reihe in s aus dem Paare s, BC; s, AD und dem Paare s, AC; s, BD oder die Konstruktion des entsprechenden Punktes s, CD zu dem Punkte s, AB. Und dual erhält man die Konstruktion des *involutorischen Büschels* aus S, das *durch zwei Paare* bestimmt ist, d. h. zu jedem fünften Strahl aus S den sechsten, der mit ihm ein Paar bildet.

4) Bewegt sich der fünfte Punkt der Involution aus zwei Paaren in der Geraden s, bez. dreht sich der fünfte Strahl des involutorischen Büschels um S, und will man die Lagen des jeweiligen entsprechenden mit dem geringsten Linienaufwand konstruieren, *so erhält man zu der Konstruktion der involutorischen Reihe stets ein Paar projektive Strahlenbüschel, aus denen sie geschnitten wird,* und zur Konstruktion *des involutorischen Strahlenbüschels ein Paar der projektiven Punktreihen, die von ihm projiziert werden;* so daß sich

die Konstruktion projektiver Büschel und Reihen und damit die ganze projektive Geometrie als mit folgend aus der vorigen Entwicklung, also als *Bestandstück jeder Geometrie, unabhängig von Parallelenaxiom und Metrik* ergibt.

Wenn in der Involution auf s zwei Paare A, A_1 und B, B_1 gegeben sind und zu dem Punkte C der entsprechende C_1 gesucht wird — man wird die Figuren hier wie im Vorigen leicht selbst bilden — so daß man die Konstruktion mit der Bildung eines Dreiecks zu beginnen hat, dessen Seiten durch A, B_1, C bez. gehen, so wähle man auf der Seite durch A zwei seiner Ecken T, T' fest, so daß für jedes C die dritte Ecke U auf der Geraden B_1T' in ihrem Schnittpunkt mit dem um T sich drehenden Strahle TC liegt. Dann ist die Konstruktion von C_1 als Partner von C in der Involution in s die Konstruktion des zu TC entsprechenden Strahles in dem Büschel aus T', das zu $T \cdot ABC$ projektiv ist. Denn A_1 ist das perspektive Zentrum T'' dieser beiden Büschel (Nr. 67) und die Bildung des Vierecks durch Hinzufügung der Ecke U' zu T, T', U fordert den Schnitt der Geraden TB mit UA_1, d. h. mit UT'', und $T'C_1$ geht nach diesem U'. Rückt C in s fort, so U in $T'B_1$, U' in TB und $U'T'$ schneidet C_1 aus s — eine Kette von Gliedern in paarweis perspektivem Zusammenhang, also von gleichen entsprechenden Doppelverhältnissen (Nr. 86) nach der ersten Entwicklung. Und dual für die Involution im Strahlenbüschel mit dem vollständigen Vierseit.[135])

415. **Geometrie im Bündel.** Die projizierenden Strahlen der Punkte, die projizierenden Ebenen der Geraden einer Ebene bilden, wie man sagt, *ein Bündel von Strahlen und Ebenen am Zentrum O als Scheitel.* Also ist das Bündel in seinen Elementen Strahl und Ebene von derselben Mannigfaltigkeit, wie die Ebene in den ihrigen Punkt und Gerade. Aus der ebenen Geometrie folgt somit *eine Geometrie im Bündel,* die die Lagenbeziehungen zwischen den Strahlen und Ebenen durch *einen* Scheitel untersucht. Nach dem Vorigen gelten alle Doppelverhältniseigenschaften ebener Figuren auch für die sie projizierenden Figuren des Bündels, sobald man den Begriff des Doppelverhältnisses von vier Strahlen eines Büschels auf die sie projizierenden Ebenen eines Büschels überträgt. Demnach erhalten wir aus projektiven Sätzen der ebenen Geometrie die entsprechenden der Geometrie im Bündel, indem wir nur *Strahl und Ebene an Stelle von Punkt und Strahl* setzen.

Während die gewöhnliche Anschauung das Bündel als von der Ebene wesentlich verschieden ansieht, weil es den ganzen Raum erfüllt, ist *die allgemeine analytische Geometrie im Bündel und in der Ebene identisch.* Hierin liegt die unmittelbare Rechtfertigung der Einführung der räumlichen Projektionsmethode in die Untersuchungen der ebenen Geometrie. *In der Tat können wir die ternären homogenen Koordinaten von Elementen der Ebene auch als die Koordinaten der projizierenden Elemente des Bündels deuten,* sobald wir als Fundamentalstrahlen und -ebenen des Bündels die projizierenden der Fundamentalpunkte und -linien der Ebene einführen; denn die Koordinatenverhältnisse sind Doppelverhältnisse. Gleichungen ersten und zweiten Grades in x_i, bez. u_i definieren Ebenen bez. Strahlen, und Kegel zweiter Ordnung bez. Klasse im Bündel.

Und schneiden wir Strahlen und Ebenen des Bündels mit einer Original- und einer Bildebene, so definieren die Koordinaten der Elemente P der einen Figur die der entsprechenden Elemente P' der andern, falls wir sie je auf entsprechende Fundamentalelemente A_i, E, A_i', E' der Ebenen beziehen. *Eine Originalkurve und ihre Projektionen sind durch dieselbe Gleichung in perspektiven Koordinatensystemen dargestellt.*

Führen wir insbesondere nicht-homogene Koordinaten ein, indem wir x_3 und u_3 konstant denken, so heißt dies, wir untersuchen statt der Originalfigur eine Projektion auf eine Ebene, die zur Verbindungsebene des Zentrums mit der Fundamentallinie A_1A_2 parallel ist. Dann ist $A_1'A_2'$ die unendlich ferne Gerade und man hat noch dafür zu sorgen, daß die Projektion des Einheitspunktes E in die Halbierungslinie $A_3'E'$ des Winkels der Achsen $A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ fällt (Nr. 88), wozu nur OE die Strecke A_1A_2 halbieren muß. Umgekehrt wird mit dem Homogenmachen eine beliebige Projektion eines auf zwei Achsen bezogenen Originals eingeführt.[136])

416. **Zentralkollineation und Umlegung.** Ebene Systeme entsprechen sich nach der Methode der Zentralprojektion in der Weise, daß alle Paare entsprechender Punkte in Geraden aus einem Punkte O liegen, und alle Paare entsprechender Geraden sich in Punkten einer Geraden s begegnen; und diese

Beziehung bleibt auch ungestört, wenn wir beide Systeme durch eine Drehung des einen um ihre gemeinschaftliche Schnittlinie s in *eine* Ebene zusammenlegen. *Man erkennt daraus die Identität der zentralprojektiven Beziehung ebener Systeme mit der zentrischen Lage kollinearer Systeme.*

Denn da der Winkel γ von zwei sich schneidenden Geraden durch den von Parallelen aus dem Zentrum an diesem gemessen wird, so liefert die Umlegung der Ebene Oq' um q' als die Fluchtlinie der Ebene des Winkels seine wahre Größe; man verbindet das mit Oq' umgelegte Zentrum (O) mit den Fluchtpunkten Q_1', Q_2' der Schenkel, d. i. mit den Schnittpunkten ihrer Bilder mit q'. Infolgedessen ist auch der von $(O)\,Q'$ mit q' eingeschlossene Winkel der Winkel der Geraden gegen die Spur s der Ebene des Winkels. Wenn man also die Fluchtpunkte der Geraden in der Ebene mit dem mit der Ebene Oq' umgelegten Zentrum (O) durch Strahlen verbindet und zu diesen durch die entsprechenden Durchgangspunkte S_1, S_2 Parallelen zieht, so geben diese die Lagen jener Geraden nach Überführung in die Bildebene an. Insbesondere entspricht diesem Gesetze gemäß jeder durch (O) gehende Strahl sich selbst. Es liegen also, weil entsprechende Punkte die Schnittpunkte von entsprechenden Geraden sind, auch noch nach der Zusammenlegung beider Systeme in eine Ebene die entsprechenden Punkte in Strahlen aus einem Punkte (O), dem *Zentrum der Kollineation.* Zur Konstruktion nur noch dies.

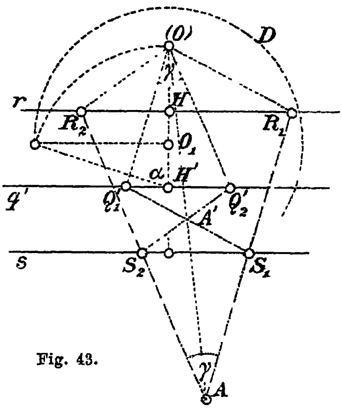


Fig. 43.

Wir denken vom Zentrum O der Projektion die Normale zur Bildebene $O\,O_1$ mit dem Fußpunkte O_1 (Fig. 43) und beschreiben mit ihrer Länge (der Distanz) als Radius um O_1 in der Bildebene den Distanz-Kreis D; ist dann s die Spur und q' die Fluchtlinie der Ebene eines in die Bildebene projizierten Systems, so erhalten wir das zugehörige Zentrum (O) der Kollineation

in dem Lot von O_1 auf q' mit dem Fußpunkt H', indem wir von H' auf die Gerade $H'O_1$ die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten O_1H' und O_1O abtragen.

Wie vorher beschrieben, zeichnet man nun die Figur der Ebene sq' (Fig. 44) in die Bildebene, indem man zu jeder Geraden SQ' oder g' derselben die entsprechende Gerade g als Parallele zu $(O)Q'$ durch S zieht. Die Spur s der Ebene wird die *Achse* und (O) das *Zentrum der Kollineation* genannt; die Fluchtlinie q' die Gegenachse im Bild, und die Parallele r zu ihr, die von (O) ebenso weit und im nämlichen Sinne entfernt ist, wie s von q' (Nr. 412) die Gegenachse in der Umlegung oder im Original; diese hat für den Übergang vom Original zum Bild die gleiche Verwendung wie q' für den vom Bild zum Original. Das rechtwinklige Koordinatensystem im Bilde mit q' als $x' = 0$ und dem Nullpunkt in H' entspricht dem rechtwinkligen System im Original mit r als $x = 0$ und dem Nullpunkt H; die Achsen der x und x' entsprechen einander, die y' und y je der unendlich fernen Geraden des andern Systems. Auch die symmetrisch gleichen Reihen t, t' und Büschel T, T' konstruiert man leicht aus derselben Umlegung. (S. Fig. 44.) Die Gegenachsen können in der Mitte zwischen Kollineationszentrum und -Achse zusammenfallen, nämlich dann, wenn das Projektionszentrum O in der Halbierungsebene des Drehungswinkels zwischen beiden Ebenen liegt; wenn es in der Halbierungsebene seines Nebenwinkels liegt, so sind die Gegenachsen symmetrisch zur Kollineationsachse und diese enthält das Kollineationszentrum. Im ersten Falle hat man die *Involution der kollinearen ebenen Systeme.* Aus der Kollineations-

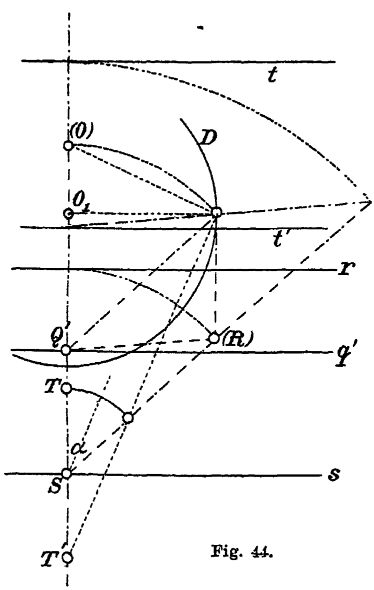


Fig. 44.

achse, der einen Gegenachse und dem umgelegten Zentrum (O) bestimmt sich zu dem als gegeben gedachten einen System das andere durch lineare Konstruktion, zum Original das Bild auf gleiche Weise nur mit der anderen Gegenachse wie zum Bilde das Original.[137])

Wir kehren zur Winkelbestimmung zurück. Die Bilder von zwei zueinander rechtwinkligen Richtungen im Original sind zwei Punkte in q', deren Verbindungslinien mit (O) an diesem Punkte einen rechten Winkel bilden, oder sie sind Durchmesserendpunkte eines Kreises durch (O), also nach der schon in Nr. 18 benutzten Ausdrucksweise: Alle Paare rechtwinkliger Richtungen in der Originalebene werden abgebildet durch die Paare der elliptischen Involution in q', die von (O) aus durch die Rechtwinkelinvolution projiziert wird, die also H' zum Mittelpunkt und das Paar im Kreis aus H' durch (O) zum symmetrischen Paar hat. (Distanzpunkte.)

Und ebenso: Die Paare rechtwinkliger Richtungen in der Bildebene haben ihre Originale in der Gegenachse r in den Paaren derjenigen elliptischen Involution, die durch die Rechtwinkelinvolution um (O) projiziert wird, die also in H ihren Mittelpunkt und auf dem aus H durch (O) beschriebenen Kreise ihr symmetrisches Paar hat.

Die letztgenannten Paare bilden die symmetrisch harmonische Darstellung der Entsprechenden zu den absoluten Punkten der Original- bez. der Bildebene. Da nun die Involution der Paare rechtwinkliger Richtungen die Polinvolution des Kreises auf der unendlich fernen Geraden ist, so hat notwendig der in einer kollinearen Figur einem Kreise entsprechende Kegelschnitt die in der Gegenachse seines Systems liegende elliptische Involution mit den Distanzpunkten als dem symmetrischen Paar zu seiner Polinvolution in dieser Gegenachse. Und wenn Kegelschnitte des einen Systems in dessen Gegenachse dieselbe elliptische Polinvolution bestimmen, so entsprechen ihnen im andern System immer dann lauter Kreise, wenn das Zentrum der zwischen beiden bestehenden Kollineation der Scheitel der über jenen stehenden Rechtwinkelinvolution ist; die Wahl der Kollineationsachse hat nur

Einfluß auf ihre Größe und Lage. Es ist klar, daß damit die Fragen nach der Überführung von Kegelschnitten in Kreise durch Projektion vollständig und in einfachster Art erledigt sind. (Man vergleiche aber die elementare Behandlung derselben in Nr. 418f.)

Bringen wir Original und Bild *irgendwie* unverändert zur Vereinigung in eine Ebene, so können nun die Elemente beider Systeme auf *eines* der beiden Fundamentalquadrupel A_i, E bez. A_i', E' bezogen werden. Dann unterliegen die bisher im andern gedeuteten Koordinaten einer linearen Transformation, die durch die Lage ihres Quadrupels im gewählten System bestimmt ist. Der geometrische Prozeß zeigt so die Identität des analytischen Ausdrucks für Koordinatentransformation und allgemeine Kollineation. Haben wir, wie oben, die Kollineation nur durch eine Drehung der gegebenen Ebenen um die gemeinsame Schnittlinie erzeugt, so sind die Substitutionen von der besonderen Art, wo *ein* Strahlenbüschel und *eine* Punktreihe je sich selbst entspricht. Vgl. B. 7.

B. 1) Der Mittelpunkt des Bildes von einem Kegelschnitt entspricht dem Pol der Gegenachse r in ihm (Nr. 414).

2) Die zentrisch kollineare Figur zu einem kreisförmigen Original mit dem Kollineationszentrum als Mittelpunkt ist ein Kegelschnitt, der diesen Punkt zum Brennpunkt und die Gegenachse q' zur entsprechenden Leitlinie hat. Auch das führt direkt auf das Gesetz von Nr. 183.

3) Um zwei Kreise einer Ebene in zwei Kreise zentral zu projizieren, hat man ihre Potenzlinie als Gegenachse r der Kollineation zu wählen und von ihrem Schnitt mit der Zentrale aus in dieser den Radius des kleinsten Orthogonalkreises beider Kreise abzutragen (Kreis über dem symmetrischen Paar der gemeinsamen Polinvolution durch (O)), um das Kollineationszentrum zu erhalten. Die Wahl der andern Gegenachse q' oder der Achse s (parallel r) liefert entsprechende Kreise für alle Kreise des Büschels, das die zwei gegebenen bestimmen. Man schneidet ihre Radien leicht in s ab.

4) Zu einer gewählten Zentralkollineation gehören immer unendlich viele Zentralprojektionen: Ihre Projektionszentren O liegen auf dem Kreise, der in der Normalebene durch (O) zu r aus H beschrieben wird.

5) Wenn unter den drei Geradenpaaren eines Kegelschnittbüschels (Nr. 251f.) nur *ein* reelles ist, so sind entweder die in

ihnen liegenden, allen Kegelschnitten gemeinsamen Polinvolutionen beide elliptisch oder eine von ihnen ist hyperbolisch. Im ersten Falle sind beide Gegenachsen für die Überführung des Kegelschnittbüschels in Kreisbüschel verwendbar und der Gesamtort der zugehörigen Projektionszentra besteht aus den zwei Kreisen in ihren Normalebenen mit den halben Distanzen ihrer symmetrischen Paare als Radien, usw. Für ein bestimmtes Zentrum O ist die Bildebene parallel zur Ebene Or.

6) Die dreifach unendlich vielen Kegelschnitte, die auf einer Geraden r dieselbe elliptische Polinvolution bestimmen (und deren jeder durch drei seiner Punkte bestimmt werden kann), liefern als entsprechend alle Kreise der Bildebene — je durch die entsprechenden der drei Punkte.

7) Nimmt man den Nullpunkt von rechtwinkligen Koordinaten als Kollineationszentrum (O), $x = a$ als Achse (Spur) und $x = b$ als Fluchtlinie q', so gibt die Ausführung der Konstruktion des Textes die Gleichungen

$$x = \frac{(b-a)x'}{b-x'}, \quad y = \frac{(b-a)y'}{b-x'}.$$

Das entsprechende Koordinatendreieck der Projektion, in dem die homogenen Koordinaten die Werte $\mu x \mid \mu y \mid \mu$ haben, ist gebildet aus $a - b \mid 0$; $0 \mid \infty$; $0 \mid 0$ (Streifenkoordinaten Nr. 88).

Für $a = 2b$ hat man die involutorische Kollineation, für $a = 0$ ihre entgegengesetzte Umlegung.

417. **Kegel zweiten Grades.** Alle Projektionen eines Kreises aus einem nicht seiner Ebene angehörigen Zentrum sind nach Nr. 413 Kurven zweiten Grades. Man nennt daher Kegel über kreisförmiger Basis selbst Kegel zweiten Grades. Die Untersuchung der ebenen Querschnitte solcher Kegel ist nach dem Vorhergehenden identisch mit der Theorie der zu Kreisen kollinearen Kurven. Es soll hier aus der räumlichen Auffassung die elementare Definition dieser Querschnitte abgeleitet und damit die Bezeichnung der Kurven zweiten Grades als *Kegelschnitte* direkt begründet werden.

Man pflegt einen Kreiskegel ferner *gerade* oder *schief* zu nennen, je nachdem die Verbindungsgerade seiner Spitze mit dem Mittelpunkt des Basiskreises auf dessen Ebene senkrecht ist oder nicht: Achse des Rotationskegels im ersten Fall. Da die Vorstellung des geraden Kreiskegels die einfachere ist, so ist es zweckmäßig, von ihm auszugehen. Jedoch stimmt die

Untersuchung der Schnitte des schiefen Kegels mit derjenigen der Schnitte des geraden Kegels völlig überein.

Die Schnitte eines jeden Kegels mit parallelen Ebenen sind *ähnliche* Kurven. Denn wenn wir in der Ebene der einen Kurve einen Punkt A und in der Ebene der andern Kurve den entsprechenden Punkt a auf OA annehmen, und von ihnen nach irgend zwei entsprechenden Kurvenpunkten B, b Vektoren ziehen, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken OAB und Oab die Verhältnisgleichheit $OA : Oa = AB : ab$. Weil also *jeder* Vektor der einen Kurve zu dem entsprechenden Vektor der andern in dem nämlichen konstanten Verhältnis $OA : Oa$ steht und die entsprechenden Winkel übereinstimmen, so sind die beiden Kurven ähnlich (Nr. 227). Insbesondere wird jeder Kreiskegel durch eine Ebene, die seiner Basis parallel ist, in einem Kreise geschnitten. Wir denken nur die entsprechenden Punkte A, a als die Mittelpunkte der beiden Kurven.

Allgemeiner erkennen wir aber nach denselben Überlegungen, *daß die Zentralprojektion ebener Figuren auf parallele Ebenen ähnliche Figuren liefert.* Da alsdann Spur und Fluchtlinie unendlich fern sind, so ist unter Umlegung der einen Ebene in die andere eine Parallelverschiebung zu verstehen, bei der alle Punkte Normalen der Ebene beschreiben. Man kommt so auf die Ähnlichkeit in ähnlicher Lage als Sonderfall der Zentralkollineation.

418. *Die ebenen Schnitte eines Kreiskegels sind — von Geradenpaaren abgesehen — entweder Ellipsen oder Hyperbeln oder Parabeln.* Im Falle des geraden Kegels lege man durch die Achse OC eine Ebene OAB senkrecht zur Schnittebene $MSsN$ und betrachte OAB als die Ebene der Zeichnung. Die Schnittebene sowohl wie die Basisebene ASB ist dann rechtwinklig zur Ebene der Zeichnung, ebenso die Gerade RS, in der sich jene beiden Ebenen schneiden. Wir setzen alsdann zuerst voraus, daß die Gerade MN, in der die Schnittebene die Ebene OAB schneidet, den beiden Seitenlinien OA und OB des Kegels auf derselben Seite des Scheitels O begegnet, wie Figur 45 es angibt.

Durch irgend einen Punkt s der Schnittkurve legen wir eine zur Basis parallele Ebene und erhalten dadurch für das

Quadrat der Ordinaten RS und rs der Kreise ASB und asb die Ausdrücke $\overline{RS}^2 = AR \cdot RB$ und $\overline{rs}^2 = ar \cdot rb$. Wenn man aber die ähnlichen Dreiecke ARM und arM, BRN und brN betrachtet, so folgt

$$AR \cdot RB : MR \cdot RN = ar \cdot rb : Mr \cdot rN,$$

also

$$\overline{RS}^2 : \overline{rs}^2 = MR \cdot RN : Mr \cdot rN.$$

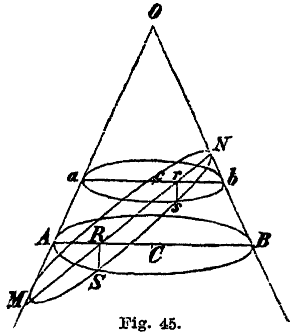


Fig. 45.

Das Quadrat einer beliebigen Ordinate rs der Schnittkurve $MSsN$ steht also zu dem Rechteck aus den von ihr in der Geraden MN bestimmten Abschnitten in dem konstanten positiven Verhältnis $\overline{RS}^2 : MR \cdot RN$. Nach Nr. 151 ist der betrachtete Kegelschnitt eine *Ellipse,* die MN zur Hauptachse hat, und deren kleine Achse sich aus der Bemerkung bestimmt, daß ihr Quadrat zu $\overline{MN}^2$ im Verhältnis $\overline{RS}^2 : MR \cdot RN$ stehen muß

Die Tatsache, daß das Verhältnis $\overline{rs}^2 : Nr \cdot rM$ konstant, etwa gleich $\varkappa^2$ ist, führt sofort zur *Scheitelgleichung der Ellipse.* Denken wir uns nämlich in der Schnittebene $MSsN$ ein Koordinatensystem mit NM als Abszissenachse, einer durch N rechtwinklig zu NM gezogenen Geraden als Ordinatenachse, so ist $Nr = x$, $rs = y$. Setzt man ferner $NM = 2a$, so folgt $rM = 2a - x$, und aus $\overline{rs}^2 : Nr \cdot rM = \varkappa^2$ geht $y^2 = x(2a - x)\varkappa^2$ hervor oder auch $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, wenn man $2a\varkappa^2$ durch $2p$ ersetzt. Vgl. Nr. 192.

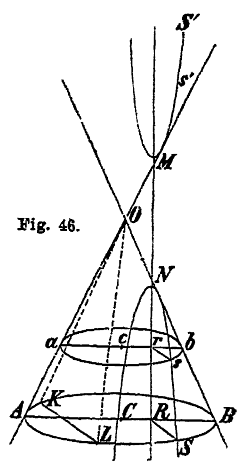


Fig. 46.

Wir nehmen zweitens an, eine der beiden Seiten OA und OB, etwa OA, werde von der Geraden MN erst in der Verlängerung geschnitten (Fig. 46). Der vorige Beweis bleibt völlig unverändert, nur in dem Endergebnis tritt *die* Veränderung ein, daß nun das konstante Verhältnis zwischen dem Quadrat der Ordinate rs und dem Rechteck $Mr \cdot rN$ aus den Abschnitten stattfindet, die ein *äußerer*

Teilpunkt in der Strecke MN bestimmt. Die Schnittkurve ist in diesem Falle eine aus den beiden Zweigen NsS und $Ms'S'$ bestehende *Hyperbel* mit der Hauptachse $MN = 2a$.

Führt man hier das entsprechende Koordinatensystem ein wie im zuvor betrachteten Falle, so ist $Nr = x$, $rs = y$, $Mr = 2a + x$; da ferner Mr und rN entgegengesetzte Richtung haben, ist das Verhältnis $\overline{rs}^2 : Mr \cdot rN$ nun negativ, etwa gleich $-\varkappa^2$, also $\overline{rs}^2 : Mr \cdot Nr = +\varkappa^2$, und man erhält

$y^2 = x(2a + x)\varkappa^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$. Vgl. Nr. 192.

Wenn drittens die Gerade MN zu einer der Seiten parallel ist (Fig. 47), so steht, wegen $AR = ar$ und $RB : rb = NR : Nr$, das mit dem Rechteck $ar \cdot rb$ gleiche Quadrat der Ordinate rs zu der Abszisse Nr in dem konstanten Verhältnis $\overline{RS}^2 : NR$ oder $AR \cdot RB : NR$. Demnach ist die Schnittkurve in diesem Falle eine *Parabel.*[138])

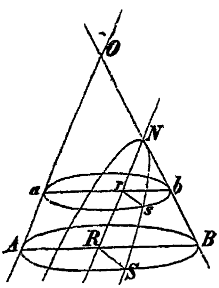


Fig. 47.

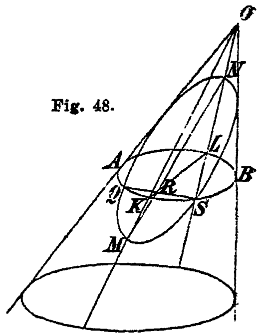
Setzt man das konstante Verhältnis $\overline{rs}^2 : Nr$ gleich $2p$, so ist bei demselben Koordinatensystem wie zuvor $rs = y$, $Nr = x$, man erhält $y^2 = 2px$. Vgl. Nr. 198.

Man erkennt die Parabel deutlich als den Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel, wenn man die Schnittebene sich etwa um die zu OB senkrechte Scheiteltangente drehen läßt. Die Lagen der Schnittebene für Hyperbel, Ellipse, Parabel können dadurch charakterisiert werden, daß die parallele Ebene durch die Spitze des Kegels diesen in reellen oder imaginären Geraden schneidet oder längs einer Seitenlinie berührt.

419. **Schnitte des schiefen Kreiskegels.** Die Ebene der Zeichnung sei durch die Spitze des Kegels O und den Mittelpunkt C des Basiskreises senkrecht zu dessen Ebene gelegt (Fig. 48); QS sei die Schnittlinie der Schnittebene mit der Ebene des Kreises $AQSB$. Ferner sei LK der die Sehne QS halbierende Durchmesser und MN die Gerade, die die durch ihn und die Kegelspitze gelegte Ebene mit der Schnittebene gemeinsam hat.

Nun entwickelt sich der Beweis ganz wie vorher: das Quadrat der Ordinate RS ist dem Rechteck $LR \cdot RK$ gleich, und wenn wir wieder eine zur Basis parallele Ebene einführen, so ist das Quadrat der ihr angehörigen Ordinate rs gleich dem entsprechenden Rechteck $lr \cdot rk$. Wir beweisen sodann aus den ähnlichen Dreiecken KRM, krM und LRN, lrN in der Ebene OLK, ebenso wie im Falle des geraden Kegels, daß das Verhältnis der Quadrate $\overline{RS}^2 : \overline{rs}^2$ dem Verhältnis der Rechtecke gleich ist, die aus den durch den Fußpunkt der Ordinate bestimmten Abschnitten von MN gebildet werden. Demnach ist die Schnittkurve ein Kegelschnitt, für den MN der die Sehne QS halbierende Durchmesser ist, und zwar eine Ellipse, wenn MN die Geraden OL und OK auf derselben Seite der Kegelspitze schneidet; eine Hyperbel, wenn diese Schnittpunkte auf verschiedenen Seiten der Spitze liegen, und eine Parabel, wenn einer derselben unendlich fern ist.

Fig. 48.



Die in dem Beweise gemachte Voraussetzung, daß der Basiskreis reelle Punkte mit der Schnittkurve gemein habe, ist in jedem Falle statthaft, weil jeder Kreis, den irgend eine der Basis parallele Ebene in der Kegelfläche bestimmt, als Basis betrachtet werden kann.

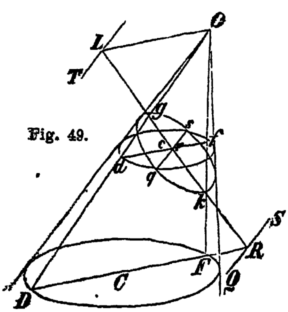
Außer diesen Kreisen gibt es aber *in jedem schiefen Kreiskegel eine zweite Reihe von untereinander parallelen Kreisschnitten.* Denken wir uns nämlich eine Schnittebene um die Normale der Zeichnungsebene in C gedreht, so kommt sie in eine zweite Lage, in der das zwischen OA, OB enthaltene Stück $A'B'$ ihrer Spur dieselbe Länge AB annimmt. Der von ihr dann ausgeschnittene Kegelschnitt hat zwei gleich lange zueinander rechtwinklige Durchmesser, ist somit ein Kreis, ebenso sind alle parallelen Querschnitte Kreise.

420. *Wenn ein Kreisschnitt des Kegels von einer Ebene in der Geraden QS geschnitten wird, so begegnen der zu QS*

konjugierte Durchmesser in diesem Querschnitt und im Kreise sich mit QS in demselben Punkte. Schneidet QS den Kreis reell, so ist der Satz einleuchtend und könnte auf den Fall ausgedehnt werden, wo QS nicht in reellen Punkten schneidet. Direkt wird bewiesen, daß der Durchmesser df, der die zu qs parallelen Sehnen eines beliebigen Kreisschnittes halbiert, einen Durchmesser DF zur Projektion hat, der die gleichgerichteten Sehnen eines parallelen Schnittes halbiert (Nr. 417). Der Ort der Mittelpunkte aller zu qs oder QS parallelen Sehnen des Kegels ist die Ebene Odf; der zu QS in irgend einem Schnitte konjugierte Durchmesser ist daher die Schnittlinie der Ebene Odf mit der Ebene dieses Schnittes und geht durch den Punkt R, in dem QS die Ebene Odf schneidet.

Wenn in demselben Falle die zu QR im Kreise und im andern Schnitte konjugierten Durchmesser in Teile RD, RF; Rg, Rk geschnitten werden (Fig. 49), *so verhalten sich die Rechtecke $DR \cdot RF$ und $gR \cdot Rk$ wie die Quadrate des zu QS parallelen und des konjugierten Durchmessers des Schnittes.*

Fig. 49.



Dies erkennt man sofort, wenn qs den Kreis in reellen Punkten trifft; denn alsdann ist $\overline{rs}^2 = dr \cdot rf$. Für den allgemeinen Fall ist aber bewiesen, daß die Geraden gk, df, Df in einer die Spitze des Kegels enthaltenden Ebene liegen; daher sind die Punkte d, D Projektionen von g und liegen mit g in einer durch die Spitze gehenden Geraden. Wie in Nr. 419 folgt daher aus ähnlichen Dreiecken $dr \cdot rf : DR \cdot RF = gr \cdot rk : gR \cdot Rk$; und weil $dr \cdot rf$ und $gr \cdot rk$ den Quadraten der parallelen Halbdurchmesser proportional sind, so stehen auch $DR \cdot RF$ und $gR \cdot Rk$ in demselben Verhältnis. Dieser Satz gestattet, für den Schnitt $gskq$ und die Gerade QS das Produkt $DR \cdot RF$ oder das Quadrat der durch R gehenden Tangente des Kreisschnittes zu bestimmen, dessen Ebene durch QS geht.

421. *Jeder Kegelschnitt kann in einen Kreis projiziert werden,* wie jede Kreisprojektion ein Kegelschnitt ist. Wir

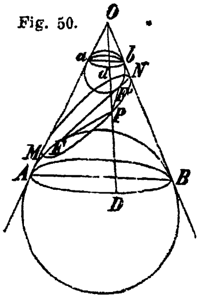
können dafür auch sagen: *Jeder Kegel zweiten Grades ist ein Kreiskegel.* Wenn man durch die Spitze des Kegels parallel zur Ebene des Basiskreises eine Ebene legt, die die Schnittebene $gskq$ in der Geraden TL schneidet, so folgt als ein besonderer Fall des Vorigen, daß $gL \cdot Lk : \overline{OL}^2$ gleich dem Verhältnis der Quadrate zweier bekannten Durchmesser des Schnittes ist. Somit ist es eine unbestimmte Aufgabe, zu einem gegebenen Kegelschnitt k und einer Geraden TL seiner Ebene die Spitze O eines Kegels, der k zur Leitkurve hat, so zu bestimmen, daß der von einer zu OTL parallelen Ebene in ihm bestimmte Schnitt ein Kreis sei. Denn wenn wir den zu der Geraden TL konjugierten Durchmesser der Schnittkurve ziehen, so ist die Entfernung OL des Punktes L von der Spitze des Kegels durch das Vorhergehende bestimmt; und OL ist in der Normalen aus O zu TL zu messen, weil OL dem zu TL rechtwinkligen Durchmesser eines Kreises parallel sein muß. Die Spitze O kann demnach in jedem Punkte eines gewissen um L in einer zu TL senkrechten Ebene beschriebenen Kreises genommen werden.

Ein Kegelschnitt kann immer in der Art in einen Kreis projiziert werden, daß eine in seiner Ebene beliebig gewählte Gerade TL, die ihn nicht schneidet, in unendliche Entfernung projiziert wird. Man hat dazu die Spitze O des projizierenden Kegels nur auf dem oben bestimmten Kreise zu wählen, und irgend eine der zur Ebene OTL parallelen Ebenen als Projektionsebene zu nehmen. Statt dessen kann man auch sagen: *Jeden Kegelschnitt kann man so in einen Kreis projizieren, daß der Mittelpunkt des Kreises die Projektion eines beliebigen Punktes im Innern des Kegelschnittes ist.* Denn wir haben nur die Polare jenes Punktes in unendliche Entfernung zu projizieren.

422. **Brennpunkte und Leitlinien** lassen sich sehr einfach an die Betrachtung der Schnitte des geraden Kegels anknüpfen.[139]) Man kann in jeden geraden Kegel zwei Kugeln so einschreiben (Fig. 50), daß sie zugleich die Schnittebene berühren: die Berührungspunkte sind die Brennpunkte F, F' der Schnittkurve, und jedem entspricht als Leitlinie der Schnitt-

kurve die Gerade, in der die Ebene des Berührungskreises der zugehörigen Kugel und des Kegels die Schnittebene trifft.

Fig. 50.



Denn wenn man einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve mit der Spitze des Kegels durch eine Gerade verbindet und die Schnittpunkte derselben mit den Ebenen der Berührungspunkte durch D, d bezeichnet, so hat man zwischen den Tangentenlängen der Kugeln die Beziehungen $PD = PF$, $Pd = PF'$, demnach für eine Ellipse $PF + PF' = Dd$, und diese konstante Länge stimmt mit der großen Achse MN der Schnittkurve überein. Für den hyperbolischen Schnitt befindet sich offenbar in jeder Kegelöffnung eine Berührungskugel auf derselben Seite der Ebene. Der Punkt R, in dem sich die Geraden FF' und AB bei genügender Verlängerung schneiden, ist ein Punkt der Polare des Brennpunktes F, weil die Polare von R in bezug auf den Kreis AFB zugleich ihm in bezug auf die Tangenten OA, OB harmonisch konjugiert ist.

Der Ort der Scheitel aller geraden Kreiskegel, aus denen eine gegebene Ellipse (Hyperbel, Parabel) geschnitten werden kann, ist eine Hyperbel (Ellipse, Parabel) in einer zur Schnittebene normalen Ebene, die die Brennpunkte der Ellipse (Hyperbel, Parabel) zu Scheiteln und ihre Scheitel zu Brennpunkten hat. Denn die Differenz von MO und NO ist konstant, da sie gleich $MF' - NF'$ ist*) usw.

*) Mit Hilfe dieses Prinzips können Eigenschaften der am Brennpunkte eines Kegelschnittes gespannten Winkel aus den Eigenschaften von Kugelkreisen abgeleitet werden. Man weiß z. B., daß für einen festen Punkt P in der Kugeloberfläche und einen beliebigen festen Kreis auf der Kugel die Beziehung $\operatorname{tg} \frac{1}{2} AP \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} BP =$ konst. besteht, wenn A und B die Schnittpunkte dieses Kreises mit einem durch den Punkt P gehenden größten Kreise der Kugel bezeichnen.

Nehmen wir nun einen Kegel, dessen Basis der erste Kreis und dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, und denken ihn durch eine beliebige Ebene geschnitten, so erhalten wir den Satz: Wenn man durch einen Punkt p in der Ebene eines Kegelschnittes eine Gerade zieht, die diesen in den Punkten a, b schneidet, so ist das Produkt

B. 1) Der Parameter p der Schnittkurve ist konstant, so lange der Abstand ihrer Ebene von der Kegelspitze derselbe bleibt, nämlich gleich dem Produkt aus dem Abstand in die Tangente des halben Öffnungswinkels.

2) Man kann aus gegebenem Zentrum jeden Punkt in der Ebene eines Kreises in einen Brennpunkt der Projektion desselben projizieren.

423. **Kontinuitätsprinzip.** *Kegelschnittbüschel können in Kreisbüschel projiziert werden*, zunächst alle solche, die nicht lauter reelle Schnittpunkte haben. Denn wenn wir einen der Kegelschnitte so in einen Kreis projizieren, daß eine seiner idealen Schnittsehnen mit dem andern in unendliche Entfernung projiziert wird (Nr. 420), so müssen die Projektionen der übrigen Kegelschnitte auch Kreise werden, weil sie mit dem ersten die unendlich fernen Punkte gemein haben. *Insbesondere können Doppelberührungsbüschel in Büschel konzentrischer Kreise projiziert werden.* Ist die Berührung imaginär, so projiziert man sie so in Kreise, daß die Berührungssehne in unendliche Entfernung fällt. (Nr. 259.)

Mit Hilfe solcher Projektionen gelangt man, sofern sie als reell vorausgesetzt werden, von jeder Eigenschaft eines Kreisbüschels zur entsprechenden Eigenschaft eines Kegelschnittbüschels, das zwei imaginäre Grundpunkte hat. Nachdem aber die Zentralprojektion als mit der Zentralkollineation identisch erkannt worden ist (Nr. 416), überträgt sich die Allgemeinheit der analytischen Methode auf die Ergebnisse der Methode der Projektionen. Zwar haben wir nur reelle Substitutionen wirklich untersucht, aber alle algebraischen Operationen und Projektionen *müssen* eintreten, sobald einem einzigen reellen Elemente ein einziges imaginäres entspricht; sie *können* aber so beschaffen sein, daß nur gewissen reellen Punkten wiederum reelle entsprechen.

---

der Tangenten von den Hälften der Winkel, die ap, bp an der Spitze des Kegels spannen, konstant. Da nun diese Eigenschaft für die Spitze jedes geraden Kegels gelten muß, aus dem der gedachte Kegelschnitt geschnitten werden kann, und da sein Brennpunkt ein Punkt in dem Orte dieser Spitzen ist, so erhält man für den Brennpunkt die Beziehung $\operatorname{tg}\frac{1}{2}afp \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}bfp = \text{konst.}$[140]) (Vgl. Nr. 194, 7.)

So wie die analytischen Prozesse, durch die die Eigenschaften der durch Gleichungen von der Form $f(x,y)-kLM=0$ oder $f(x,y)-kL^2=0$, usw. dargestellten Kurven erkannt werden, ungeändert bleiben, ob man voraussetzt, daß die Geraden $L=0$, $M=0$ den Kegelschnitt $f(x,y)=0$ in reellen oder imaginären Punkten schneiden, so ist es nach der erwähnten Identität gestattet, den durch Zentralprojektion gewonnenen Sätzen Allgemeinheit zuzuschreiben. Denn Eigenschaften von Kegelschnittbüscheln mit einer idealen Schnittsehne können unmöglich durch allgemeine Gleichungen ausgedrückt werden, ohne daß diese sie zugleich für Büschel mit reellen Grundpunkten beweisen. Dies zu übersehen ist mit Hilfe der Algebra meist leichter, als mit den Mitteln der reinen Geometrie. *In der Unabhängigkeit der algebraischen Prozesse von der Unterscheidung zwischen reellen und komplexen Größen beruht die Berechtigung des Prinzips der Kontinuität, nach dem Eigenschaften einer Figur, die bei der Realität gewisser in ihnen auftretender Elemente bewiesen sind, auf den Fall der Nichtrealität dieser Elemente ausgedehnt werden.*[141])

Es sind Beispiele für die Anwendung des Prinzips, wenn man den Satz von Nr. 220, 4 als eine allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte so ausspricht: Durch einen Punkt in der Peripherie eines Kegelschnittes und durch zwei beliebige Punkte seiner Ebene lassen sich immer drei Kegelschnitte legen, die mit dem gegebenen eine Berührung zweiter Ordnung haben, und die Berührungspunkte liegen mit den drei angenommenen Punkten in einem Kegelschnitt; oder, wenn der Satz von Nr. 116 zu dem Satze von Nr. 267 erweitert wird (vgl. Nr. 272); oder, wenn an Stelle eines mit einem Kegelschnitt verbundenen Punktes ein Kegelschnitt tritt, der mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist (vgl Nr. 193, 1; Nr. 297); oder an Stelle der Brennpunkte eines Kegelschnittes ein konfokaler Kegelschnitt (wie Nr. 229 gegen Nr. 187); oder, wenn wir die Erzeugung einer Kurve dritter Ordnung aus zwei projektiven involutorischen Büscheln mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl allgemein aussprechen, auf Grund von Nr. 300, 8; usw. (Vgl. besonders auch die Kap. XIX und XX.)

424. Kegelschnitts- und Kreiseigenschaften. Wir geben nun Beispiele zu der Art und Weise, wie Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises oder aus anderen besonderen Eigenschaften der Kegelschnitte zentralprojektiv abgeleitet werden können

B. 1) Jede durch einen festen Punkt gezogene Gerade wird von einem Kegelschnitt und von seiner in bezug auf diesen genommenen Polare harmonisch geteilt; die Tangenten in den Schnittpunkten schneiden sich auf der Polare.

Es reicht hin, zu bemerken, daß diese Eigenschaft ebenso wie ihre Reziproke projektive Eigenschaften sind, und daß sie für den Kreis Gültigkeit haben; infolgedessen sind sie notwendig für alle Kegelschnitte wahr. Alle Eigenschaften der Kreise, die von der Theorie der Pole und Polaren abhängen, gelten für Kegelschnitte überhaupt.

2) Die Eigenschaften der Punkte und Tangenten eines Kegelschnittes, die sich auf die Gleichheit von Doppelverhältnissen beziehen, sind projektiver Natur; sie gelten für alle Kegelschnitte, wenn sie für den Kreis bewiesen sind. Alle Eigenschaften des Kreises, die aus gleichen Doppelverhältnissen hervorgehen, sind gleichmäßig für alle Kegelschnitte wahr. Die Sätze von *Pascal* und *Brianchon* beispielsweise brauchen nur für den Kreis bewiesen zu werden, um allgemein gültig zu sein; die Pascalsche Gerade wird in unendliche Entfernung, der Brianchonsche Punkt als Mittelpunkt des Kreises projiziert, in den man den gegebenen Kegelschnitt überführt. Beide Sätze nehmen eine so elementare Gestalt an, daß sie des Beweises kaum noch bedürfen: Wenn in einem dem Kreise eingeschriebenen Sechseck zwei Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind, so sind es auch die dritten; wenn in einem dem Kreise umgeschriebenen Sechsseit zwei Paare von Gegenecken in je einem Durchmesser liegen, so ist dies auch für das dritte Paar der Fall.

3) Der Satz von *Carnot* (Nr. 314) ist eine projektive Eigenschaft und braucht nur für den Fall des Kreises bewiesen zu werden, in dem er deshalb sofort als richtig erkannt wird, weil $A_1B_2 \cdot A_1B_2' = A_1B_3 \cdot A_1B_3'$, usw. (Nr. 401.) Der Satz gilt ebenso und wird in derselben Art bewiesen für ein beliebiges Vieleck.

4) Umgekehrt können aus diesem *Carnotschen Satze* die Sätze von Nr. 150 leicht abgeleitet werden; denn wenn wir den Punkt A_3 in Gleichung (35) von Nr. 314 in unendlicher Entfernung voraussetzen, so ist

$$A_1B_2 \cdot A_1B_2' : A_1B_3 \cdot A_1B_3' = A_2B_1 \cdot A_2B_1' : A_2B_3 \cdot A_2B_3'$$

unter der Voraussetzung, daß die Gerade A_1B_2 zu A_2B_1 parallel ist.

5) In zwei konzentrischen Kreisen wird jede Sehne des einen, die den andern berührt, im Berührungspunkte halbiert. — In zwei Kegelschnitten, die eine doppelte Berührung miteinander haben, wird jede Sehne des einen, die den andern berührt, im Berührungspunkt und im Schnittpunkt mit der Berührungssehne harmonisch geteilt (Nr. 289, 7). Das Beispiel Nr. 226, 2 ist ein besonderer Fall dieses Satzes.

6) Wenn drei konzentrische Kreise gegeben sind, so wird jede Tangente des einen von den beiden andern in Punkten geschnitten, deren Doppelverhältnis konstant ist. — Wenn drei Kegelschnitte einander in den nämlichen beiden Punkten berühren, so wird jede Tangente des einen von den andern beiden in vier Punkten geschnitten, deren Doppelverhältnis konstant ist.

Der erste Satz ist wegen der Unveränderlichkeit der vier Abschnitte einleuchtend, der zweite kann als eine Erweiterung der projektiven Teilung der Tangenten eines Kegelschnittes betrachtet werden. In derselben Weise können die Sätze von Nr. 296 in bezug auf Doppelverhältnisse in Kegelschnitten, die sich doppelt berühren, unmittelbar bewiesen werden, indem man die Kegelschnitte als konzentrische Kreise projiziert.

7) Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist und zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen, so soll man die Hüllkurve der dritten Seite bestimmen. (Nr. 297, 4.)

Wenn wir die Verbindungsgerade der festen Punkte in unendliche Entfernung und zugleich den Kegelschnitt in einen Kreis projizieren, so verwandelt sich die Aufgabe in diese: Ein Dreieck ist einem Kreise eingeschrieben, und zwei seiner Seiten sind festen Geraden parallel; man soll die Hüllkurve der dritten Seite bestimmen. Diese Kurve ist ein konzentrischer Kreis, weil der Winkel an der Spitze des Dreiecks gegeben ist, und die Hüllkurve ist demnach im allgemeinen Fall ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung in den beiden Punkten hat, die in der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte liegen.

8) Die projektiven Eigenschaften des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks zu untersuchen (vgl. Nr. 414).

Nach den gegebenen allgemeinen Entwickelungen kann der Kegelschnitt in einen Kreis und zugleich das Viereck in ein Rechteck projiziert werden. Für ein in einen Kreis eingeschriebenes Rechteck ist der eine Diagonalpunkt im Mittelpunkt des Kreises; demnach ist der eine Diagonalpunkt des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks der Pol der Geraden, die die beiden andern verbindet. Für das dem Kreis eingeschriebene Rechteck liefern die in seinen Eckpunkten an den Kreis gelegten Tangenten einen Rhombus, dessen Diagonalen mit den Diagonalen des Rechtecks zusammen-

fallen. Zwei von diesen zusammengefallenen Diagonalen liegen im Endlichen, das dritte Paar ist im Unendlichen. Infolgedessen fallen allgemein die Diagonalen des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks und des entsprechenden umgeschriebenen Vierseits zusammen. (Vgl. Nr. 414 Schluß, Nr. 66 und 276, 5.)

9) Wenn vier Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort seines Mittelpunktes ein Kegelschnitt, der durch die Mittelpunkte der Seiten des gegebenen Vierecks hindurchgeht. — Wenn vier Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort des Pols einer festen Geraden ein Kegelschnitt, der zu den Endpunkten jeder Seite und dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit derselben in ihr den vierten harmonischen Punkt bestimmt. (Vgl. Nr. 365.)

10) Der Ort der Punkte, in denen alle parallelen Sehnen eines Kreises in einem gegebenen Verhältnis geteilt werden, ist eine Ellipse, die mit dem Kreise eine doppelte Berührung hat. (Nr. 158.) Wenn man durch einen festen Punkt O eine Gerade zieht, die mit einem festen Kegelschnitt die Punkte A, B gemein hat, und in ihr einen Punkt P so wählt, daß das Doppelverhältnis der vier Punkte O, A, B, P unveränderlich ist, so ist der Ort des Punktes P ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

425. Mit Hilfe der allgemeinen Definition der Brennpunkte (Nr. 181) können Eigenschaften derselben projizierend auf ihren allgemeinen Ausdruck gebracht werden. Hier ist aber stets eine imaginäre Projektion oder, statt derselben, nach einer reellen Projektion das Kontinuitätsprinzip von Nr. 423 in Anwendung zu bringen.

B. 1) Wenn ein Kreis zwei gegebene Kreise stets berührt, so ist der Ort seines Mittelpunktes ein Kegelschnitt, der die Mittelpunkte der gegebenen Kreise zu Brennpunkten hat (Nr. 195). — Wenn ein Kegelschnitt durch zwei feste Punkte A, B geht und zwei feste Kegelschnitte stets berührt, die auch durch A und B gehen, so ist der Ort des Pols der Geraden AB ein Kegelschnitt. Dieser ist dem Vierseit eingeschrieben, das von den Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte A, B mit den in bezug auf die beiden gegebenen Kegelschnitte genommenen Polen der Geraden AB gebildet wird.

Hier kommen gleichzeitig die folgenden verschiedenen Prinzipien zur Anwendung: daß alle Kreise durch zwei feste Punkte in unendlicher Entfernung gehen; daß der Mittelpunkt der Pol der Verbindungslinie dieser festen Punkte ist; daß der Brennpunkt als der Schnittpunkt der von ihnen ausgehenden Tangenten der Kurve betrachtet werden muß; und daß wir zur Ausdehnung unserer Schlüsse von imaginären auf reelle Punkte berechtigt sind.

2) Wenn von einem Kegelschnitt ein Brennpunkt und zwei Punkte der Peripherie gegeben sind, so liegt der Schnittpunkt der in diesen Punkten an ihn gezogenen Tangenten in einer festen Geraden (Nr. 190). — Wenn zwei Tangenten und zwei Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so liegt der Schnittpunkt der in diesen Punkten an ihn zu ziehenden Tangenten in einer festen Geraden.

3) Wenn ein Brennpunkt und zwei Tangenten eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort seines andern Brennpunktes eine Gerade. (Nach Nr. 188.) — Wenn vier Tangenten und in zweien derselben je ein fester Punkt (A bez. B) gegeben sind, so ist der Ort des Schnittpunktes der Tangenten, die man von A und B an die einzelnen dem Tangentenvierseit eingeschriebenen Kegelschnitte legen kann, eine Gerade.

Denn jeder der zwei unendlich fernen Kreispunkte liegt in einer der vom ersten Brennpunkt ausgehenden Tangenten, und die von diesen Kreispunkten ausgehenden beiden andern Tangenten des Kegelschnittes schneiden sich im andern Brennpunkte.

4) Wenn drei Tangenten einer Parabel gegeben sind, so geht der ihrem Dreieck umgeschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Kurve (Nr. 212). — Die Ecken zweier Dreiecke, die einem und demselben Kegelschnitt umgeschrieben sind, liegen wieder auf einem Kegelschnitt. (Nr. 287, 7 und 299, 2.)

Denn der Brennpunkt bestimmt, zusammen mit den beiden imaginären Kreispunkten, ein zweites der Parabel umgeschriebenes Dreieck.

5) Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch einen festen Punkt gehen und eine feste Gerade berühren, ist eine Parabel, die den festen Punkt zum Brennpunkt hat. — Wenn eine Tangente und drei Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort des Schnittpunktes der Tangenten in irgend zweien dieser Punkte ein Kegelschnitt, der dem durch die drei Punkte bestimmten Dreieck eingeschrieben ist.

6) Der Ort des Mittelpunktes aller einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ist die Gerade, die die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierseits verbindet. — Wenn vier Tangenten eines Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Ort des Pols einer Geraden g die Verbindungsgerade der vierten harmonischen Punkte, die man auf jeder Diagonale des Vierseits zu ihren Endpunkten und zu ihrem Schnittpunkte mit g konstruieren kann.

7) Aus unserer Definition der Brennpunkte ergibt sich, daß ein gemeinschaftlicher Brennpunkt zweier Kegelschnitte als der Schnittpunkt gemeinschaftlicher Tangenten derselben angesehen werden muß und demnach die in Nr. 267 entwickelten Eigenschaften eines solchen hat. Wenn zwei Kegelschnitte einen Brennpunkt und

die zugehörige Leitlinie gemeinschaftlich haben, so müssen sie als solche Kegelschnitte betrachtet werden, die eine doppelte Berührung miteinander haben, und können daher als konzentrische Kreise projiziert werden.

8) Auch über die Beziehungen *zweier* Kegelschnitte führt die Methode der Projektion mit großer Leichtigkeit zu einer Fülle von Sätzen allgemeiner Natur. Wir projizieren beide Kegelschnitte so, daß eine Seite ihres gemeinsamen Polardreiecks im Bilde unendlich fern ist, beide also konzentrisch werden. Sie haben dann im allgemeinen ein reelles gemeinschaftliches Paar konjugierter Durchmesser — nur dann nicht, wenn sie Hyperbeln sind, deren Asymptotenpaare sich trennen — und vier reelle gemeinsame Punkte oder Tangenten, wenn sie *einen* solchen Punkt oder *eine* solche Tangente haben. Wir nehmen an, daß dies der Fall sei, und nennen a, b, c, d die gemeinsamen Tangenten mit den Berührungspunkten A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; D_1, D_2 bez. am ersten und zweiten Kegelschnitt; ferner E, F, G, H die gemeinsamen Punkte, und e_1, e_2; f_1, f_2; g_1, g_2; h_1, h_2 die in ihnen an den ersten und zweiten Kegelschnitt gehenden Tangenten. Alle erwähnten Punkte liegen in Paaren auf einerlei Durchmesser A_1C_1, EG, A_2C_2, B_2D_2, FH, B_1D_1 und in Parallelen zu den gemeinsamen konjugierten Durchmessern A_2B_2, EF, A_1B_1, C_1D_1, GH, C_2D_2; A_1D_1, EH, A_2D_2, B_2C_2, FG, B_1C_1; die Geraden sind in Paaren parallel a, c; b, d; e_1, g_1; usw., oder sie schneiden sich in jenen Durchmessern. (Nr. 362, 6.) Nach diesen Beziehungen sind die Sätze von Nr. 355 f. über die Kegelschnitte H und k einleuchtend, zugleich aber noch eine Menge anderer.

Die vier gemeinschaftlichen Punkte liegen mit jedem Gegeneckenpaar des umgeschriebenen Vierseits in einem Kegelschnitt; z. B. E, F, G, H, ab, cd. Die Geraden A_1E, B_1F, C_1G, D_1H berühren einen Kegelschnitt in A_1, B_1, C_1, D_1 bez. Die Punkte A_1, B_1, A_2, B_2, E, F und C_1, D_1, C_2, D_2, E, F liegen je in einem Kegelschnitt, und diese beiden Kegelschnitte berühren sich in E und F. Das erste geschieht zwölfmal in der Figur, nämlich folgender Tabelle entsprechend, nach deren erster Gruppe außer den vorangeführten auch $A_1B_1A_2B_2GH$, $C_1D_1C_2D_2GH$ doppelt berührende Kegelschnitte sind:

$$\left|\begin{matrix} A_1B_1A_2B_2 & EF \\ C_1D_1C_2D_2 & GH \end{matrix}\right|; \quad \left|\begin{matrix} A_1C_1A_2C_2 & EG \\ B_1D_1B_2D_2 & FH \end{matrix}\right|; \quad \left|\begin{matrix} A_1D_1A_2D_2 & EH \\ B_1C_1B_2C_2 & FG \end{matrix}\right|.$$

Die dual entsprechenden Sätze bildet man leicht.[142])

426. **Metrik der Projektion.** Strecken oder Winkel, die in der gegebenen Figur von gleicher Größe sind, sind in einer

Zentralprojektion im allgemeinen von verschiedener Größe. Daher sind die Gesetze zu untersuchen, nach denen metrische Eigenschaften verallgemeinert werden können. Nach Nr. 415 muß erwartet werden, daß diese Gesetze mit den Ergebnissen der Theorie der Distanz in Nr. 374ff. zusammenfallen.

Zunächst ist die Projektion einer Strecke mit ihrem Halbierungspunkt H eine Strecke, die durch die Projektion von H und den Fluchtpunkt der Geraden harmonisch geteilt wird. Hiernach kann man im Bilde eine Skala konstruieren. Ferner bilden die Richtungen von zwei zueinander rechtwinkligen Geraden mit den imaginären absoluten Richtungen ein harmonisches Büschel. Wenn also vier harmonische Punkte A, B, C, D einer Geraden durch eine reelle oder imaginäre Projektion so projiziert werden, daß die Punkte A und C, die wir als reell oder als imaginär denken dürfen, mit den zwei imaginären unendlich fernen Kreispunkten zusammenfallen, so projizieren sich gleichzeitig beliebige durch die Punkte B und D gehende Geraden als die Schenkel eines rechten Winkels. Und umgekehrt: *Wenn zwei Geraden zueinander rechtwinklig sind, so werden sie als Geraden projiziert, die die Verbindungslinie derjenigen beiden festen Punkte harmonisch teilen, die als die Projektionen der unendlich fernen imaginären Kreispunkte erscheinen.*

Die Projektion eines Geradenpaares mit seinen Winkelhalbierenden ist daher ein Geradenpaar und das harmonische Paar, das dasselbe mit den Projektionen der Strahlen der absoluten Richtungen gemeinsam hat. Hiernach kann in der Projektion eine Winkelskala konstruiert werden. *Nehmen wir die Projektionen der unendlich fernen imaginären Kreispunkte als die absoluten Elemente der Metrik, nach der wir die projizierten Gebilde messen, so übertragen sich alle metrischen Größen unverändert; nicht aber im allgemeinen, wenn wir dieselbe Messung im Original und Bild anwenden.* Man erhält durch Projektion nicht die allgemeinste Metrik, sondern nur die der parabolischen Geometrie (Nr. 385).

B. 1) Die Tangente eines Kreises ist rechtwinklig zum Radius des Berührungspunktes. — Jede Sehne eines Kegelschnittes wird

durch eine Tangente desselben und durch die Verbindungsgerade ihres Berührungspunktes mit dem Pol der gegebenen Sehne harmonisch geteilt.

Denn sobald wir die Sehne des Kegelschnittes als in die unendlich ferne Gerade der Ebene eines Kreises projiziert voraussetzen, erscheinen die Punkte, in denen dieselbe den Kegelschnitt schneidet, als die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und der Pol der Sehne als der Mittelpunkt des Kreises.

2) Jede durch den Brennpunkt eines Kegelschnittes gehende Gerade ist rechtwinklig zu der Verbindungsgeraden ihres Pols mit dem Brennpunkte. (Nr. 190.) — Jede Gerade durch einen festen Punkt P bildet mit den beiden von P ausgehenden Tangenten eines Kegelschnittes und der Verbindungslinie von P mit dem in bezug auf die Kurve genommenen Pol der Geraden ein harmonisches Büschel.

Denn die vom Brennpunkt ausgehenden Tangenten des Kegelschnittes sind die Verbindungsgeraden des Brennpunktes mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten.

3) Nach Nr. 425, 6 können wir den Ort des Pols einer Geraden in bezug auf ein System konfokaler Kegelschnitte bestimmen; denn die Brennpunkte bestimmen, heißt ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Vierseit angeben, das die Verbindungsgerade der Brennpunkte zu einer Diagonale hat. Infolgedessen ist der vierte harmonische Punkt zu dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit der zwischen den Brennpunkten enthaltenen Strecke ein Punkt des gesuchten Ortes. Die andere Diagonale liegt auf der unendlich fernen Geraden, und ihre Endpunkte sind die imaginären Kreispunkte; demnach ist der gesuchte Ort zur gegebenen Geraden rechtwinklig und somit vollkommen bestimmt.

4) Zwei konfokale Kegelschnitte schneiden einander unter rechten Winkeln. — Wenn zwei Kegelschnitte demselben Vierseit eingeschrieben sind, so teilen die beiden in jedem ihrer Schnittpunkte zu ziehenden Tangenten derselben jede Diagonale des Vierseits harmonisch.

Wir bemerken, daß der letzte Satz ein Fall von dem reziproken Satze zu Nr. 289, 4 ist.

5) Der Ort des Schnittpunktes rechtwinkliger Tangentenpaare eines Kegelschnittes, der einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt M hat, ist ein Kreis mit demselben Mittelpunkt. — Wenn man von zwei Punkten B, D, die eine gegebene Strecke AC harmonisch teilen, Tangenten an einen Kegelschnitt k konstruiert, so ist der Ort ihres Schnittpunktes ein durch die Punkte A, C gehender Kegelschnitt k', und die Pole der Geraden AC in bezug auf k und k' fallen zusammen.

Der Satz kann auch so ausgesprochen werden: Der Ort eines

Punktes O, für den seine Verbindungsgerade mit dem Pol der festen Geraden AO durch den festen Punkt C geht, ist ein durch die Punkte A und C gehender Kegelschnitt. Die Richtigkeit dieses Satzes ist daraus ersichtlich, daß wir das Doppelverhältnis des von vier beliebigen Lagen der Geraden CO gebildeten Büschels als mit dem des Büschels übereinstimmend erkennen, das die vier entsprechenden Lagen von AO bilden. (Nr. 322, 1.)

6) Der Ort des Schnittpunktes der Tangenten einer Parabel, die einander rechtwinklig schneiden, ist die Leitlinie. — Wenn in dem allgemeinen Satze 5) die Gerade AC den gegebenen Kegelschnitt berührt, wird der Ort des Punktes O die Gerade, die die Berührungspunkte der von A und C ausgehenden Tangenten des Kegelschnittes verbindet.

7) Der Kreis, der einem in bezug auf eine gleichseitige Hyperbel sich selbst konjugierten Dreieck umgeschrieben ist, geht durch den Mittelpunkt der Kurve. (Nr. 165, 3.) — Wenn zwei Dreiecke in bezug auf denselben Kegelschnitt sich selbst konjugiert sind, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einem Kegelschnitt. (Nr. 299, 2 und 348, 3.)

Die Schnittpunkte der gleichseitigen Hyperbel mit der unendlich fernen Geraden sind der Kurve in bezug auf die imaginären Kreispunkte harmonisch konjugiert; das von ihnen mit dem Mittelpunkt gebildete Dreieck ist also ein Polardreieck der Kurve. Durch Reziprozität ergibt sich, daß die Seiten von zwei in bezug auf einen Kegelschnitt sich selbst konjugierten Dreiecken einen Kegelschnitt berühren.

8) Werden durch einen beliebigen Punkt eines Kegelschnittes zwei Geraden rechtwinklig zueinander gezogen, so geht die Sehne, die ihre Endpunkte in der Kurve verbindet, stets durch einen festen Punkt. (Nr. 193, 1.) — Wird durch einen beliebigen Punkt eines Kegelschnittes ein harmonisches Büschel gelegt, in dem zwei Strahlen unveränderlich sind, so geht die die Endpunkte der jedesmaligen beiden anderen Strahlen verbindende Sehne stets durch einen festen Punkt.

Dasselbe Ergebnis lautet, anders ausgedrückt: Wenn zwei Punkte a, c eines Kegelschnittes gegeben sind, und $(abcd)$ eine harmonische Gruppe ist, so geht die Gerade bd stets durch einen festen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt der in a und c an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten. Denn die Tangente des Kegelschnittes im Punkte a muß die Gerade bd in dem vierten harmonischen Punkte zu dem Punkte K schneiden, den ac mit ihr gemeinsam hat, weil $(a \cdot abcd)$ ein harmonisches Büschel ist; und das nämliche gilt von der Tangente in c, so daß beide Tangenten bd in demselben Punkte schneiden müssen. Als ein besonderer Fall dieses

Satzes erscheint der folgende: Wenn durch einen festen Punkt eines Kegelschnittes zwei Geraden so gezogen werden, daß sie mit einer festen Geraden gleiche Winkel bilden, so geht die Sehne, die ihre Endpunkte verbindet, durch einen festen Punkt.

427. Zwei Strahlen, die einen konstanten Winkel einschließen, bilden mit den Strahlen absoluter Richtung aus ihrem Schnittpunkt ein konstantes Doppelverhältnis (Nr. 378). Daher beschreiben die Schnittpunkte der beiden Schenkel eines sich in seiner Ebene um seinen Scheitel S drehenden konstanten Winkels auf einer beliebigen Geraden g der Ebene projektive Punktreihen, deren imaginäre Doppelpunkte aus g durch die Verbindungslinien von S mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten ausgeschnitten werden.

B. 1) Der in demselben Segment eines Kreises über derselben Sehne stehende Peripheriewinkel ist konstant. Dieser Satz ist, wie der gegenwärtige Artikel lehrt, die von der Doppelverhältnisgleichheit von vier Punkten eines Kreises angenommene Form für den Fall, wo zwei dieser Punkte in unendlicher Entfernung sind. (Nr. 280 und 424, 2.)

2) Die Hüllkurve derjenigen Sehnen eines Kegelschnittes, die am Brennpunkt einen konstanten Winkel spannen, ist ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen den Brennpunkt und die Leitlinie gemein hat. (Nr. 300, 3.) — Wenn die von dem Punkte O gezogenen Tangenten mit dem Kegelschnitt die Punkte T, T' gemein haben, und zwei Punkte A und B auf der Kurve so gewählt werden, daß das Doppelverhältnis $(O \cdot ATBT')$ konstant ist, so ist die Hüllkurve der Sehne AB ein Kegelschnitt, der den gegebenen in den Punkten T, T' berührt.

3) Der Ort des Schnittpunktes derjenigen Tangenten einer Parabel, die einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist eine Hyperbel, die mit der Parabel den Brennpunkt und die Leitlinie gemein hat. — Wenn eine begrenzte Gerade AB, die einen Kegelschnitt in C berührt, von zwei Tangenten desselben nach konstantem Doppelverhältnis geteilt wird, so ist der Ort ihres Schnittpunktes ein Kegelschnitt, der den gegebenen in den von C verschiedenen Berührungspunkten der von A, B ausgehenden Tangenten berührt.

4) Wenn durch den Brennpunkt eines Kegelschnittes Geraden gezogen werden, die mit den Tangenten der Kurve einen gegebenen Winkel einschließen, so ist der Ort des Schnittpunktes der Geraden und der zugehörigen Tangente ein Kreis. — Wenn eine veränder-

liche Tangente eines Kegelschnittes zwei feste Tangenten in T, T' und eine feste Gerade in M schneidet, und ein Punkt P in ihr so bestimmt wird, daß das Doppelverhältnis $(PTMT')$ konstant ist, so ist der Ort des Punktes P ein Kegelschnitt, der durch die Punkte geht, in denen die festen Tangenten die feste Gerade schneiden. (Nr. 292, 4.)

5) Ein Sonderfall von 4) ist: Der Ort des Punktes, in dem der von zwei festen Tangenten eines Kegelschnittes in einer veränderlichen Tangente desselben bestimmte Abschnitt in einem gegebenen Verhältnis geteilt wird, ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den festen Tangenten parallel sind.

6) Wenn von einem festen Punkt O die Gerade gezogen wird, die einen gegebenen Kreis im Punkte P schneidet, und an sie der konstante Winkel TPO angetragen wird, so ist die Hüllkurve des neuen Schenkels TP bei veränderlichem P ein Kegelschnitt, der den Punkt O zum Brennpunkt hat. — Wenn das Doppelverhältnis eines Büschels, von dem drei Strahlen durch feste Punkte gehen, gegeben ist, und der Scheitel desselben sich auf einem durch zwei dieser Punkte gehenden gegebenen Kegelschnitt bewegt, so umhüllt der vierte Strahl desselben einen Kegelschnitt, der die Verbindungsgeraden dieser zwei Punkte mit dem dritten festen Punkt berührt.

7) Ein Sonderfall von 6) ist: Wenn zwei feste Punkte A und B eines Kegelschnittes mit einem veränderlichen Punkte P desselben durch Geraden verbunden werden, und der von den Verbindungslinien in einer festen Geraden bestimmte Abschnitt in dem Punkte M in einem gegebenen Verhältnis geteilt wird, so ist die Hüllkurve der Geraden PM ein Kegelschnitt, der die durch A und B gezogenen Parallelen zu der festen Geraden berührt.

8) Wenn man an die um den festen Punkt O sich drehende Gerade OP in ihrem Schnittpunkt P mit einer festen Geraden den konstanten Winkel TPO anträgt, so ist die Hüllkurve seines neuen Schenkels PT eine Parabel, die den Punkt O zum Brennpunkt hat. — Wenn das Doppelverhältnis eines Büschels, von dem drei Strahlen durch feste Punkte gehen, gegeben ist, und sein Scheitel sich längs einer festen Geraden bewegt, so ist die Hüllkurve des vierten Strahles ein Kegelschnitt, der die drei Seiten des von den gegebenen Punkten gebildeten Dreiecks berührt.

9) Die von einem beliebigen Punkte an die Kurven eines Systems konfokaler Kegelschnitte gezogenen Tangenten bilden mit zwei festen Geraden gleiche Winkel. (Nr. 229.) — Die Tangenten, die von einem beliebigen Punkte an die einem gegebenen Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte gezogen werden, schneiden jede Diagonale des Vierseits in einer Involution, der die Endpunkte der Diagonale als ein Paar konjugierter Punkte angehören. (Nr. 289.)

428. **Parallelprojektion.** Wenn das Projektionszentrum in unendliche Entfernung rückt, so gehen die Strahlen des projizierenden Bündels in parallele Strahlen über, deren Lage gegenüber der Bildebene angegeben werden muß. Legt man durch alle Punkte der Begrenzung einer Figur Strahlen *derselben* Richtung, so bilden sie einen projizierenden Zylinder und jeder Querschnitt desselben heißt eine *Parallelprojektion* der Figur.

Die gebräuchlichste Projektionsrichtung ist die zur Bildebene rechtwinklige. Die Fußpunkte der von den Punkten der Begrenzung einer Figur gefällten Lote bilden die *Orthogonalprojektion* der Figur. Die entsprechenden ebenen Figuren haben nicht nur unveränderten projektiven Charakter, sondern auch gewisse metrische einfache Beziehungen.

Parallele Strahlen haben zur Parallelprojektion wieder parallele Strahlen. Die gegebene Strecke und ihre Projektion sind den Seiten eines Dreiecks gleich, dessen Winkel nur durch die Neigungen der Strecke und der Projektionsrichtung gegen die Bildebene bestimmt sind. *Parallele Strecken stehen zu ihren Parallelprojektionen in konstantem Verhältnis.* Insbesondere ist die Orthogonalprojektion einer Strecke das Produkt der Länge der Strecke in den Kosinus des von der Projektion und der Strecke eingeschlossenen Winkels. Wie die in der Bildebene selbst liegenden Strecken nicht geändert werden, *so ist die Projektion jeder zur Bildebene parallelen Strecke ihr gleich.*

Der Flächeninhalt einer begrenzten ebenen Figur steht zu dem Inhalt ihrer Parallelprojektion in einem konstanten Verhältnis. Setzen wir die Ordinaten der Figur und ihrer Projektion rechtwinklig zur Schnittlinie ihrer Ebenen voraus, so setzen sich beide Flächen aus Parallelstreifen von je gleicher Breite zusammen, deren Höhen in einem konstanten Verhältnis stehen, das nur von der Neigung der Ebene und der Projektionsrichtung abhängt. Nach der Methode des XIII. Kapitels (Nr. 236) folgt die gleiche Proportionalität der ganzen Flächen. Die Fläche der Orthogonalprojektion ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Originalfläche und dem Kosinus des Winkels der beiden in Betracht kommenden Ebenen.

Bringt man die ebenen Figuren durch Drehung der einen um die Schnittlinie ihrer Ebenen in dieselbe Ebene (Nr. 416), so erhält man den besonderen Fall der zentrischen Lage kollinearer Systeme, bei dem das Kollineationszentrum unendlich fern ist. Man hat alsdann die als *Affinität* bezeichnete Verwandtschaft ebener Figuren. Die Affinität zwischen der Umlegung des Originals und der Orthogonalprojektion wird man selbst orthogonal nennen, weil die Affinitätsrichtung zur Kollineationsachse rechtwinklig ist.

Diese Affinität geht in schiefe bez. orthogonale *Symmetrie* zur Achse über, wenn die Richtung der projizierenden Strahlen der Halbierungsebene des Drehungswinkels zwischen beiden Ebenen angehört. Gehört die Richtung dagegen der Halbierungsebene des Nebenwinkels an, so wird die Affinitätsrichtung mit der Achsenrichtung identisch, und man erhält *flächengleiche* Systeme.

Jede Ellipse kann orthogonal in einen Kreis projiziert werden. Wir wählen die Projektionsebene so, daß ihre Schnittlinie mit der Ebene der gegebenen Ellipse der kleinen Achse der Kurve parallel ist und zugleich so, daß der Kosinus des von den beiden Ebenen eingeschlossenen Winkels dem Verhältnis $b:a$ der kleinen zur großen Achse gleich ist. Alsdann bleiben alle zur kleinen Achse parallelen Sehnen der Ellipse unverändert in der Projektion, während alle der großen Achse parallelen Sehnen in dem Verhältnis $b:a$ verkürzt werden; folglich wird die Projektion ein Kreis vom Radius b. (Nr. 158.) Die rechtwinkligen Durchmesserpaare des Kreises liefern die konjugierten der Ellipse. (Nr. 169.) Dabei kann ein Brennpunkt an eine beliebige Stelle des Kreisinnern projiziert werden.

Da bei Parallelprojektionen keine im Endlichen gelegenen Geraden in die unendlich ferne projiziert werden, sind alle Querschnitte eines Kreiszylinders Ellipsen (oder zwei Mantellinien usw.). *Durch Parallelprojektion wird die Gattung des Kegelschnittes nicht geändert.* Auch entsprechen sich in Original und Bild die Mittelpunkte.

B. 1) Untersuchung des Ausdrucks in Nr. 169, 6 für den Radius des Kreises, der einem in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck umgeschrieben ist.[143])

Bekanntlich gilt die Beziehung $4FR = l_1 l_2 l_3$, wenn R diesen Radius, F den Flächeninhalt des Dreiecks, l_1, l_2, l_3 die Seitenlängen desselben bezeichnen. Projizieren wir dann die Ellipse in einen Kreis vom Radius b, so gilt, weil dieser Kreis als der umgeschriebene Kreis des projizierten Dreiecks erscheint, die Beziehung $4F'b = l_1' l_2' l_3'$. Wenn wir nun die den Seiten dieses Dreiecks parallelen Halbmesser der Ellipse durch b', b'', b''' bezeichnen, so gelten die Proportionen $l_1' : l_1 = b : b'$, $l_2' : l_2 = b : b''$, $l_3' : l_3 = b : b'''$. Ferner steht F' zum Inhalt πb^2 des Kreises vom Radius b in demselben Verhältnis wie F zum Inhalt πab der Ellipse von den Halbachsen a und b; demnach ist $F' : F = b : a$. Alles dies gibt die Beziehung

$$b : R = \frac{l_1' l_2' l_3'}{2F'} : \frac{l_1 l_2 l_3}{2F} = ab^2 : b'b''b''', \quad \text{oder} \quad R = \frac{b'b''b'''}{ab}.$$

2) Gute weitere Beispiele liefern die Probleme von der kleinsten einem Dreieck umgeschriebenen und der größten ihm eingeschriebenen Ellipse, usw. Jene geht in den umgeschriebenen Kreis über für ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecktangenten zu den Gegenseiten parallel sind; und dies letzte gilt auch für die Projektion.

3) Man schreibe einer Ellipse ein konvexes n-Eck $P_1 P_2 P_3 \ldots$ ein, dessen Seiten am Brennpunkt F gleiche Winkel $P_1 F P_2 = P_2 F P_3 = \ldots$ spannen, und projiziere die Ellipse orthogonal in einen Kreis. Die Projektion $P_1' P_2' P_3' \ldots$ des n-Ecks heißt *ein harmonisches Kreisvieleck in bezug auf den Punkt* F, d. h. ein solches, dessen Seiten ihren Abständen von dem festen Punkt F' proportional sind.

Denn ziehen wir in P_1, P_3 die Tangenten $P_1 T$, $P_3 T$ an die Ellipse, so ist $P_1' T' = P_3' T'$, also verhalten sich die Abstände der Seiten $P_1' P_2'$, $P_3' P_2'$ von T' wie $\sin T' P_1' P_2' : \sin T' P_3' P_2' = \sin P_1' P_3' P_2' : \sin P_3' P_1' P_2' = P_1' P_2' : P_3' P_2'$, aber auch wie die analogen Abstände von F', weil $F' P_2' T'$ ebenso wie $F P_2 T$ in einer Geraden liegen (Nr. 190).

4) Jedem harmonischen Kreisvieleck kann eine Ellipse eingeschrieben werden. Denn auf der in 3) benutzten Ellipse erzeugen die Schenkel eines sich um F drehenden konstanten Winkels projektive Reihen von Schnittpunkten $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $P_2 P_3 P_4 \ldots$. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte, d. h. die Seiten des Vielecks umhüllen einen doppeltberührenden Kegelschnitt (Nr. 297). Die Berührungspunkte liegen auf den Strahlen absoluter Richtung von F, also hat der Kegelschnitt mit dem ersten den Brennpunkt F und die Leitlinie gemeinsam.

429. **Orthogonalsystem im Bündel.** Auch die geometrische Verwandtschaft der Polarreziprozität läßt sich in fruchtbarer Weise mit dem Prozeß der Projektion durch geradlinige Strahlen aus einem Zentrum O auf eine Ebene verbinden in dem besonderen Falle, wo die Leitkurve ein Kegelschnitt von der Gleichungsform $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, d. h. ein um den Anfangspunkt O der Koordinaten mit dem Radius i beschriebener Kreis ist. Es ist dies der wichtige Fall, wo die polarreziproken Gleichungen identisch sind, aber dual gedeutet werden (Nr. 395). Die Gleichung der Polare des Punktes $x' \mid y'$ oder P ist alsdann, mit $z = z' = 1$, $xx' + yy' + 1 = 0$; man konstruiert sie wie folgt: Man bildet aus dem Radiusvektor PO des Pols und der Einheit z als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck $PO(O_1)$ und schneidet PO durch das im Endpunkt (O_1) von $(O_1)P$ auf der Hypotenuse $(O_1)P$ errichtete Lot; die im Schnittpunkt Q auf dem Radiusvektor errichtete Normale p ist die Polare von P.

Dies Verfahren ist einer einfachen stereometrischen Veranschaulichung fähig. Denken wir uns das Dreieck $P(O_1)Q$ um PQ aufgerichtet, bis $O(O_1)$ auf der Bildebene senkrecht ist, so ist die durch p und O_1 gelegte Ebene rechtwinklig zur Geraden O_1P. *Wird also in der Entfernung Eins vom Zentrum der Reziprozität auf der Normale ihrer Ebene ein Projektionszentrum angenommen, so sind der Sehstrahl O_1P eines Pols und die projizierende Ebene O_1p seiner Polare zu einander rechtwinklig.*[144])

Ordnet man nun *in einem Bündel O den Strahlen ihre Normalebenen als entsprechend* zu, so nennt man die Gesamtheit solcher Elementenpaare ein *Orthogonalsystem.*[145]) Deuten wir aber die Koordinaten $x \mid y \mid z$ im Bündel, so stellt $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ einen imaginären Kegel dar, in bezug auf den der Strahl O_1P und die Ebene O_1p als polarkonjugierte Elemente zusammengehören, wie der Punkt P und die Gerade p in bezug auf den Querschnitt des Kegels mit der Bildebene. Das Orthogonalsystem ist also eine Polarreziprozität mit dem Kegel als Leitkegel.

Endlich aber kann dieser Kegel auch als die um O als

Mittelpunkt beschriebene *Kugel vom Radius Null* bezeichnet werden. In der Tat liegt in der durch OO_1 gelegten Ebene ein Mantellinienpaar des Kegels, das nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten dieser Ebene geht, somit als ein Nullkreis gilt (Nr. 98); denn die Mantellinien schneiden auf den Schenkeln O_1O, QP eines rechten Winkels Strecken von den Längen 1 und i ab. Durch Drehung dieser Querschnitte um OO_1 entsteht aber ein Kegel absoluter Richtungen oder eine Nullkugel.

B. 1) Jeder Kegel zweiten Grades kann als *Leitkegel eines Polarsystems im Bündel* gedeutet werden. Man hat in der Tat nur das ebene Polarsystem, das einen seiner Querschnitte definiert, aus seinem Zentrum zu projizieren. Zwei konzentrische Kegel haben ein gemeinsames harmonisches Polartripel.

2) Ein Kegel zweiten Grades hat *drei zueinander rechtwinklige Achsen.* Denn das ihn definierende Polarsystem hat mit dem Orthogonalsystem an seinem Scheitel ein harmonisches Polartripel gemeinsam, dessen Strahlen zu den entsprechenden Ebenen rechtwinklig sind.

3) Das konzentrische Orthogonalsystem ordnet einem Kegel zweiten Grades einen *Normalen-Kegel* zweiten Grades zu, dessen Mantellinien die Normalen der Tangentialebenen des ersten sind. Die Querschnitte beider Kegel sind polarreziproke Kurven in bezug auf den Fußpunkt des vom Kegelscheitel auf die Ebene gefällten Lotes.

4) Die beiden durch O zu den Kreisschnittebenen parallel gelegten Ebenen enthalten Rechtwinkelinvolutionen harmonischer Polaren in bezug auf den Kegel. Das Orthogonalsystem ordnet ihnen zwei Strahlen mit Rechtwinkelinvolutionen harmonischer Polarebenen in bezug auf den normalen Kegel zu.

5) In jedem Kegel zweiten Grades gibt es *zwei Fokalstrahlen*, d. h. Strahlen, deren jeder einen Brennpunkt aller zu ihm normalen Querschnitte enthält. Denn sind die Strahlen die Träger von Rechtwinkelinvolutionen im Bündel, so haben ihre Fußpunkte in Normalebenen dieselbe Eigenschaft (Nr. 181). Die Fokalstrahlen sind die Normalen der Kreisschnittebenen des normalen Kegels.

430. **Methode der Kreisscheitel.** Da im Vorigen der Leitkreis und das Projektionszentrum sich gegenseitig bestimmen, so kann man die zugrunde liegende Betrachtungsweise dahin aussprechen, daß überhaupt ein Kreis vom Mittelpunkt M und dem Radius r in der Ebene **E** durch zwei

Punkte S und S' im Raume dargestellt oder bestimmt werden kann, die in den durch $\overline{MS}^2 = \overline{MS'}^2 = -r^2$ gegebenen Abständen $MS = -MS'$ von M in der in M auf E errichteten Normale liegen. Sie sind offenbar für jeden reellen Kreis imaginär und für jeden rein imaginären reell und werden nach *A. F. Möbius* die *Scheitel des Kreises* genannt.[146]) *Also sind die Scheitel auch als die Mittelpunkte der Kugeln vom Radius Null anzusehen, von denen der gegebene Kreis der Querschnitt ist.* Denn ist X ein Punkt des Kreises, so hat man $\overline{MX}^2 = -\overline{MS}^2$ und offenbar $\overline{SX}^2 = \overline{MX}^2 + \overline{MS}^2 = 0$, d. h. die Scheitel haben von jedem Punkte des Kreises den Abstand Null.

Die Beziehungen von Kreisen in der Ebene lassen sich nun an den räumlichen Beziehungen zwischen ihren Scheiteln untersuchen. Der Hauptsatz dieses Übertragungsprinzips lautet: *Die Entfernungen zwischen den Scheiteln zweier Kreise sind gleich den Längen ihrer gemeinsamen Tangenten.* Bezeichnen wir die auf der einen Seite der Ebene gelegenen Scheitel von Kreisen (S_i) mit S_i, ihre symmetrischen mit S_i', so ist $\overline{S_1 S_2}$ oder $\overline{S_1' S_2'}$ gleich den inneren, $\overline{S_1 S_2'}$ oder $\overline{S_1' S_2}$ gleich den äußeren Tangenten von (S_1) und (S_2). Denn ihre Quadrate sind gleich dem Quadrat der Zentraldistanz, vermehrt um das Quadrat der Summe bez. Differenz der Normalen der Scheitel oder auch vermindert um das Quadrat der Summe bez. Differenz der Kreisradien (Nr. 118).

B. Das *Apollonische Problem* (Nr. 123).

Die Mittelpunktskoordinaten und Radien der drei gegebenen Kreise S_1, S_2, S_3 des Problems seien $\alpha_k \mid \beta_k \mid i(z - \gamma_k)$ für z als eine Konstante. Alsdann sind die Gleichungen der Kreise

$$(x - \alpha_k)^2 + (y - \beta_k)^2 + (z - \gamma_k)^2 = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

und der Apollonische Kreis (S) hat die Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0,$$

wenn $\alpha \mid \beta \mid i(z - \gamma)$ seinen Mittelpunkt und Radius bestimmen. Die Bedingungen z. B. der inneren Berührung zwischen ihm und jenen sind

$$(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2 + (\gamma - \gamma_k)^2 = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

denn diese Gleichungen sagen aus, daß die Längen der äußeren gemeinsamen Tangenten zwischen ihm und jenen Null sind.

Zur Elimination der α, β, γ zwischen den drei Bedingungen und der Gleichung des Apollonischen Kreises führt dann folgende Überlegung. Es ist $\overline{SS_1}^2 = 0$, wenn die inneren gemeinsamen Tangenten, und $\overline{SS_1'}^2 = 0$, wenn die äußeren gemeinsamen Tangenten der Kreise die Länge Null haben; jenes ist also die Bedingung der äußeren, dieses die Bedingung der inneren Berührung. Den Apollonischen Kreis suchen heißt daher nichts anderes als: diejenigen Kugeln vom Radius Null bestimmen, die von jedem der drei gegebenen Kreise einen Scheitel enthalten.

Nun besteht aber zwischen den gegenseitigen Abständen von fünf Punkten im Raume eine Beziehung, die sich von der in Nr. 128, 2 für vier Punkte der Ebene gegebenen nur dadurch unterscheidet, daß in der Determinante fünften Grades der Saum 1, $\overline{15}^2$, $\overline{25}^2$, $\overline{35}^2$, $\overline{45}^2$, 0 rechts und unten hinzutritt, man hat die Beziehung in B. 3 a. a. O. Wenn dann der fünfte der Punkte der Mittelpunkt einer durch die vier ersten gehenden Kugel vom Radius Null ist, so daß $\overline{15}$, $\overline{25}$, $\overline{35}$, $\overline{45}$ sämtlich Null sind, so kommt man zu der am Schluß von B. 3 a. a. O. gefundenen Beziehung zwischen den Längen der gemeinsamen Tangenten von vier Kreisen, die von demselben fünften Kreis berührt werden; hier also erscheint sie als eine Beziehung zwischen den gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten einer Kugel vom Radius Null. Die irrationale Form derselben

$$\overline{23} \cdot \overline{14} + \overline{31} \cdot \overline{24} + \overline{12} \cdot \overline{34} = 0$$

führt wegen

$$\overline{23} = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2 + (\gamma_2 - \gamma_3)^2}, \text{ usw.}$$

$$\overline{14} = \sqrt{(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 + (z - \gamma_1)^2}, \text{ usw.}$$

wonach $\overline{23}$, $\overline{31}$, $\overline{12}$ die Längen der äußeren gemeinsamen Tangenten der bezeichneten Kreispaare sind, direkt zu der Gleichung von *Casey* in Nr. 128 (Teil I, S. 263)

$$\overline{23} \cdot \sqrt{S_1} + \overline{31} \cdot \sqrt{S_2} + \overline{12} \cdot \sqrt{S_3} = 0,$$

die, rational gemacht, zwei der Berührungskreise ausdrückt.

Der geometrische Sinn dieser Lösung ist, daß die Querschnitte der Projektionsebene mit den beiden Nullkugeln (S) und (S'), die durch die Scheitel S_1, S_2, S_3 bez. durch S_1', S_2', S_3' gehen, zwei der Apollonischen Kreise sind.

Und die Konstruktion von *Gergonne* ergibt sich daraus in folgender Weise. Die Geraden S_1S_2, S_2S_3, S_3S_1 schneiden die Ebene der drei Kreise in ihren äußeren Ähnlichkeitspunkten, die in der Schnittlinie derselben mit der Ebene der drei Scheitel $S_1S_2S_3$ als der bezüglichen Ähnlichkeitsachse liegen. Die Gerade SS' schneidet dieselbe Bildebene in einem von S_1, S_2, S_3 gleichweit entfernten

Punkte, also in einem Punkte gleicher Tangentenlängen zu den gegebenen Kreisen oder im Potenzmittelpunkt R derselben. Daß die Punkte S, S' von jedem Punkte der vorerwähnten Ähnlichkeitsachse gleichen Abstand haben, sagt weiter aus, daß die Tangenten von den Punkten der Ähnlichkeitsachse an die erhaltenen Apollonischen Kreise gleichlang sind, oder daß diese Achse die Potenzlinie derselben sein muß.

Da endlich die Kreise S und S_1 sich berühren müssen, haben die entsprechenden Kugeln vom Radius Null (S) und (S_1) in allen Punkten der Geraden SS_1 Berührung miteinander; somit liegen die Berührungspunkte des Kreises S_1 mit den beiden Apollonischen Kreisen S und S' in der Ebene $S_1SS'R$, die auch die Normale zur Ebene $S_1S_2S_3$ im Punkte S_1 enthält. Daher ist ihre Schnittlinie mit der Bildebene die Gerade, die den Potenzmittelpunkt R mit dem Pol der Ähnlichkeitsachse in bezug auf den Kreis Eins verbindet; denn jene Normale ist die Polare der Ähnlichkeitsachse in bezug auf die Nullkugel Eins.[147])

431. **Methode der räumlichen Darstellung. Zyklographie.**[148]) Die vorige Methode ist sehr bequem, um die Kreislehre nach ihrer Anleitung analytisch zu entwickeln, aber sie ist infolge des Übergangs vom Reellen zum Imaginären nicht ebenso vorteilhaft für die geometrische Konstruktion. Diese Schwierigkeit kann man nun leicht beseitigen, indem man das imaginäre Scheitelpaar des Kreises durch ein reelles Stellvertreterpaar ersetzt. Es kommt dies darauf hinaus, *als die Scheitel des Kreises die Spitzen der gleichseitigen, geraden Kegel zu betrachten, die den Kreis zur Basis haben;* d. h. *jeden Kreis als Distanzkreis* zugehöriger Projektionszentra O nach Nr. 416.

Denken wir in der Mittelnormale jedes Kreises den Radius ϱ als MS und MS' beiderseits abgetragen, so entspricht offenbar *eine gerade Reihe von Scheiteln der Gesamtheit der einem Tangentenpaare eingeschriebenen Kreise.* Denn die Orthogonalprojektionen M von S erfüllen eine Gerade, die Zentrale der Kreise, deren Radien MS den Abständen MA vom Schnittpunkt A der Geraden mit der Ebene proportional sind. Also ist A ein gemeinsamer *Ähnlichkeitspunkt* der Kreise. Punkte einer Ebene sind Scheitel von Kreisen, die die Spur der Ebene zu einer *Ähnlichkeitsachse* haben (Nr. 122).

In jedem *Kreisbüschel* (Nr. 120) ist die Differenz der Quadrate des Radius und der Mittelpunktsentfernung vom Zentralpunkt des Büschels konstant. *Die Scheitel der Kreise eines Büschels bilden also eine gleichseitige Hyperbel,* die die Zentrale des Büschels und die im Zentralpunkt errichtete Normale der Ebene zu Achsen hat (Nr. 165, 1). Die Grenzpunkte des Büschels sind die in der Zentrale liegenden Scheitel der Hyperbel (Nr. 121).

Alle Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren, haben die Punkte des über jenem Kreise stehenden geraden gleichseitigen Kegels zu Scheiteln. Denn einer Mantellinie desselben entsprechen alle die Basis in ihrem Fußpunkt berührenden Kreise. Damit ist wieder ein Mittel zur konstruktiven Lösung des Apollonischen Problems gegeben.[149]) Aber in der Bemerkung, daß die Rotation der ein Kreisbüschel darstellenden Hyperbel um ihre zur Zeichnungsebene normale Achse ein einteiliges bez. zweiteiliges Rotationshyperboloid als Repräsentanten des Kreisnetzes oder linearen Kreissystems zweiter Stufe (Nr. 122) liefert, nämlich mit reellem bez. rein imaginärem Orthogonalkreis, liegt der Keim zu der Entdeckung, daß diese einfachen Formen zur gleichartigen Lösung aller Winkelschnittprobleme über Kreise führen — nicht nur in der Ebene, sondern auch auf der Kugel, und in beiden Fällen mit Einschluß der imaginären Kreise und Winkel — Probleme, denen wir schon in Nr. 124, 2 und Nr. 128, 2 begegnet sind; hier liegt auch der Keim zur vollständigen Theorie der linearen Kreissysteme und den entsprechenden Konstruktionen und Theorien über Kugeln und Kugelsysteme, also auch zur Inversion.

Wie den Kreisen nach diesem besonderen Verfahren, *so können überhaupt den Kegelschnitten eines Systems dritter Stufe die Punkte oder Ebenen des Raumes nach bestimmten Gesetzen zugeordnet werden.* Denn der Raum ist ein dreidimensionales Gebilde, eine dreifache Mannigfaltigkeit von Punkten und Ebenen, wie das System dritter Stufe eine dreifache Mannigfaltigkeit von Kurven enthält.

Insbesondere aber weist die Lehre von den linearen Verwandtschaften überall hinaus auf die räumliche Geometrie,

weil erst da die organische Entwickelung aus Grundgebilden ihre vollständige Durchführung findet. *Der Wert der Projektionsmethode beruht vor allem in der geometrischen Anschaulichkeit, die sie den analytischen Operationen zu geben erlaubt.* Als Hauptunterschied in der Handhabung der geometrischen und der analytischen Methode stellt sich aber *der* heraus, daß das rein geometrische Verfahren meist einfacher zuerst zu einem besonderen Satze führt, dessen Verallgemeinerung die Projektionsmethode liefert; während die algebraische Rechnung den allgemeinen Satz in der Regel ebenso leicht wie den besonderen beweist, so daß nach Aufstellung des ersten nur seine Anwendung auf besondere Fälle vorzunehmen ist.

Literaturnachweisungen.

1) Nr. 249, S. 1. Vgl. *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828, Bd. 2, Essen 1831.

2) Nr. 252, S. 5. Vgl. *L. Heffter* und *C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. 1, Leipzig und Berlin 1905, S. 317. Für die in Nr. 253—255 behandelte Einteilung der Kegelschnittbüschel vgl. man auch eine von *W. Dieck* gegebene Darstellung in dessen von Herrn *L. Heffter* angeregter Dissertation (Kiel): „Zur Klassifikation der Punktepaar- und Kegelschnitt-Büschel“, Sterkrade 1908.

3) Nr. 256. 3, S. 16. Vgl. *W. Fiedler*, Geometrische Mitteilungen VII, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 29 Jahrgang (1884), S. 343 und besonders S. 346f. Für r_1, r_2, r_3 als Radien und c_1, c_2, c_3 als Zentraldistanzen (mit $c_1 + c_2 + c_3 = 0$) ist die Bedingung $c_1 c_2 c_3 + c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 = 0$. Für die Potenzen p_1, p_2, p_3 eines Punktes folgt daraus leicht $\Sigma c_i p_i^2 = 0$, so daß z. B. die Punkte eines dritten Büschelkreises die Beziehung $p_1^2 : p_2^2 = - c_2 : c_1$ erfüllen müssen.

4) Nr. 261, S. 21. Vgl. *J.-V. Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, Bd. 1, 2. Aufl., Paris 1865, S. 232.

5) Nr. 262, S. 22. *K. Rohn*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16, S. 364f.

6) Nr. 266, S. 27. *K. Rohn*, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver., Bd. 22 (1913), S. 333ff. Der Satz findet sich zuerst bei *Ch. J. Brianchon*, Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817, S. 35.

7) Nr. 268, S. 30. Der Satz von *Brianchon* steht zuerst in der Correspondance sur l'école polytechnique (publ. par *Hachette*) Bd. 1 (1804/8), S. 151 [1805]; vgl. ferner *Brianchon*, Journ. de l école polyt. (1) cah. 13 (1806), S. 301, sowie cah. 10 (1810), S. 12 und Annales de mathématiques Bd. 4 (1813/4), S. 379—381. Die Bemerkung zu $s_1 = \pm s_2$ gegen das Ende von Nr. 268 stammt von *I. Todhunter*.

8) Nr. 272, S. 37. Für beliebige Kreise, die ja die imaginären Kreispunkte gemeinsam haben, gibt *J.-V. Poncelet* den Beweis, Traité des propr. proj., 1. Aufl., Paris 1822, S. 223; 2. Aufl, Bd. 1, Paris 1865, S. 216. *J. Plücker* bewies den Satz analytisch, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828, S. 241 und 257. Vgl. auch *K. Rohn*, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver., Bd. 16 (1907), S. 361. *A. Voss* nannte den Schnittpunkt der Träger der drei Punktepaare den *Zentralpunkt*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 18 (1873), S. 104.

9) Nr. 274, S. 38. *K. Rohn*, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver., Bd. 16 (1907), S. 373.

10) Nr. 274, S. 39. *K. Rohn*, ebenda, S. 375.

11) Nr. 275, S. 40. *B. Pascal* fand den Satz im Winter 1639/40, im Alter von 16 Jahren, und sprach ihn in einer etwas anderen Form aus, nämlich bei Benutzung von Figur 13 auf Seite 40 etwa so: Wer-

den durch einen beliebigen Punkt p der Ebene zwei beliebige Gerad gezogen, die einen Kegelschnitt in a und f bez. in c und d treffen u schneiden die von einem beliebigen Punkte q der Ebene nach a und gezogenen Geraden den Kegelschnitt in b bez. e, so gehen die drei Gerad ef, bc und pq durch einen und denselben Punkt r. *Pascal* ließ seine Schri Essay pour les coniques in Paris im Jahre 1640 in Form eines Flu blattes drucken. Ein Facsimile desselben findet man in der von *L. Bru schvicg* und *P. Boutroux* veranstalteten Ausgabe der Werke von *Pasc* Bd. 1, Paris 1908, S. 252.

12) Nr. 275, S. 40. Für eine Erweiterung desselben Beweisve fahrens und des Pascalschen Satzes vgl. *R. Lachlan* in The Messeng of Mathematics, Bd. 15 (1885/6), S. 155ff. Hat man zu einem Keg schnitt $s=0$ drei Paare von Kegelschnitten u, u^*; v, v^*; w, w^*, so d die je gemeinsamen Punkte derselben in s liegen, d. h. ist

$$s \equiv \lambda u - \lambda^* u^*, \quad \equiv \mu v - \mu^* v^*, \quad \equiv \nu w - \nu^* w^*,$$

so folgt

$$\mu v - \nu w = \mu^* v^* - \nu^* w^*$$

oder die vier Schnittpunkte von v, w liegen mit denen von v^*, w^* a einem neuen Kegelschnitt $s_1 \equiv \mu v - \nu w = 0$; ebenso die w, u und die $w^*,$ auf $s_2 \equiv \nu w - \lambda u = 0$ und die u, v mit den u^*, v^* in $s_3 \equiv \lambda u - \mu v =$ und diese drei neuen Kegelschnitte gehören zu *einem* Büschel. Zal reiche Sonderfälle.

13) Nr. 275 B. 1, S. 41. *Pappus*, *Συναγωγή μαϑηματική*, et 295 n. Chr. geschrieben, vgl. die Ausgabe Pappi Alexandrini Collectio quae supersunt e libris manu scriptis, hrsgg. von *F. Hultsch*, Bd. Berlin 1877, S. 887 und 893 (Buch 7, prop. 139 und 143). Für die wic tige Bedeutung des Satzes von *Pappus* für die Untersuchungen üb die Grundlagen der Geometrie vgl. *H. Wiener*, Jahresb. d. deutsch. Ma Ver., Bd. 1 (1890/1), hrsgg. 1892, S. 46; ebenda Bd. 3 (1892/3), hrsg 1894, S. 72; *A. Schoenflies*, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 1 (1890/ hrsgg 1892, S. 62; *F. Schur*, Math. Annalen, Bd. 51 (1899), S. 401, *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie (Kap. 6) [Festschrift zur Fe der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 18 S. 71/7], 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1909, S. 38/45; 97/106; *G. Hesse berg*, Math. Annalen, Bd. 61 (1905), S. 161/72; Sitzgsb. d. Berliner ma Gesellschaft, Bd. 4 (1905), S. 70/4; *J. Hjelmslev*, Math. Annalen 64 (190 S. 469/71; *F. Schur*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig und Berlin 19 S. 139, 154/9.

14) Nr. 275, B. 2, S. 41. Der Beweis wurde *Salmon* unabhäng von *A. de Morgan* und *W. S. Burnside* mitgeteilt. Aus dem letzt Zusatz von Nr. 212 folgt, daß die vier Kreise, die den Dreiecken a vier Geraden umgeschrieben sind, durch einen Punkt, den Brennpun der zugehörigen Parabel, gehen. Für fünf Gerade bewies *A. Miq* (Journal de mathématiques pures et appliquées (1) Bd. 10 (1845), S. 34 daß die Brennpunkte der fünf Parabeln, die sie zu vieren berühr auf einem Kreise liegen. Die Kreise, die in solcher Art den sechs Fü seiten aus sechs Geraden entsprechen, gehen durch einen Punkt, u aus den von sieben Geraden gebildeten Sechsseiten erhält man so sieb Punkte eines Kreises; vgl. *W. K. Clifford*, The Oxford, Cambridge, a Dublin Messenger of Mathematics (1) Bd. 5 (1871), S. 124—141 o Mathematical papers, London 1882, S. 38—54.

15) Nr. 275 B. 3, S. 41. Der Beweis stammt von *John C. Moo*

16) Nr. 276, S. 42 und B. 6, S. 44. *C. Maclaurin* bemerkt (Phi sophical Transactions of the London Royal Society, Bd. 39 (1735/ S. 163), daß er diese Erzeugungsweise der Kegelschnitte schon 17

gefunden hat, aber er veröffentlichte sie erst 1735 als Anhang zu einer anderen Abhandlung (Philos. Trans. London, Bd. 39 (1735/6), S. 143). Der Anlaß zur Veröffentlichung dieser Arbeit und des Schriftstückes von 1722 war die Schrift von *W. Braikenridge* „Exercitatio geometrica de descriptione curvarum", London 1733 und eine Abhandlung desselben Verfassers in Philos. Trans. London, Bd. 39 (1735/6), S 25—36. *A. Schlamp* konstruierte einen Apparat zur Erzeugung der Kegelschnitte nach Maclaurin (Progr. Neues Gymnasium zu Darmstadt, 1908). *F. Dingeldey* untersuchte einen besonderen Fall der Erzeugungsweise der Kegelschnitte nach Braikenridge und Maclaurin und zeigte, wie die drei festen Punkte und die zwei festen Geraden liegen müssen, wenn man einen Kreis, eine gleichseitige Hyperbel oder eine Parabel erzeugen will (Atti del quarto congresso internazionale dei matematici in Roma 1908, Bd. 2, Roma 1909, S. 278—284; Jahresb. d deutsch. Math.-Ver., Bd. 18 (1909), S. 99—107).

17) Nr. 278, S 51. *J. Steiner* lenkte die Aufmerksamkeit der Geometer auf die *vollständige* Figur des Pascalschen Sechsecks (Annales de mathématiques pures et appliquées, hrsgg. von *J. D. Gergonne,* Bd. 18 (1827/8), S. 339/40 oder *J. Steiners* gesammelte Werke, hrsgg. von *K. Weierstrass,* Bd. 1, Berlin 1881, S. 224/5). Seine Sätze ergänzte *J. Plücker* (Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 5 (1830), S. 275/80 oder *J. Plückers* gesammelte math. Abhandlungen, hrsgg. von *A. Schoenflies,* Leipzig 1895, S. 166/71; vgl. auch *J. Steiner,* Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832, S. 311/2 oder ges. Werke, Bd. 1, S. 450/1) oder Ostwalds Klass. Nr. 83, Leipzig 1896, S. 140/1. Später haben *O. Hesse* (J. reine angew. Math., Bd. 24 (1842), S. 43; Bd. 41 (1851), S. 269/71; Bd. 75 (1873), S. 1/5 oder *O. Hesses* gesammelte Werke, München 1897, S. 60/1; 253/6; 585/90), *T. P. Kirkman* (Cambr. Dublin math. Journal Bd. 5 (1850), S. 185/200), *A. Cayley* (J. reine angew. Math. Bd. 41 (1851), S. 66/72, 84 oder Collected papers, Bd. 1, Cambridge 1889, S. 550/56) das System untersucht, ferner *Grossmann* (J. reine angew. Math. Bd. 58 (1861), S. 174/78), *K. G. Chr. v. Staudt* (ebenda Bd. 62 (1863), S. 142/50), *A. Cayley* (Quarterly Journal pure appl. math, Bd. 9 (1868), S. 348/53 oder Coll. papers, Bd. 6, Cambridge 1893, S. 129/34), *O. Hesse* (J. reine angew. Math. Bd. 68 (1868), S. 194/6 oder Ges. Werke, München 1897, S. 541/2), *F. Graefe* (Diss. Bern 1879; Zeitschr für Math. u. Physik Bd 25 (1880), S. 215/6; Erweiterungen des Pascalschen Sechsecks, Wiesbaden 1880; J. reine angew. Math. 93 (1882), S. 184/7). Vgl. ferner *O. Hesse,* Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene, 4. Aufl., Leipzig 1906, S. 155/82; *J. Steiners* Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2. Teil Die Theorie der Kegelschnitte, bearb. von *H. Schröter,* 3. Aufl. durchgesehen von *R. Sturm,* Leipzig 1898, S. 121/32 und 511/2; *F. Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie, mit besonderer Benutzung der Vorträge von *A. Clebsch* bearb. und hrsgg., 2. Aufl., Bd. 1, 1. Teil, 1. Lieferung, Leipzig 1906, S. 275—304.

A Cayley leitete die Eigenschaften der Figur aus der Projektion der fünfzehn Durchschnittslinien von sechs Ebenen ab; ebenso *L. Cremona* (Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat., 3. Serie, Bd. 1 (1876/7), S. 854/74), die sogleich zu erwähnenden neuen Ergebnisse von *Gius. Veronese* durch Projektion der fünfzehn Geraden einer Fläche dritter Ordnung mit Doppelpunkt aus diesem.

Die *Dualität zwischen den entdeckten Eigenschaften der Figur des vollständigen Pascalschen Sechsecks* ist durch *Gius. Veronese* näher be-

stimmt worden in „Nuovi Teoremi sull' Hexagrammum Mysticum" (Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat., 3. Serie, Bd. 1 (1876/7), S. 649/703). Die Untersuchungsmethode ist die der perspektiven Dreiecke wie in Nr. 277 und 278 des Textes; sie wird erweitert in der Betrachtung der 27 Dreiecke, die von dreimal drei Punkten A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 auf drei Geraden aus einem Punkte gebildet werden; diese Dreiecke bilden 36 Ternen paarweise perspektiver Dreiecke, und die Perspektiv-Achsen jeder Terne gehen durch einen Punkt; die so erhaltenen 36 Punkte liegen zu vier in 27 Geraden. Ferner seien gegeben vier Dreiecke und vier Vierecke, das erste mit dem zweiten, das zweite dem dritten, das dritte dem vierten und das vierte dem ersten perspektiv liegend — wenn die vier Perspektivzentra der Dreiecke in einer Geraden sind, so gehen die Perspektiv-Achsen durch einen Punkt und für die Vierecke liegen die vier aus ihren Dreiecken also entspringenden Punkte in einer Geraden; und aus zwei perspektiven Dreiecken $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ wird durch die Ecken $B_1 C_2$, $B_2 C_1$ oder A, $C_1 A_2$, $C_2 A_1$ oder B und $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ oder C ein drittes zu beiden perspektives Dreieck gebildet und gezeigt, daß die drei Perspektivzentra in einer Geraden liegen.

Nach Ableitung der 10 konjugierten Paare der Steinerschen Punkte G und der 60 den Pascalschen Geraden p zugeordneten Kirkmanschen Punkte H folgen die wichtigen Sätze: *Die 60 Geraden p und die 60 Punkte H bilden sechs Figuren π von je 10 Punkten H, die zu drei auf entsprechenden Geraden liegen;* durch jeden Punkt H gehen drei Geraden p. Die Zuordnung zwischen einer Geraden p und einem Punkt H vollzieht *Veronese* folgendermaßen: Von den 15 Verbindungslinien der 6 Punkte eines Kegelschnitts läßt er die sechs Seiten eines Sechsecks weg; aus den übrigen 9 Verbindungslinien kann man drei Sechsecke bilden, deren Pascalsche Geraden p sich in jenem Punkt H schneiden, der der Geraden p des unterdrückten Sechsecks zugehört. Aus jedem der drei Sechsecke kann man drei andere ableiten, doch sind von diesen 9 Sechsecken nur 6 neu: so ergeben sich die 10 Sechsecke einer Figur π, und man kann zeigen, daß sie sich bei dem eben genannten Verfahren untereinander reproduzieren.

Zwei dieser Figuren π haben vier Punkte G in einer Geraden j und die vier entsprechenden Geraden g aus einem Punkte J gemein; dazu sechs der 45 Punkte P, in denen sich die 15 Fundamentalgeraden in Paaren schneiden, die zu drei in vier Geraden p liegen. Diese gehören einzeln den vier übrigen Figuren π an und gehen durch jene vier Punkte G. Drei der Figuren π haben einen Punkt G und die entsprechende Gerade g gemein. Die 45 Punkte P bilden 15 Dreiecke Δ_{ik}, die den 15 Paaren i, k der sechs Figuren π entsprechen; durch die Ecken von Δ_{ik} geht keine der Geraden g der Systeme i, k; die 30 Punkte P einer Figur π werden von den Ecken der Dreiecke Δ_{ik} der 10 Paare aus den fünf andern gebildet. Die 12 Geraden g durch die Ecken von Δ_{ik} schneiden sich 8mal zu dreien in vier Punkten G und in vier Punkten H; jene liegen in den vier Geraden g, diese entsprechen vier Geraden p beider Figuren π. In zwei Figuren π gibt es zwei Vierseite aus Geraden p, deren Ecken Punkte H sind und deren Seiten sich paarweise in Punkten P des Dreiecks Δ_{ik} der beiden Figuren und in Punkten G ihrer Geraden j begegnen. Ihre 12 Ecken liegen in Paaren auf sechs Geraden v_{12}, die paarweise durch die Ecken des Dreiecks Δ_{ik} gehen und mit seinen Seiten harmonische Gruppen bilden, so daß alle sechs in vier Punkten Z_2 zu dreien zusammentreffen; es gibt 90 solche Geraden und durch jeden Punkt H gehen drei von ihnen; die Anzahl der Punkte Z_2 ist 60 und in jeder Geraden v_{12} liegen zwei. Die vier

Punkte G einer Geraden j und die Schnittpunkte Y derselben mit zwei Seiten des Dreiecks Δ_{ik} der zugehörigen Figuren π bilden eine Involution. Drei Punkte Z_2, die den Geraden p eines Punktes G entsprechen, liegen in einer Geraden g; die vier Geraden g zweier Figuren π und zwei der Geraden aus ihrem Punkte J nach Ecken des gemeinsamen Dreiecks Δ_{ik} bilden drei Paare einer Involution. Zwei Figuren π enthalten zwei Vierecke von Punkten H paarweise in vier Geraden g aus dem zugehörigen Punkte J, und die Perspektiv-Achsen ihrer Dreieckspaare sind die Linien p, die in den vier andern Systemen π durch die ersten bestimmt werden. Ihre Polaren in den beiden Figuren π begegnen sich paarweise in den vier Punkten G der Geraden j derselben und in den vier Perspektivzentren Z_2 ihrer Geraden g. Somit entsprechen die Punkte Z_2 den Geraden p und *fünf der Figuren π bestimmen daher die sechste.*

Die drei Punkte Z_2, die den p aus einem H entsprechen, liegen in einer Geraden z_2; solcher gibt es 60, durch jeden Punkt Z_2 gehen drei und sie begegnen sich überdies zu drei in den 20 Punkten G. Sie entsprechen einerseits den p, andrerseits den H. Die 90 Geraden v_{12} schneiden sich paarweise in 180 Punkten E, die zu drei in den 60 p liegen und in jeder derselben mit den drei H Paare einer Involution bilden. *Die Z_2 und z_2 bilden wie die H und p sechs Figuren π' von je zehn Paaren von Polarsystemen. Die Punkte G und J und die Geraden g, j und v_{12} sind den Systemen (Hp) und $(Zz)_2$ gemein. Fünf dieser Systeme bestimmen ein sechstes der jedesmal andern Art.* Und so fort.

Das Hexagramm setzt sich aus unendlich vielen Systemen (Zz) zusammen, deren jedes aus sechs Figuren π besteht, von denen fünf eine Figur des vorhergehenden und eine des folgenden Systems bestimmen, mit Ausnahme von (Hp), wo fünf Figuren π die sechste desselben Systems und eine des Systems $(Zz)_2$ bestimmen. Die Punktepaare Z_2Z_3, $Z_4Z_5, \ldots$ bez. Strahlenpaare z_2z_3, $z_4z_5, \ldots$ in einer g (bez. um einen G) bilden Involutionen, mit den zugehörigen Punkten H und J bez. den zugehörigen Strahlen p und g als Doppelementen; usw.

Erwähnt seien noch die Arbeiten von *L. Klug,* Die Konfiguration des Pascalschen Sechsecks im allgemeinen und in vier speziellen Fällen, Klausenburg 1898, und in den Monatsheften für Mathematik und Physik, Bd. 14 (1903), S. 74/91.

Der Absicht, zweckmäßige Bezeichnungen für die erwähnten und für andere in der Pascalschen Konfiguration auftretende Punkte und Geraden zu geben, sind Arbeiten von *A. Cayley* (Quart. Journ. pure appl. math., Bd. 9 (1868), S. 268/74 oder Coll. papers, Bd. 6, Cambridge 1893, S. 116/22) und von *Christine Ladd-Franklin* (American Journal of math, Bd. 2 (1879), S. 1/12) gewidmet.

18) Nr. 279, S. 54. Der Satz in B. 4 ist von *W. S. Burnside.*

19) Nr. 279, S. 54. Der Satz in B. 5 rührt von *Roberts* her.

20) Nr. 285, S. 65. Eine vollständige Theorie der Kegelschnitte aus den projektiven Grundeigenschaften begann *M. Chasles* „Traité des sections coniques“, Paris 1865, ohne Fortsetzung. Vgl auch *J. Steiner,* Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2. Teil, Die Theorie der Kegelschnitte, bearb. von *H. Schröter,* 3. Aufl., durchgesehen von *R. Sturm,* Leipzig 1898.

21) Nr. 285, 1, S. 65. Die Ausdrucksweise des Satzes in B 1 gab *R. Townsend* in dem Werke: „Chapters on the modern geometry“, Bd. 2, Dublin 1865, S. 165. Vgl. die elegante Behandlung eines allgemeinen Problems über projektive Büschel von *O. Hesse* in Journ. reine

angew. Math., Bd. 62, (1863), S. 188 oder Gesammelte Werke, München 1897, S. 507 und im allgemeinen für diesen Gegenstand desselben Autors schon genannte „Vorlesungen“ (3—7).

22) Nr. 286, 2, S. 68. Vgl. § 38 des in Anm. 20 erwähnten Steinerschen Werkes, ferner *C. Pelz,* Sitzungsber. der kgl. böhm. Gesellsch. der Wissensch. in Prag, 1879, S. 205/46, *C. Cranz,* Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen 2. O., Stuttgart 1886, S 19/28; *K. Rohn,* Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 18 (1909), S 402/5.

23) Nr. 287, 3, S. 70. *M. Chasles,* Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 2. Aufl. Paris 1875, S. 336 oder die deutsche Ausgabe der 1. Aufl., hrsgg. von *L. A. Sohncke,* Halle 1839, S. 351.

24) Nr. 289, S. 75. Schon *G. Desargues* (Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cône avec un plan, Paris 1639; Œuvres, hrsgg. von *N. G. Poudra,* Bd. 1, Paris 1864, S. 188) bemerkte, daß die Punktepaare, in denen ein beliebiger Kegelschnitt und die zwei Paare von Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks von einer beliebigen Geraden getroffen werden, eine Involution bilden. *Ch. Sturm* (Annales de mathém. pures et appliqu Bd. 17 (1826/7), S. 180) erweiterte den Satz zu der im Text ausgesprochenen Fassung. *Desargues* ist überhaupt der Entdecker der Involution und hat diese schon sehr vollständig entwickelt.

25) Nr. 296, B. 3, S. 90. Der Satz rührt von *R. Townsend* her.

26) Nr. 298, S. 93. Für den Fall, daß der Kegelschnitt ein Kreis, das Vieleck ein Dreieck ist und die drei festen Punkte in einer Geraden liegen, hat schon *Pappus* (*Συναγωγή μαθηματική*, Buch 7, prop. 117; *Pappi* Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis, hrsgg. von *F. Hultsch,* Bd. 2, Berlin 1877, S. 848/50) eine Lösung gegeben, bei beliebiger Lage der drei Punkte *J. de Castillon (Giovanni Salvemini da Castiglione),* Nouv. Mém. Acad. Berlin 7 (1776), hrsgg. 1779, S. 269/83, dem *G. Cramer* die Aufgabe im Jahre 1742 vorgelegt hatte. Ebenda (S. 284/7) findet man eine rein algebraische Lösung von *J. L. Lagrange,* die *J. de Castillon* mitteilt. *L. N. M. Carnot* vereinfachte die von *Lagrange* gegebene Lösung und dehnte sie unter Beibehaltung des Kreises auf den Fall eines beliebigen Vielecks aus (Géométrie de position, Paris 1803, S. 383/7). Auch *L. Euler, N. Fuss, A. J Lexell, Th. Clausen, A. F. Möbius, A. Cayley* haben sich mit der Aufgabe für den Fall des Dreiecks beschäftigt. Eine analytische Lösung bei *Kreis* und beliebigem *Vieleck* hat vor *Carnot* schon *S. L'Huilier* (Mém. Acad. Berlin, Jahrg. 1796, hrsgg. 1799, S. 94—112) gegeben; die erste geometrische, aber etwas verwickelte Lösung dieses Falles der Aufgabe stammt von *A. Giordano* [Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (1) 4 (1788), S. 4—17], und unabhängig von diesem gelangte *G. F. Malfatti* [ebenda S. 201/5] zur gleichen Lösung. Man bezeichnet diese Aufgabe häufig als das *Ottaianosche Problem* nach dem in der Nähe des Vesuv gelegenen Städtchen Ottaiano, dem Geburtsorte von *A. Giordano.* Bei beliebigem Kegelschnitt wurde die Aufgabe von *Ch. J. Brianchon, J. D. Gergonne, J. V. Poncelet, A. Göpel, J. Steiner* behandelt. Der angegebene Beweis der Ponceletschen Konstruktion ist von *Townsend.* Nähere Literaturangaben findet man bei *M. Brückner,* Das Ottaianosche Problem, Progr. Zwickau 1892, bei *E. Kötter,* Jahresb. d. deutsch Math-Ver. 5² (1898), Leipzig 1901, S. 143/8, sowie in dem Artikel von *F. Dingeldey* über Kegelschnitte in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 3, Teil 2, S. 44/5 oder französische Bearbeitung, Paris und Leipzig 1911, S. 102/3..

27) Nr. 300, S. 99. Vgl. hierzu *J. Plücker,* Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, S. 61/4, sowie J. reine angew. Math. 10 (1833), S. 84/5 [1832] oder Ges. wissensch. Abhandl, Bd. 1, hrsgg. von *A. Schoenflies,* Leipzig 1895, S. 290/1. Die Wurzeln dieser projektiven Anschauung gehen zu *J. V. Poncelet* und *Ph. de la Hire* zurück.

28) Nr. 300, 8, S. 102. Vgl. *H. Faure,* Nouv. Ann. math. (1) 20 (1861), S. 56 und *L. Cremona* ebenda (2) 3 (1864), S. 23/5 oder Opere matematiche, Bd. 2, Mailand 1915, S. 169/70.

29) Nr. 300, 8, S. 102. Vgl. *H. Schröter,* Math. Ann. 5 (1872), S. 50/63 [1871], sowie *H. Durège* ebenda, S. 83/94. Insbesondere entwickelt *Schröter* die Eigenschaften der Brennpunktskurve der Kegelschnittschar. Die *W. Fiedler*sche Entwicklung des Satzes von dem Erzeugnis der projektiven Involutionen mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl ist die darstellend geometrische; man findet sie bei *W. Fiedler* „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage", 3. Aufl., 2. Bd., Leipzig 1885, S. 182; im 3. Bd., Leipzig 1888, §§ 54f. desselben Werkes wird die daraus entspringende Theorie der Kurven dritter Ordnung weitergeführt.

30) Nr. 301, 3, S. 104. Die Lösung der Aufg 3 ist von *W. S. Burnside.*

31) Nr. 301, 6, S. 106. Diese Ableitung gab *W. R. Hamilton.*

32) Nr. 302, S. 107. Dieser Satz ist von *L. N. M. Carnot* (Géométrie de position, Paris 1803, S. 453) gegeben worden. Vgl. auch *E. Bobillier,* Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), S. 321/3.

33) Nr. 302, S. 107. Dieser Satz findet sich schon bei *G. Ceva,* De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio, Mailand 1678. Vgl. auch *M. Chasles,* Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1. Aufl., Brüssel 1837, Note 7; aus dem Französischen übertragen durch *L. A. Sohncke,* Halle 1839, S. 301.

34) Nr. 302, S. 107. Eine von *O. Hermes* in seinem Programm von 1860, Die Verhältniskoordinaten in der Ebene, gegebene Gleichung.

35) Nr. 303, S. 110. Die Schar der Parabeln, die die Seiten eines Dreiseits berühren, wurde hauptsächlich von *J. Steiner* behandelt (vgl. J. reine angew. Math. 2 (1827), S. 191 und Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), S. 59 oder Ges. Werke, Bd. 1, Berlin 1881, S. 134 und 207) und, zum Teil in anderer Richtung, von *J. Plücker,* Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, S. 202ff. und 215ff.

36) Nr. 303, 2, S. 110 — eine von *A. Hart* herrührende Gleichung. Die Behandlung der Ellipse zu drei Tangenten mit dem Mittelpunkt O und den Halbachsen a, b mit Hilfe der exzentrischen Anomalie der Berührungspunkte gibt nach *W. F. Walker* (Quart. Journ. pure appl. math. 7 (1866), S. 120 [1864]) den Satz: Für P, Q, R als Seitenmitten des Tangentendreiecks und α, β, γ als die exzentrischen Anomalien der Berührungspunkte ist die Fläche des Dreiecks QOR gleich $\frac{1}{4}ab \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Man leitet daraus den Satz von *H. Faure* ab, daß das durch die Polaren der Seitenmitten eines Tangentendreiseits gebildete Dreiseit für alle eingeschriebenen Kegelschnitte konstanten Inhalt hat. Für einen allgemeineren Satz über die Flächen solcher Polardreiecke vgl. Nr. 373, 8.

37) Nr. 303, 6, S. 111. Dieser Übergang wurde von *Hart* gezeigt.

38) Nr 304, S. 111. Vgl. *W. A. Whitworth,* The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, 1. Reihe, Bd. 3 (1866), S. 71ff.

39) Nr. 304, 1, S. 113. Die gegebene Lösung ist von *P. Serret,* Nouv. Annales de Math. (2) Bd. 4 (1865), S. 147/51.

40) Nr. 304, 2, S. 114. Ebenda S. 151/9.

41) Nr. 304, 3, S. 115. Vgl. *K. G. Chr. von Staudt,* Über die Kurven

zweiter Ordnung, Nürnberg 1831, S. 23. Der Satz findet sich auch bei *L. O. Hesse,* Diss. Königsberg 1840 oder J. reine angew. Math 20 (1840), S. 301/2 oder Ges. Werke, München 1897, S. 41/2. *J. Steiner* (J. reine angew. Math. 3 (1828), S. 212 oder Ges. Werke, Bd. 1, Berlin 1881, S. 179) hat den Satz: Schneidet man die drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks mit einer Geraden und konstruiert man in jeder Diagonale den vierten harmonischen Punkt zu dem eben genannten Schnittpunkt und den Enden der betreffenden Diagonale, so liegen diese drei neuen Punkte in einer Geraden.

42) Nr. 304, 5, S. 115. Ein Satz von *A. F. Möbius,* J. reine angew. Math. 26 (1843), S. 29/30 oder Ges. Werke 1, Leipzig 1885, S. 587. *Möbius* hat die Beziehung sofort in die Gleichung zwischen den Radienvektoren und den Längen von vier Örtern eines Planeten umgesetzt usw.

43) Nr. 304, 6, S. 116. Satz von *J. J. Sylvester,* London-Edinburg-Dublin philos. mag. (4) 31 (1866), S. 380/4 oder Papers 2, Cambridge 1908, S. 559/62: Beweis von *W. S. Burnside.*

44) Nr. 304, 12, S. 118. Vgl. *A. Cayley,* J. reine angew. Math. 68 (1868), S. 178/9 [1867] oder Coll. math. papers, Bd. 7, Cambridge 1894, S. 125.

45) Nr. 306, S. 120. Diese Methode wurde von *F. Joachimsthal* eingeführt, J. reine angew. Math. 33 (1846), S. 373.

46) Nr. 309, 2, S 125. Vgl. *G. W. Hearn,* Researches on curves of second order, London 1846, S. 36 ff.; *A. Cayley,* Quart. Journ. pure appl. math. 8 (1867), S. 220/2 oder Coll. math. papers, Bd. 6, Cambridge 1893, S. 51/2

47) Nr. 309, 3, S. 127. Näheres findet man bei *A. Cayley,* Cambridge and Dublin math. Journ. 5 (1850), S. 148/52 oder Coll. math. papers, Bd. 1, Cambridge 1889, S. 496/9; Quart. Journ pure appl. math. 6 (1864), S. 25 ff. oder Coll. math. papers, Bd. 5, Cambridge 1892, S 260 ff.

48) Nr. 312, S. 132. Vgl. z. B. *O. Hesse,* Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie, Leipzig 1866, S. 16 oder Zeitschr. f. Math. und Phys. 11 (1866), S. 384.

49) Nr. 312, 5, S. 134. Vgl. die an unbewiesenen Sätzen reiche Abhandlung von *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 45 (1853), S. 189—211 oder Ges. Werke 2, Berlin 1882, S. 445—468. Für vollständige geometrische Ableitung sehe man die Abh. von *W. Fiedler,* Acta mathematica 5 (1884), S. 331—408.

50) Nr. 312, 8, S. 135. Vgl *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 1 (1826), S. 178/80 oder Ges Werke 1, Berlin 1881, S. 35/7. Einen geometrischen Beweis gab *A. S. Hart,* Quart. J. pure appl. math. 1 (1857), S. 219/21 [1855]. Nach *Steiners* Anleitung gab *H. Schröter* einen Beweis J. reine angew. Math. 77 (1874), S. 230/44, ferner *F. G Affolter,* Math. Ann. 6 (1873), S. 597—602. Die Steinersche Verallgemeinerung auf drei paarweise zu berührende Kreise statt der Seiten des Dreiecks hat *W. Godt* behandelt, J. reine angew. Math. 84 (1878), S. 259/63 [1877]. Man vgl. auch die analytischen umfassenden Untersuchungen von *A. Cayley,* Philos. Trans. London Roy. Soc. Jahrgang 1852, S. 253/78 oder Coll. math. papers, Bd. 2, Cambridge 1889, S. 57—86; ferner *F. Mertens,* Denkschr. der Akad. der Wissensch. in Wien, math.-naturw. Klasse, Bd. 36, 2. Abt. (1876), S. 195—234 [1875]. Ausführliche Literaturangaben findet man bei *M. Simon,* Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im 19. Jahrhundert, Leipzig 1906, S. 146/50.

51) Nr. 313, 3, S 137. Vgl. *J. Plücker,* Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, S. 198.

52) Nr. 314, S. 138. Der Satz von *Carnot* findet sich in dessen Géométrie de position, Paris 1803, S. 293, der Satz von *Chasles* in dessen Traité des sections coniques 1, Paris 1865, S. 27

53) Nr. 314, 4, S 139. Vgl. *J. Steiner*, Annales de mathématiques 19 (1828/9), S 3 [1828] oder Ges Werke, Bd. 1, Berlin 1881, S 184.

54) Nr. 316, S. 142. Diese Methode gab *S Aronhold*, J. reine angew. Math. 61 (1863), S. 101/3 [1862]. Vgl. auch *S. Gundelfinger*, Annali di mat. pura ed appl. (2) 5 (1871/3), S. 225/6, sowie dessen „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte", hrsgg. von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895, S 33/7; ferner *M. Pasch*, Arch. Math. Phys. (3) 25 (1917), S 231/6 [1915].

55) Nr. 317, 2, S. 144. Vgl. *J. Steiner*, Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), S. 41f. und S. 47 [1828] oder Ges. Werke, Bd. 1, Berlin 1881, S. 194 und 198.

56) Nr. 321, 3, S. 153. Vgl. *K. W. Feuerbach*, Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks, Nürnberg 1822, S. 38. Der folgende Beweis ist von *J. Casey*, und die Ausdehnung auf die Kreise des Apollonischen Problems, die er gleichfalls beweist, war von *Hart* gegeben.

57) Nr 322, S. 155. Für den Fall, daß die Polaren durch die einer bestimmten Richtung zugehörigen konjugierten Durchmesser gebildet werden, also einem unendlich fernen Pol zugehören, findet sich dieser Satz bei *G. Lamé*, Ann. math. pures appl. Bd. 7 (1816/7), S. 233 und Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818, S. 34. Allgemein hat den Satz *J. V. Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, 1. Aufl., Paris 1822, S 213, 2. Aufl, Bd. 1, Paris 1865, S. 206.

58) Nr. 322, 4, S. 157. Der Satz ist von *W. S. Burnside*

59) Nr. 322, 5, S. 157. Dieser Satz rührt her von *Williamson* und ist eine Form der Konstruktion von Kurven vierter und dritter Ordnung aus projektiven Involutionen mit selbst entsprechendem Scheitelstrahl.

60) Nr. 325, S. 168. Vgl. *A. Cayley*, A fifth memoir upon quantics, Philos. Transactions London, Bd. 148 (1858), London 1859, S. 429—463 oder Collected math. papers Bd. 2, Cambridge 1889, S 527—557, ferner *W. Fiedler*, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862. Für ein eingehenderes Studium der Invariantentheorie der binären Formen verweisen wir auf *A. Clebsch*, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872; *G. Salmon*, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, deutsch bearb. von *W. Fiedler*, 2. Aufl., Leipzig 1877; *F. Faà di Bruno*, Einleitung in die Theorie der binären Formen, deutsch bearb. von *Th. Walter*, Leipzig 1881; *P Gordan*, Vorlesungen über Invariantentheorie, hrsgg. von *G. Kerschensteiner*, Bd. 2, Leipzig 1887; *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, bearb. und hrsgg von *F. Lindemann*, Bd. 1, 3. Abteilung, 1. Aufl. Leipzig 1876, 2. Aufl. Leipzig 1906—1910; *W. Fr. Meyer*, Allgemeine Formen- und Invariantentheorie, 1. Bd., Binäre Formen, Leipzig 1909 (Sammlung Schubert Nr. 33). Für ternäre Formen kommt noch in Betracht *E. Study*, Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig 1889.

61) Nr. 326, S. 170. Vgl. *R. Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5. Aufl., Leipzig 1881, S. 135/6.

62) Nr. 327, S. 172. Man studiere die Abhandlung von *S. Aronhold*, J. reine angew. Math. 62 (1863), S. 281—345

63) Nr. 333, 2, S. 184. Vgl. *A. Cayley*, A fifth memoir upon quan-

tics, Philos. Trans. London, Bd. 148 (1858), London 1859, S. 438 oder Collected math. papers, Bd. 2, Cambridge 1889, S. 537.

64) Nr. 334, S. 184. Vgl. *G. Battaglini*, Giorn. di mat. 2 (1864), S. 170—179, 193—202, 243—253, 340—351 und 3 (1865), S. 24—31, 51—59, 218—227.

65) Nr. 335, S. 187. Diese Darstellung ist einem Manuskripte entnommen, das *W. Fiedler* nach dem Erscheinen seiner in Anm. 60 genannten Schrift vom Jahre 1862 von *A. Clebsch* erhalten hatte. Vgl. auch das Werk des Letztgenannten „Theorie der binären algebraischen Formen", Leipzig 1872.

66) Nr. 336, S. 190. Für die Theorie der Involution ist wichtig die Abhandlung von *A. Cayley*, Transact. Cambridge Philos. Soc., 11, Teil 1 (1866), S. 21—38 [1863] oder Collected math. papers, Bd. 5, Cambridge 1892, S. 295—312. Vgl. ferner *G. Salmon*, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, deutsch bearb. von *W Fiedler*, 2. Aufl., Leipzig 1877, S. 210 ff. Vgl endlich die Abhandlungen von *H. Wiener*, „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden", Darmstadt 1885 sowie „Geometrische Invariantentheorie der binären Formen", Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 17 (1908), S. 291—313.

67) Nr. 338, 1, S. 193. Das Beispiel ist von *L. Cremona.*

68) Nr. 340, S. 198. Vgl. die Abhandlung von *P. Gordan*, J. reine angew. Math. 69 (1868), S. 323/54, ferner *D. Hilbert*, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Jahrg. 1891, S. 232 ff.

69) Nr. 343, S. 203. Auf die Gleichung 3. Grades für λ hat zuerst *G. Lamé* hingewiesen in seiner Schrift Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818, S. 71/2; vollständig angegeben hat sie *J. Plücker*, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828, S. 241.

70) Nr. 345, S. 206. Vgl. *K. Kemmer*, Kriterien der Realität für die Schnittpunkte von Linien zweiter Ordnung, Diss. Gießen 1878, sowie *W. E. Story*, Amer Journ. math. 6 (1884), S. 225/34; vgl. auch *F. Gerbaldi*, Rendiconti circ mat. di Palermo 1 (1887), S. 327/37; *G. Sforza*, ebenda Bd. 2 (1888), S. 172/5. Bei *S. Gundelfinger*, Vorlesungen aus der analyt Geom. der Kegelschnitte, hrsgg. von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895, S. 371/7 werden die Kriterien für die Realität und das Zusammenfallen der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels mit Hilfe einer Kombinante des Büschels gegeben. Dieses Buch enthält eine geschlossene Entwicklung und Darstellung der metrischen Untersuchungen in allgemeinen projektiven Koordinaten. Sein zweiter Abschnitt behandelt die Kegelschnitt-Büschel und Scharen, ferner die Netze und Gewebe; ein Anhang enthält zahlreiche Aufgaben mit ihren Lösungen. Vgl auch *R. Gerlach*, Die Metrik in projektiven Koordinaten, Diss. Zürich 1899.

71) Nr. 345, 3, S. 209. Vgl. *W. Fiedler*, Archiv Math. Phys. (1) 39 (1862), S. 20/3.

72) Nr. 347, 2, S. 212. Vgl. *O. Hesse*, Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie, Leipzig 1866, S. 19/22, 31 oder Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), S. 387/90, 399; *P. Serret*, Géométrie de direction, Paris 1869, S. 130/1.

73) Nr. 348, S. 215 und Nr. 349, S. 216. Die Bedeutung der linearen Bedingung für die Koeffizienten der Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung ist von *O. Hesse* zuerst gefunden worden (J. reine angew. Math. 45 (1853), S. 83/7 [1852] oder Ges. Werke, München 1897, S. 298/303), und zwar hat *Hesse* den Inhalt seiner sich hierauf beziehenden Abhandlung, wie *J. Lüroth* in der Gesamtausgabe von Hesses Werken

(S. 700) bemerkt, schon am 1. Dezember 1837 in sein Diarium 1837/44 aufgezeichnet. An die Ergänzungen *G. Salmons* in Nr. 348, 1 knüpfte *H. J. S. Smith* in einer wichtigen Abhandlung (Proc. London math. Soc. (1) 2 (1866/9), S. 85/100 oder Papers 1, Oxford 1894, S 524/40) an, die die Lösung der Probleme in Nr. 349 enthält. Nur die Konstruktion der besonderen Aufgabe 7, S. 219f. wurde schon früher von *E. de Jonquières* (Nouv. Ann. math. (1) 14 (1855), S. 435/40) gegeben. Man vergleiche auch das Buch von *H. Picquet,* Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques, Paris 1872; ferner besonders für die algebraische Behandlung die Arbeit von *J. Rosanes,* „Über Systeme von Kegelschnitten", Math. Ann. 6 (1873), S. 264/312 [1872]. Ferner sei noch genannt das Werk von *W. F. Meyer,* Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883. Die im Texte erwähnten Redewendungen harmonisch umgeschrieben bez. eingeschrieben stammen von *Smith*; *Rosanes* nennt die betreffenden Kegelschnittpaare konjugiert; die Ausdrücke stützen, tragen, ruhen, apolar hat *Th. Reye* eingeführt (Geometrie der Lage, 4. Aufl., 1. Teil, Leipzig 1899, S. 266; J. reine angew. Math 78 (1874), S. 97).

74) Nr. 350, S. 221. Satz von *H. Faure,* Nouv. Ann. math. (1) 19 (1860), S. 234. Vgl. auch *L. Painvin* ebenda S. 294 und *G. Salmon* ebenda S. 347/8; *W. Fiedler,* Zeitschr. für Math. und Phys. 6 (1861), S. 140/6; *J. Steiner,* Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2 Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, bearb. von *H. Schröter,* 3. Aufl., hrsgg. von *R. Sturm,* S. 178/9; *S. Gundelfinger,* Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, hrsgg. von *F. Dingeldey,* Leipzig 1895, S. 343/4. *A. Cazamian* (Nouv. Ann math. (3) 13 (1894), S. 229) verallgemeinerte den Satz von *Faure* und zog viele Folgerungen aus ihm (ebenda S. 324/48). Vgl. auch *A. F. Torry,* The Messenger of math. 10 (1881), S. 161/70.

75) Nr. 350, 2, S. 222. Der Satz ist von *Hart.*

76) Nr. 350, 3, S. 222. Das Ergebnis dieses Beispiels stammt von *W. S. Burnside.*

77) Nr. 350, 9, S. 223. Das Beispiel findet man zuerst bei *N. M. Ferrers,* Quart. J. pure appl math. 7 (1866), S. 22.

78) Nr. 351, S. 223. Mit der Aufgabe, irgend einem gegebenen Kegelschnitt k_1 ein n-Eck einzuschreiben, dessen n Seiten einem anderen gegebenen Kegelschnitt k_2 umgeschrieben sind, hat sich *J. V. Poncelet* beschäftigt (Traité des propriétés projectives des figures, 1. Aufl., Paris 1822, S. 358/62; 2. Aufl. Bd. 1, Paris 1865, S. 347/50). Er gelangt zu dem Satz: Schreibt man k_1 einen gebrochenen Linienzug ein, dessen einzelne Geraden k_2 berühren, und schließt sich dieser Linienzug nicht, so hat die Aufgabe keine Lösung; schließt er sich aber, so gibt es unendlich viele Lösungen, indem sich alsdann mit jedem Punkt von k_1 als Anfangspunkt ein geschlossenes n-Eck zeichnen läßt. Zu Nr. 350 und 351 vergleiche man die Note von *E. Beltrami,* Giorn. math. 9 (1871), S. 341/4 oder Opere mat. Bd. 2, Mailand 1904, S. 182/7, die von der Betrachtungsweise in Nr. 291 ausgeht. Die Bedingung für das ein- und umgeschriebene Dreieck wurde von *A. Cayley* mit Hilfe der Theorie der elliptischen Integrale gegeben (London Edinburg Dublin philos. mag. (4) 5 (1853), S. 281/4; (4) 6 (1853), S. 99/102, 376/7 oder Coll. math. papers Bd. 2, Cambridge 1889, S. 53/6; 87/90, 91/2; Philos. Trans. London, Bd. 151 (1861), S. 225/39 oder Coll math. papers Bd. 4, Cambridge 1891, S. 292/308; Comptes Rendus acad. sc. Paris 55 (1862), S. 700 oder Coll. math. papers Bd. 5, Cambridge 1892, S. 21/2). Für Kreise und ein beliebiges Vieleck hatte *C. G. J. Jacobi* die Bedingung mit Hilfe der

elliptischen Funktionen abgeleitet (J. reine angew. Math. 3 (1828), S. 381/9 oder Werke Bd. 1, Berlin 1881, S. 284/93), für Kugelkreise *F. J. Richelot* (J. reine angew. Math. 5 (1830), S. 250/67 [1829]. *Cayley* beweist, daß, wenn die Quadratwurzel aus der Diskriminante $\varkappa^3 A + 3\varkappa^2 \mathrm{H} + 3\varkappa\Theta + B$ von $\varkappa f + g$, nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt, einen Ausdruck von der Form $a + b\varkappa + c\varkappa^2 + \cdots$ ergibt, die Bedingungen für die Möglichkeit eines dem Kegelschnitt $f = 0$ eingeschriebenen und dem Kegelschnitt $g = 0$ umgeschriebenen n-Ecks für $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ durch die Ausdrücke

$$c = 0, \quad d = 0, \quad ce - d^2 = 0, \quad df - e^2 = 0$$

$$ceg + 2def - cf^2 - d^2g - e^3 = 0, \quad dfh + 2efg - dg^2 - e^2h - f^3 = 0,$$

gegeben sind, die sämtlich aus den Koeffizienten der Reihenentwickelung gebildete Determinanten darstellen. Man vergleiche auch *J. Rosanes* und *M. Pasch*, J. reine angew. Math. 64 (1865), S. 126/66 [1864]; *Th. Moutard* im Anhang zu *J. V. Poncelets* Applications d'analyse et de géométrie, Bd. 1, Paris 1862, S. 535/60; *M Simon*, J. reine angew. Math. 81 (1876), S. 301/23 [1875]; *S. Gundelfinger*, J reine angew. Math. 83 (1877), S. 171/4; *G. H. Halphen*, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Bd 2, Paris 1888, S. 367/412; *G. Kohn*, Sitzungsb. Akad. Wien Bd. 100, Abt. IIa (1891), S. 6/19 [1890]. *J. Thomae* (Berichte d. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Klasse, Bd. 47 (1895), S. 352/68) erledigt das Schließungsproblem, indem er eine symmetrische zwei-zweideutige Verwandtschaft zugrunde legt und rein geometrische Betrachtungen benutzt. Auch bei *K. Rohn* (Berichte d. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys Klasse, Bd. 60 (1908), S. 94/131) bilden die eben genannten Verwandtschaften den Ausgangspunkt seiner analytisch-geometrischen Betrachtungen. Er gibt bis $n = 23$ wirklich die Bedingungen an, die erfüllt sein müssen, wenn der eine von zwei Kegelschnitten dem n-Eck eingeschrieben, der andere umgeschrieben sein soll. Außerdem betrachtete er n-Ecke, die einem Kegelschnitt k_0 eingeschrieben sind, während $n-1$ Seiten je einen von $n-1$ Kegelschnitten $k_1, k_2, \ldots. k_{n-1}$ berühren, die mit k_0 einem und demselben Büschel angehören; er zeigte, daß dann auch die letzte Seite stets einen Kegelschnitt k_n des Büschels berührt. *Rohn* zeigt ferner, daß bei Änderung der Reihenfolge der von den einander folgenden Seiten des n-Ecks berührten Kegelschnitte immer noch geschlossene n-Ecke vorhanden sind, wenn es solche bei der ursprünglichen Reihenfolge gab. Wir verweisen ferner noch auf *K. Rohn*, Berichte d. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Kl., Bd. 65 (1913), S. 185—194; *H. Liebmann*, Sitzgsb. Akad. d. Wissensch. zu München, math-phys. Kl., Jahrg. 1916, S. 19—30; *J. Thomae*, Ber. Ges. d. Wissensch. Leipzig, math.-phys. Kl., Bd. 69 (1917), S. 287—305. Einen geschichtlichen Überblick über das Schließungsproblem gibt *G. Loria*, J. poligoni di Poncelet, Turin 1889; ein Nachtrag hierzu in Bibliotheca mathem. (2) 3 (1889), S. 67/74.

79) Nr. 352, S. 226. Vgl. *G. Salmon*, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, deutsch bearb. von *W. Fiedler*, 2. Aufl., Leipzig 1877, S. 149; *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, bearb. und hrsgg. von *F. Lindemann*, Bd. 1, 1. Aufl., Leipzig 1876, S. 266; 2. Aufl., 2. Lieferung, Leipzig 1910, S. 486.

80) Nr. 355, S. 232. *G. Desargues* bemerkte, daß die Punktepaare, in denen ein beliebiger Kegelschnitt und die zwei Paare von Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks von einer beliebigen Geraden getroffen werden, eine Involution bilden (Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cône avec un plan, Paris 1639 oder

Œuvres de *G. Desargues*, hrsgg. von *N. G Poudra*, Bd. 1, Paris 1864, S. 188). *Ch. Sturm* erweiterte den Satz, indem er zeigte, daß überhaupt drei beliebige, einem Viereck umgeschriebene Kegelschnitte von irgend einer Geraden in Punktepaaren einer Involution getroffen werden (Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), S. 180).

81) Nr. 355, S 233 und Nr. 356, S. 233. Vgl. *K. G. Chr. von Staudt*, Über die Kurven 2. Ordnung, Nürnberg 1831, S. 24/5. Die Wichtigkeit dieser beiden Kegelschnitte als Kovarianten betonte zuerst *G. Salmon* (Cambr. Dublin math. J. 9 (1854), S. 30 [1853]). Vgl. auch *H. Grassmann*, Projektive Geometrie der Ebene, Bd. 2, 1. Teil, Leipzig und Berlin 1913, S. 355/7 und 365/7.

82) Nr. 356, 5, S. 236. Die Kurve vierter Ordnung, die einem äquianharmonischen Doppelverhältnis $\left(\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$ zugehört, wurde von *J. Thomae* näher untersucht (Berichte d. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Kl., Bd. 64 (1912), S. 446/78).

83) Nr. 357, 5, S. 239. Vgl. *G. Salmon*, London Edinburg Dublin philos. magazine (4) 13 (1857), S. 190.

84) Nr. 357, 6, S. 239. Vgl. *G. Salmon*, London Edinburg Dublin philos. magazine (4) 13 (1857), S. 190/1 und 267/9. *A. Cayley* betrachtete (Quart. Journ. pure appl. math. 1 (1857), S. 344/54 oder Coll. papers, Bd. 3, Cambridge 1890, S. 67—75) das Problem den Ort der Spitze eines Dreiecks zu finden, das einem gegebenen Kegelschnitt f umgeschrieben ist, während die Basisecken gegebene Kurven durchlaufen. Sind diese Kurven Kegelschnitte, so ist der Ort von der 8. Ordnung, er berührt f in den Punkten, in denen ihn die in bezug auf f genommenen Polaren der Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte treffen.

85) Nr. 357, 7, S. 239. Vgl *G. Salmon*, London Edinburg Dublin philos. magazine (4) 13 (1857), S. 269 und 337.

86) Nr. 357, 8, S. 240. Vgl. *G. Salmon*, London Edinburg Dublin philos. magazine (4) 13 (1857), S. 337/8.

87) Nr. 357, 9, S. 240. Diese projektive Kurvenerzeugung ist von *G. H. Halphen* (J math. pures appl (3) 2 (1876), S. 96 ff.) für f als irgend eine algebraische Kurve benutzt worden, um Singularitäten zu transformieren.

88) Nr. 358, S. 241. Vgl. die Abhandlung von *S Gundelfinger* „Zur Theorie des Kegelschnittbüschels" (Zeitschr. Math. Phys 20 (1875), S. 153/9 [1874]); ferner *S Gundelfinger*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, hrsgg. von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895, S. 366 ff.; *J. Walker* (Quart. J. pure appl. math. 10 (1870), S. 163/7, 317/20 [1869]).

89) Nr. 358, S. 241. In der vorhin erwähnten Abhandlung von *S. Gundelfinger* (Zeitschr. Math. Phys. 20, S. 154) steht fälschlich $\varkappa\varrho - \lambda\sigma$ statt $\varkappa\sigma - \lambda\varrho$; in Zeile 14 v. u. ist daselbst der Faktor $\frac{1}{4}$ zu ersetzen durch $\frac{1}{3}$, in Zeile 1 v. u. ist bei $Q^2(\varkappa, \lambda)$ der Faktor 8 beizufügen. — Zu Gl. (59) vgl. auch *S. Gundelfinger*, J. reine angew. Math. 74 (1872), S. 87/9 [1871].

90) Nr. 358, B. S. 242. Vgl. *S. Gundelfinger*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, hrsgg. von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895, S. 381.

91) Nr. 359, S. 245. *S. Gundelfinger* hat zuerst bemerkt, daß die Kovariante m eine Kombinante des Kegelschnittbüschels ist; er hat auch zuerst auf die Bedeutung der Kurve für die Geometrie des Büschels hingewiesen (Zeitschr. Math. Phys. 20 (1875), S. 156 und 159 [1874]).

92) Nr. 360, S. 245. Dieser schöne Satz wurde von *F. Mertens* (Sitzungsber. Akad. Wien Bd. 91, 2. Abt. (1885), S. 637/9) gefunden.

93) Nr. 360, S. 246. Drei auf solche Weise miteinander verbundene Kegelschnitte erwähnt zuerst *J. Rosanes* in seiner Inaugural-Dissertation „De polarium reciprocarum theoria observationes“, Breslau 1865, S. 13, ferner in Math. Ann. 2 (1870), S. 552. Hier wird auch erwähnt, daß für je zwei solche Kegelschnitte die zugehörige Staudtsche Kurve 2. Ordnung, die durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten geht, mit der Staudtschen Kurve 2. Klasse, die die acht in den Schnittpunkten der Kurven gezogenen Tangenten berührt, zusammenfällt. Auch *N. M. Ferrers* (Quart. J. pure appl. math. 7 (1866), S. 20/2) gelangt zu drei Kegelschnitten, die in der angegebenen Weise durch die Polaren ihrer Punkte miteinander verbunden sind, indem er sich fragt, was es bedeutet, wenn für zwei sonst beliebige Kegelschnitte die Invarianten H und Θ verschwinden. Als Kurven des Büschels werden die äquianharmonischen Kegelschnitte bei *Rosanes* und *Ferrers* nicht betrachtet; als solche findet man sie zuerst wohl bei *G. Battaglini* (Giorn. mat. 8 (1870), S. 134 und 144), der die quadratische Gleichung für den diesen Kurven zugehörigen Parameter λ ableitet, ebenso die kubische Gleichung für die den drei harmonischen Kegelschnitten zugehörigen Parameterwerte. Alsdann leitete *S. Gundelfinger* an den in Anm. 88 genannten Stellen mehrere geometrische Eigenschaften der äquianharmonischen und harmonischen Kurven des Büschels ab; auch *F. Gerbaldi* (Annali di mat. pura ed appl. (2) 17 (1889), S. 169/72) ist in diesem Zusammenhange zu nennen. Vgl. ferner *G. Kohn*, Sitzungsber. Akad. Wien 93, 2. Abt. 1886, S. 314/36 und 349f.; *F. Lindemann* in der 2. Auflage der von ihm bearbeiteten und herausgegebenen „Vorlesungen über Geometrie von *A. Clebsch*“, 2. Lieferung, Leipzig 1910, S. 517/29.

Zwei Kegelschnitte, die in solcher Beziehung zueinander stehen wie die beiden äquianharmonischen (die für sie gebildeten simultanen Invarianten H und Θ verschwinden) werden von *F. Gerbaldi* in Involution befindlich genannt, Atti della R. accad. delle scienze di Torino 17 (1881/2), Torino 1881, S. 566 [1882]. Er betrachtet Gruppen von sechs solchen paarweise in Involution befindlichen Kegelschnitten, an die sich neuerdings ein hohes wissenschaftliches Interesse knüpft. Es betrifft die neuere gruppentheoretische, durch *A. Clebsch* und *F. Klein* eingeleitete Theorie der Resolventen der allgemeinen algebraischen Gleichungen höherer Grade, nach dem Prinzip, daß die Vertauschungen der Wurzeln unter sich durch lineare Transformationen des Raumes ersetzt werden können. Vgl. *A. Clebsch* „Über die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichung 5. Grades und die geometrische Theorie des ebenen [illegible], M[illegible] Ann. 4 (1871), S. 284/345 und das Werk von *F. Klein* „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“, Leipzig 1884. An dem vorher genannten Ort folgt unmittelbar (S. 346/58) auf die Arbeit von *Clebsch* der Aufsatz von *F. Klein* „Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen“, in dessen Schlußabschnitt S. 355/8 die Wurzeln der Gleichung 6. Grades durch sechs paarweise in Involution liegende lineare Komplexe dargestellt werden, so daß ihren Vertauschungen lineare Umformungen des Punktraumes entsprechen. Nun hat in Bd. 47 der Math. Ann. (1896), S. 531/56 [1895] *A. Wiman* (Lund) seine Untersuchungen „Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Kollineationen“ veröffentlicht, die mit den geraden Vertauschungen von 6 Dingen holoedrisch isomorph ist, und in der zwei verbundene Gruppen von je 6 in 15 Paaren harmonischen Kegel-

chnitten als Elemente auftreten (sechs gleichberechtigte Ikosaederegelschnitte). In Bd. 50 (1898), S. 473/6 [1897] hat *F. Gerbaldi* eine gedrängte Übersicht seiner Ergebnisse angeschlossen.

94) Nr. 360, 4, S. 247. Dieser Satz wurde dem Herausgeber (*F. D.*) m März 1901 von *S. Gundelfinger* mündlich mitgeteilt, die Sätze in 3. 5 und 6 fand der Herausgeber im August 1915. Dreiecke in sechsach perspektiver Lage hat zuerst *J. Rosanes* in seiner in Anm. 93 erwähnten Inaugural-Dissertation S. 18/20 behandelt; er zeigte auch, daß zwei solche Dreiecke nie reell sind, daß vielmehr zwei reelle Dreiecke höchstens *vierfach* in perspektiver Lage sein können. Vgl. auch *J. Rosanes*, Math. Ann. 2 (1870), S. 549/52 und *H. Schröter* ebenda, S. 553/62. *S. Gundelfinger* bewies, daß bei sechsfach perspektiver Lage zweier Dreiecke die 9 Schnittpunkte ihrer Seiten die Wendepunkte jeder durch sie gelegten Kurve dritter Ordnung sind (Math. Ann. 7 (1874), S. 455 [1873] und Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), S. 252/4; vgl. auch *J. Vályi*, Monatshefte Math. Phys. 9 (1898), S. 169/76. *H. Wiener* hat die Sätze über die Lage der sechsfach perspektiven Dreiecke in seiner Abhandlung „Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen", Halle 1901, S. 30 durch eine Figur erläutert, wobei er für die vorkommenden imaginären Elemente die v. Staudtsche Darstellung des Imaginären wählte. Wir erwähnen ferner eine Abhandlung über mehrfach perspektive Dreiecke und Tetraeder von *E. Hess*, Math. Ann. 28 (1887), S. 167—260 [1886].

95) Nr. 360, 7, S. 248. Vgl. *L. Cremona*, The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of mathematics 3 (1866), S. 13/4. Schon 1864 wurde der Satz, daß die 14 im Text angegebenen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, von *Cremona* als Aufgabe zum Beweis gestellt (Giorn. mat. 2 (1864), S. 30) und dann von *V. Janni* (ebenda S. 49/50), und von *G. Battaglini* (ebenda S. 52/6) bewiesen.

96) Nr. 360, 8, S. 249. Diese Gleichung (nur mit etwas anderer Bezeichnungsweise) wurde zuerst von *N. M. Ferrers* aufgestellt, The Oxford, Cambridge, and Dublin Messenger of mathematics 3 (1866), S. 68/70. Vgl. auch *S. Gundelfinger*, Zeitschr. Math. Phys. 20 (1875), S. 159 [1874].

97) Nr. 360, 10, S. 249. Vgl. *F. Gerbaldi*, Annali di mat. pura ed appl. (2) 17 (1889), S. 168/71; *F. Lindemann* in der 2. Aufl. der von ihm bearbeiteten und herausgegebenen „Vorlesungen über Geometrie von *A. Clebsch*", 2. Lieferung, Leipzig 1910, S. 520/3.

98) Nr. 361, 1, S. 251. *A. Cayley* gab im wesentlichen diese allgemeine Auflösung des Problems der Berührungen (J. reine angew. Math. 39 (1850), S. 4/13 [1848] oder Coll. math. papers Bd. 1, Cambridge 1889, S. 522/31).

99) Nr. 361, 3, S. 255. Diese Gleichung erhielt zuerst *J. Casey* durch Betrachtungen der sphärischen Geometrie (Proc. R. Irish Acad., 1866).

100) Nr. 361, 4, S. 256. Für diese Ausdehnung des *Feuerbach*schen Satzes siehe *G. Salmon*, Quart. J. pure appl. math. 6 (1864), S. 67/73 [1863].

101) Nr. 362, S. 257. Vgl. die Abhandlung von *S. Aronhold* „Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie", J. reine angew. Math. 62 (1863), besonders S. 317/20 und 328/9.

102) Nr. 362, S. 260. Für die Transformation auf die Hauptachsen studiere man die Abhandlung von *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 12 (1834), S. 50ff. [1833] oder Ges. Werke, hrsgg. von *K. Weierstrass*, Bd. 3, Berlin 1884, S. 247ff. und *O. Hesse*, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1861, S. 237ff.; 3. Aufl., hrsgg. von

S. Gundelfinger, Leipzig 1876, S. 283ff., ferner *K. Weierstrass,* Monatsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Jahrg. 1858, Berlin 1859, S. 207/17 oder Math. Werke 1, Berlin 1894, S. 232/43.

103) Nr. 362, 2 u. 4, S. 261 u. 262. Die Darstellung der Transformation der Gleichungen zweier Kegelschnitte auf das gemeinsame System harmonischer Pole in B. 2 und die Gleichungen der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte in B. 4 hat *S. Aronhold* gegeben in der in Anm. 101 erwähnten Abhandlung; vgl. daselbst S. 328/9 und 319/20.

104) Nr. 363, S. 266. Die Determinante, die man aus den partiellen Ableitungen erster Ordnung von n homogenen Formen von n Veränderlichen bilden kann, bezeichnet man nach dem Vorgange von *J. J. Sylvester* (Philos. Trans. London, Bd. 143 (1853), S. 476 und 546 oder Coll. math. papers Bd. 1, Cambridge 1904, S. 506 und 583) als *Jacobische Determinante* mit Rücksicht auf eine Abhandlung von *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 22 (1841), S. 327/8 oder Ges. Werke, hrsgg. von *K. Weierstrass,* Bd. 3, Berlin 1884, S. 403 oder *W. Ostwald,* Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 78, Leipzig 1896, S. 15. Daher der Name *Jacobische Kurve.* Die Bezeichnung *Hessesche Kurve* oder *Hessiane* rührt von *L. Cremona* „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane“ in den Memorie accad. scienze Ist. Bologna (1) 12 (1861), S. 411 oder Opere matem. Bd. 1, Mailand 1914, S. 438, deutsche Übersetzung von *M. Curtze* „Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven“, Greifswald 1865, S. 212f.

105) Nr. 365, S. 271. Vgl. *E. Beltrami,* Mem. Ist. Bologna (2) 2 (1862), S. 366/82 oder Opere matem. 1, Mailand 1902, S. 49/62; Giorn. mat. 1 (1863), S. 110/6; vgl. übrigens auch *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 30 (1846), S. 104/5; Giorn. Arcadico di scienze (Rom) 99 (1844), S. 157/60 oder Werke 2, Berlin 1882, S. 335/6.

106) Nr. 365, S. 272. Vgl. zum Vorhergehenden auch *S. Gundelfinger,* Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, hrsgg. von *F. Dingeldey,* Leipzig 1895, S. 195—201; ferner das in Anm. 81 genannte Werk von *H. Grassmann,* S. 370/7 und 380—393.

107) Nr. 365, S. 273. Dieses System wurde zuerst von *P. Gordan* aufgestellt und von *F. Lindemann* mitgeteilt in dem Buche „Vorlesungen über Geometrie mit besonderer Benutzung der Vorträge von *Alfred Clebsch*“, bearb. und hrsgg. von *F. Lindemann,* Bd. 1, Leipzig 1876, S. 288/302; 2. Aufl., 2. Lieferung Leipzig 1910, S. 508/30.

108) Nr. 366, 2, S. 277. Dies Beispiel ist von *W. S. Burnside.*

109) Nr. 367, S. 278. Vgl. *A. Cayley,* J. math. pures appl. 9 (1844), S. 290/1 oder Coll. math. papers Bd. 1, Cambridge 1889, S. 187. Die Bezeichnung *Cayleysche Kurve* stammt von *L. Cremona* „Introduzione ad una teoria generale delle curve piane“ in den Memorie accad. scienze Ist. Bologna (1) 12 (1861), S. 412/3 oder Opere matem. Bd. 1, Mailand 1914, S. 439, deutsche Übersetzung von *M. Curtze* „Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven“, Greifswald 1865, S. 215. Mitunter wird auch die Bezeichnung *Hermitesche Kurve* gebraucht mit Rücksicht auf die Abhandlung von *Ch. Hermite,* J. reine angew. Math. 57 (1860), S. 371 oder Œuvres Bd. 2, Paris 1908, S. 100. Sind f, g, h die partiellen Ableitungen einer ternären kubischen Form F, so ist die Cayleysche Kurve die „Pippian“ von F (*A. Cayley,* Philos Trans. London, Bd. 147, Jahrg. 1857, London 1858, S. 415 [1856] oder Coll. math. papers Bd. 2, Cambridge 1889, S. 381). Näheres findet man noch bei *A. Clebsch,* Vorlesungen über Geometrie, bearb. und hrsgg. von *F. Lindemann,* Bd. 1, Leipzig 1876, S. 519ff., wo auch weitere Literaturangaben und bei *G. Salmon,* Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven,

bearb. von *W. Fiedler*, 2. Aufl., Leipzig 1882, 5. Kapitel, besonders S. 195ff.

110) Nr. 367, S. 280. Vgl. *S. Gundelfinger*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, hrsgg. von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895, S. 225.

111) Nr. 367, 2, S. 281. *W. Fiedler* wurde durch *S. Gundelfinger* an dieses Beispiel erinnert. Vgl. das dual entsprechende Beispiel in dem soeben in Anm. 110 genannten Buche, S. 388.

112) Nr. 368, 1, S. 284. Die Invariante T wurde zuerst von *J. J. Sylvester* (Cambridge Dublin math. J. 8 (1853), S. 267 oder Coll. math. papers, Bd. 1, Cambridge 1904, S. 420) gegeben, die Beziehung zwischen T und den Invarianten Θ_{123}, Θ_{122}, Θ_{133} usw. von *W. S. Burnside*, Quart. J. pure appl. math. 10 (1870), S. 244 [1869]; von diesem stammen auch mehrere andere in Nr. 368 enthaltene Ergebnisse (Quart. J. 10, S. 239ff.). Der mit Q bezeichneten Determinante auf Seite 240 der Abhandlung von *Burnside* ist übrigens ein Minuszeichen vorzusetzen. Zum System von drei ternären quadratischen Formen sehe man auch *S. Gundelfingers* an *Ch. Hermite* anknüpfende, algebraisch weiterführende Untersuchungen in J. reine angew. Math. 80 (1875), S. 73/82 [1874], ferner *C. Ciamberlini*, Giorn. mat. (1) 24 (1886), S. 141/57.

113) Nr. 369, S. 285. Vgl. *W. S. Burnside* a. a. O., S. 241.

114) Nr. 369, S. 285. Ebenda S. 243. Andere Darstellungen gaben mit Hilfe der Symbolik der ternären quadratischen Formen *J. Rosanes*, Math. Ann. 6 (1873), S. 280/1 [1872], ferner *C. Ciamberlini*, Giorn. mat. 1 (24) (1886), S. 154/7, sowie *K. Rohn*, Berichte der kgl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Klasse, Bd. 67 (1915), S. 101/5. Die Darstellung von *J. Rosanes* findet man auch in dem Werke *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, bearb. und hrsgg. von *F. Lindemann*, Bd. 1, Leipzig 1876, S. 521/4.

115) Nr. 371, 2, S. 290 und Nr. 372, 2, S. 292. Diese Beispiele stammen von *W. S. Burnside*.

116) Nr. 371, 3, S. 290. Für *beliebige* projektive Koordinaten findet man die entsprechende Formel mit ihrer Ableitung bei *S. Gundelfinger*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, hrsgg. von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895, S. 271/2.

117) Nr. 373, S. 293. Vgl. *P. J. Hensley*, Quart. Journ. 5 (1862), S. 177—183 [1861] und *A. Cayley*, ebenda S. 275—280 oder Collected math. papers, Bd. 4, Cambridge 1891, S. 505—509. Die Entwicklung des Textes gab *G. Salmon*, Quart. Journ. 5 (1862), S. 307ff. Über die Behandlung des Problems der Brennpunkte mit Hilfe der Algebra binärer Formen durch Einführung einer komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ veröffentlichte *F. H. Siebeck* eine interessante Abhandlung J. reine angew. Math. 64 (1865), S. 175—182 [1864]. Hier findet man z. B. (S. 177) den Satz: Sind die beiden Brennpunktpaare zweier Kegelschnitte vier harmonische Punkte eines Kreises, so liegen die acht Berührungspunkte der vier gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte auf einem Kreis. Und für eine Kegelschnittschar gibt es ein festes Punktepaar, das mit den Brennpunkten jeder Kurve der Schar vier harmonische Punkte auf einem Kreis bildet.

Die Anwendung der in den Beispielen von Nr. 373 enthaltenen allgemeinen Ergebnisse auf die einem Dreieck um- und eingeschriebenen Kegelschnitte (Nr. 302/4) und auf die Kegelschnitte mit demselben Tripel harmonischer Pole (Nr. 299) liefert zahlreiche interessante Sätze. Vgl. *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 55 (1858), S. 362f. oder Ges. Werke, hrsgg. von *K. Weierstrass*, Bd. 2, Berlin 1882, S. 669f. und die

sich darauf beziehende Dissertation von *K. Dörholt,* Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte, Münster 1884.

118) Nr. 374, S. 297. Der Inhalt der Nummern 375—377 und 380—382 ist im wesentlichen eine freie Übertragung mehrerer Absätze der wichtigen Abhandlung von *A. Cayley* „A sixth memoir upon quantics“, Philos. Trans. Roy Soc London, Bd. 149, Jahrg. 1859, London 1860, S. 61—90 [1858] oder Coll. math. papers, Bd. 2, Cambridge 1889, S. 561—592, und zwar entsprechen den Nummern 375, 376, 377 des vorliegenden Buches bei Cayley die Absätze 165/6; 209/10; 211/13, den Nummern 380, 381, 382 die Absätze 205/8; 214/5; 216/8. Der Inhalt der Nummern 378/9 und 383—385 ist der Arbeit von *F. Klein* „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“ (Math. Ann. 4 (1871), S. 573—625) entnommen und zwar entsprechen den Nummern 378 und 379 des vorliegenden Buches die Paragraphen 3/4 bez. 7, den Nummern 383, 384, 385 die Paragraphen 9, 11/12, 13 der Abhandlung von *Klein*. Auch ein Teil von Nummer 382 ist § 4 dieser Abhandlung entnommen. In freier deutscher Übertragung erschien die *Cayley*sche Theorie schon in der zweiten Auflage von *W. Fiedlers* Bearbeitung der Salmonschen „Conic sections“ im Jahre 1866; vgl. auch *W. Fiedler* „Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen“, Leipzig 1862, S. 217—235.

F. Klein hat in der vorhin erwähnten Abhandlung gezeigt, wie die Euklidische Metrik als Sonderfall der Cayleyschen Maßbestimmung gewonnen werden kann. Außerdem hat er daselbst die auf die Parallelentheorie sich beziehenden Ergebnisse der Arbeiten von *C. F. Gauss, N. I. Lobatschefskij, W.* und *J. Bolyai* sowie anschließende Betrachtungen von *B. Riemann* und *H. Helmholtz* in neuer Weise dargelegt und die Beziehung der *Cayley*schen Maßbestimmung zu den verschiedenen Maßgeometrien entwickelt, die sich den eben erwähnten Parallelentheorien anreihen.

Was *Gauss* betrifft, so sind mehrere *Briefe* zu erwähnen, besonders solche an *W. Bolyai, Chr. L. Gerling, W. Olbers, F. W. Bessel, H. C. Schumacher,* ferner mehrere *Notizblätter*; näheres findet man in *C. F. Gauss*' Werke, Bd. 8, Leipzig 1900, S. 157—268. Wie Gauss in einem Briefe an Schumacher vom 28. November 1846 bemerkt, geht seine Beschäftigung mit einer Geometrie, die stattfinden müßte, wenn die Euklidische nicht die wahre wäre, auf das Jahr 1792 zurück (Briefwechsel zwischen *C. F. Gauss* und *H. C. Schumacher,* hrsgg. von *C. A. F. Peters,* Bd. 5, Altona 1863, S. 247); Gauss war damals erst 15 Jahre alt. Vgl. ferner *P. Stäckel* und *F. Engel* „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss“, Leipzig 1895, S. 209—236. Auch in der Festrede von *E. Schering* „Carl Friedrich Gauss' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr“ (Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Kl., Bd. 22 (1877), oder Ges. math. Werke von *E. Schering,* hrsgg. von *R. Haussner* und *K. Schering,* 2. Bd., Berlin 1909, S. 176—213) wird der wertvolle Inhalt von Briefen an *W. Bolyai* und an *F. W. Bessel* mitgeteilt. Wir erwähnen ferner den sehr interessanten, von *F. Schmidt* und *P. Stäckel* herausgegebenen Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Wolfgang Bolyai,* Leipzig 1899. Einen ausführlichen Bericht über die Untersuchungen von *Gauss* im Gebiete der nicht-Euklidischen Geometrie gibt *P. Stäckel* in seiner Abhandlung „C. F. Gauss als Geometer“, Nachr. von der kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Beiheft zum Jahrg. 1917, S. 38—66.

Die hier in Betracht kommenden Abhandlungen von *N. I. Lobatschefskij* sind: „Über die Anfangsgründe der Geometrie“, zuerst in

russischer Sprache im Kasaner Bote 1829—1830 erschienen und „Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien", ebenfalls russisch in den Kasaner Gelehrten Schriften 1835—1837. Diese beiden Arbeiten wurden von *F. Engel* ins Deutsche übersetzt und unter dem Titel „*N. I. Lobatschefskij.* Zwei geometrische Abhandlungen", 1. Teil, Leipzig 1898 herausgegeben. Der 1899 erschienene, ebenfalls von *Engel* verfaßte zweite Teil des Werkes enthält zahlreiche Anmerkungen und einen ausführlichen Bericht über Lobatschefskijs Leben und Schriften. Wir nennen ferner „Imaginäre Geometrie" und „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale". Diese beiden Abhandlungen erschienen zuerst in den Kasaner Gelehrten Schriften 1835 bez. 1836 in russischer Sprache. Sie wurden von *H. Liebmann* ins Deutsche übertragen und mit zahlreichen Anmerkungen versehen und bilden Heft 19 der „Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften" (begründet von M. Cantor), Leipzig 1904. Wir nennen endlich noch den Aufsatz „Géométrie imaginaire", J. reine angew. Math. 17 (1837), S. 295—320, ferner „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien", Berlin 1840 (ein Facsimiledruck erschien 1887) und „Pangeometrie", zuerst in russischer Sprache in Kasan 1856 erschienen. Eine deutsche, von *H. Liebmann* veranstaltete Übersetzung der Pangeometrie bildet Heft 130 von Ostwalds Klass. der exakten Wissensch., Leipzig 1902. Alle diese Schriften finden sich auch in der vollständigen Sammlung der geometrischen Arbeiten *Lobatschefskijs,* von denen der erste Teil 1883, der zweite Teil 1886 in Kasan erschienen ist. Vgl. ferner *J. Frischauf* „Elemente der absoluten Geometrie", Leipzig 1876, ein Buch, das übrigens einige Unrichtigkeiten enthält.

Bei *Wolfgang Bolyai* (Vater) und *Johann Bolyai* (Sohn) erwähnen wir das Werk des Vaters *W. Bolyai de Bolya* „Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi", Bd. 2 „Elementa geometriae et appendices". Als Anhang enthielt dieser Band eine Abhandlung des Sohnes *J. Bolyai* „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens". Das Werk erschien im Jahre 1833 in Maros-Vásárhely. Eine neue, von *J. Kürschák, M. Réthy, B. Tötössy de Zepethnek* veranstaltete Ausgabe des Tentamen erschien in Budapest (Bd. 1 im Jahre 1897, Bd. 2 im Jahre 1904), eine solche des Appendix 1903 ebenda, beide als Festschrift zur Jahrhundertfeier (1902) des Geburtstages von *J. Bolyai.* In deutscher Sprache veröffentlichte *P. Stäckel* den größten Teil dieser und anderer Schriften der beiden *Bolyai* sowie eine sehr ausführliche, mit zahlreichen Literatur-Nachweisungen versehene Lebensbeschreibung in dem Werke „*Wolfgang und Johann Bolyai.* Geometrische Untersuchungen", 2 Teile, Leipzig und Berlin 1913. Eine deutsche Bearbeitung des Appendix gab auch *J. Frischauf* in seinem Buche „Absolute Geometrie. Nach J. Bolyai", Leipzig 1872.

Von *B. Riemann* ist dessen Schrift „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" zu erwähnen, die er bei seiner Habilitation in Göttingen im Jahre 1854 beim Kolloquium vorlas. Nach dem Tode des Verfassers wurde dieser Aufsatz von *R. Dedekind* neu herausgegeben in den Abhandlungen der Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen, Bd. 13 (1866/7), Göttingen 1868, S. 133—152; vgl. auch *B. Riemanns* gesammelte mathematische Werke, hrsgg. unter Mitwirkung von *R. Dedekind* von *H. Weber,* 2. Aufl., Leipzig 1892, S. 272—287.

Von *H. Helmholtz* ist zu nennen dessen Vortrag „Über die tat-

sächlichen Grundlagen der Geometrie“, Verhandl. des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg, Bd. 4, S. 197—206 [1866], nebst einem berichtigenden Zusatz Bd. 5, S. 31/2 [1868] oder Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 2, Leipzig 1883, S. 610—617; vgl. ferner die Abhandlung „Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen“, Nachr. von der kgl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Jahrg. 1868, S. 193—221, abgedruckt in dem eben erwähnten zweiten Bande der Wissensch. Abhandl., S. 618—639. Außerdem ist zu nennen der Vortrag „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ [1870], abgedruckt in *H. von Helmholtz* „Vorträge und Reden“, 5. Aufl., Bd. 2, Braunschweig 1903, S. 1—31; ein Zusatz hierzu ebenda S. 381—383.

Es würde zu weit führen, hier näher auf die umfangreiche Literatur über nicht-euklidische Geometrie einzugehen. Wir erwähnen noch die wichtige Abhandlung von *E. Beltrami* „Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea“, Giorn. di mat. 6 (1868), S. 284—312 oder Opere mat. Bd. 1, Mailand 1902, S. 374—405, außerdem eine Arbeit Annali di mat. (2) Bd. 2 (1868/9), S. 232—255 oder Opere mat. Bd. 1, S. 406—429, sowie die von *F. Klein* in Math. Ann. 6 (1873), S. 112—145 [1872] und 7 (1874), S. 531—537 veröffentlichte Fortsetzung der schon früher erwähnten Abhandlung in Bd. 4 der Math. Ann.; vgl. auch Bd. 37 (1890), S. 544—572. Noch sei bemerkt, daß *Beltrami* auch über die älteste, das elfte (richtiger fünfte) Axiom von *Euklid* betreffende Untersuchung berichtet hat. Diese findet sich in dem von *Hieronymus Saccheri* verfaßten, im Jahre 1733 in Mailand erschienenen Werke „Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia“. Dies Werk wurde von *Manganotti* wieder aufgefunden, und *Beltrami* berichtet über seinen Inhalt in den Rendiconti della r. accademia dei lincei (4) 5 (1889), S. 441—448; eine deutsche Übersetzung von Buch I des Werkes gaben *P. Stäckel* und *F. Engel* in ihrem Werke „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss“, Leipzig 1895, S. 41—136. *Saccheri* beweist: Ist in einem einzigen Dreieck der Ebene die Summe der Winkel gleich, größer oder kleiner als zwei Rechte, so gilt das entsprechende für jedes Dreieck. Diese Tatsache wurde später von *J. H. Lambert* wiedergefunden (Theorie der Parallellinien, im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, hrsgg. von *J. Bernoulli* und *C. F. Hindenburg*, 2. Stück, S. 137—164, 3. Stück, S. 325—358 [1786], abgedruckt auch in dem eben erwähnten Buche von *P. Stäckel* u. *F. Engel*, S. 152—208). Sie steht in engstem Zusammenhang mit einem Satze von *A. M. Legendre*, nach dem die Summe der Winkel eines Dreiecks niemals größer als zwei Rechte ist (Mém. acad. des sciences de l'Institut de France, Bd. 12, Paris 1833, S. 369); hieraus folgt wieder nach Legendre, daß die Summe der Winkel eines *jeden* Dreiecks zwei Rechte beträgt, wenn dies bei *einem* Dreieck der Fall ist.

Als Verfasser weiterer Abhandlungen über nicht-euklidische Geometrie seien genannt: *R. St. Ball*, *R. Beez*, *E. Beltrami*, *L. Bianchi*, *W. K. Clifford*, *M. Dehn*, *F. Engel*, *M. Grossmann*, *G. Hamel*, *F. Hausdorff*, *G. Hessenberg*, *D. Hilbert*, *J. Hjelmslev*, *W. Killing*, *F. Klein*, *H. Liebmann*, *R. Lipschitz*, *P. Mansion*, *S. Newcomb*, *L. Schlesinger*, *F. Schur*, *F. K. Schweikart* (1807), *M. Simon*, *P. Stäckel*, *E. Study*, *F. A. Taurinus* (1825), *J. de Tilly*.

Es seien noch einige Schriften genannt, die mehr oder weniger ausführlich im wesentlichen der Belehrung über das *Gesamtgebiet* der nicht-euklidischen Geometrie oder mit ihr in Beziehung stehender Teile

der Geometrie dienen. Einen Überblick über die Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, gibt *L. A. Sohncke* in dem Artikel „Parallel" in *Ersch* und *Gruber*, Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste, 3. Sektion, 11. Teil, Leipzig 1838, S. 368—384. Wir nennen ferner die autographierten Vorlesungshefte von *F. Klein* über „Nicht-Euklidische Geometrie" vom Wintersemester 1889/90 und Sommersemester 1890, ausgearbeitet von *Fr. Schilling*, 2. Abdruck Göttingen 1893. Der erste Teil dieser Vorlesungen enthält (S. 62—354) einen durch besondere Anschaulichkeit ausgezeichneten Überblick über den Inhalt der Schriften von *Gauss, Lobatschefskij, W. und J. Bolyai, Beltrami, Riemann, Helmholtz, Cayley* und über die eigenen Arbeiten. Eine sehr ausführliche Darstellung gibt auch *F. Lindemann* in seinen „Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von *A. Clebsch*", Bd. II, 1. Teil, Leipzig 1891, S. 433—637. Es seien noch genannt die Werke *W. Killing* „Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung", Leipzig 1885 (vgl. übrigens die Kritik dieses Buches in den zuvor erwähnten autogr. Vorlesungen von *F. Klein* über Nicht-Eukl. Geom. Bd. 1, S. 293—297) und „Einführung in die Grundlagen der Geometrie", 2 Bände, Paderborn 1893 und 1898; *S. Lie* „Theorie der Transformationsgruppen", 3. Abschnitt, unter Mitwirkung von *F. Engel* bearbeitet, Leipzig 1893, 5. Abteilung, S. 393—543. Einen Bericht über die hierher gehörigen Arbeiten von *Lie* gibt *F. Klein*, Math. Ann. 50 (1898), S 583—600 [1897]. Wir nennen ferner *G. Veronese* „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen", übersetzt von *A. Schepp*, Leipzig 1894; *D. Hilbert* „Grundzüge der Geometrie", 2. Aufl., Leipzig 1903, vgl. insbesondere Anhang III, S. 107 ff.; *H. Liebmann* „Nichteuklidische Geometrie" (Samml. Schubert Nr. 49), Leipzig 1905; *K. Th. Vahlen* „Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie", Leipzig 1905; *R. Bonola* „Die nicht-euklidische Geometrie", deutsche Ausgabe von *H. Liebmann*, Leipzig und Berlin 1908; *F. Schur* „Grundlagen der Geometrie", Leipzig und Berlin 1909, vgl. insbesondere § 5—8; *E. Study* „Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raum" (Bd. 54 der Sammlung „Die Wissenschaft"), Braunschweig 1914.

Näheres findet man auch in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, und zwar in den Artikeln von *F. Enriques* „Prinzipien der Geometrie", Bd. 3, 1. Teil, besonders S. 82—129 [1907] und von *G. Fano* „Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip", ebenda besonders S. 356—372 [1907]. Vgl. auch den Artikel von *J. Mollerup* im Repertorium der höheren Geometrie, hrsgg. von *H. E. Timerding*, 2. Aufl., 1. Hälfte, Leipzig und Berlin 1910, S. 505—534.

Ein von 1482 bis zum Jahre 1837 reichendes Literatur-Verzeichnis über „Absolute Geometrie" haben *P. Stäckel* und *F. Engel* in ihrem Werke „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss", Leipzig 1895, S. 293—313 gegeben, und das Verzeichnis wurde für die Zeit von 1839 bis 1902 fortgesetzt (über 900 Titel) von *R. Bonola* in der von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Klausenburg zur Jahrhundertfeier (1902) des Geburtstages von *J. Bolyai* herausgegebenen Festschrift „Ioannis Bolyai in memoriam", S. 81—154. Dieses Buch enthält außerdem den Facsimile-Druck und die lateinische Übersetzung eines von J. Bolyai an seinen Vater gerichteten Briefes, eine Abhandlung von *L. Schlesinger* über die Bedeutung der absoluten Geometrie für die Funktionentheorie und eine solche von *P. Stäckel* über den Teil der analytischen Mechanik, der sich auf

S. 260/1 [1860] und *J. Casey* ebenda S. 245/52 [1860] und Bd. 5 [1862], S. 318ff.; ferner Anm. 56 des vorliegenden Buches. Zum besonderen Studium ist zu empfehlen *A. F. Möbius,* Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung, Abh. kgl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Kl., Bd. 2 (1855), S. 529—595 oder Ges. Werke, Bd. 2, hrsgg. von *F. Klein,* Leipzig 1886, S. 243—314.

127) Nr. 406, S. 360. Dies bemerkte zuerst *W. Fiedler* in seinem Aufsatze „Die birationalen Transformationen in der Geometrie der Lage", Vierteljahrsschrift naturforsch. Ges. Zürich, 21 (1876).

128) Nr. 407, $_3$, S 364. Vgl. *J. Steiner*, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832, S. 305f., Aufg. 39 oder Ges. Werke, hrsgg. von *K. Weierstrass*, Bd. 1, Berlin 1881, S. 446 oder Ostwalds Klass. Nr. 83, hrsgg. von *A. J. von Oettingen,* Leipzig 1896, S. 136.

129) Nr. 408, S. 365. Das Entsprechen von Punkten in bezug auf das Büschel von Kegelschnitten entwickelte *J. Steiner* in dem eben angeführten Buche, S. 266ff. oder Ges. Werke 1, S. 417ff. und *L. J. Magnus*, J. reine angew. Math. 8 (1832), S. 51—63, sowie „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie", Berlin 1833, § 50 (S. 229ff.) und § 63 (S. 288ff.); für Beispiele vgl. *G. Bauer,* J. reine angew. Math. 69 (1868), S. 293—318 [1867]. Zur Theorie der quadratischen Transformation vgl. auch *A. Clebsch,* Vorlesungen über Geometrie, bearb. von *F. Lindemann,* Leipzig 1876, Bd. 1, S. 475/7; *K. Doehlemann,* Geometrische Transformationen (Sammlung Schubert Nr. 28), Leipzig 1908, S. 4ff.; *H. Grassmann,* Projektive Geometrie der Ebene, Bd. 2, Ternäres, 1. Teil, Leipzig und Berlin 1913, S. 378—380.

130) Nr. 409, S. 368. Die Methode des Entsprechens von Geraden in bezug auf ein Vierseit begründete *J. Steiner* „Systematische Entwickelung", S. 277ff. oder Ges. Werke, Bd. 1, S. 424ff.

131) Nr. 409, $_{1.\,2.\,3}$, S. 369. Die Analogie der Konstruktion der gemeinsamen Elemente zweier Polarsysteme mit der Auflösung der Gleichungen vierten Grades ist offenbar. *H. E. Timerding* (Nachr. kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-phys. Kl., Jahrg. 1900, S. 103/8) hat einen von *G. Darboux* (J. math. pures appl. (2) 18 (1873), S. 220—235) gegebenen Ansatz in dieser Richtung durchgeführt, so daß sich die Auflösung den Anwendungen der harmonischen Kegelschnitte anschließt; vgl. auch Anm. 93 in vorliegendem Buche sowie eine Arbeit von *W. S. Burnside,* Quart. J. pure appl. math. 10 (1870), S. 211/8 [1869]. *K. Lauermann* (Sitzgsb. Akad. Wien, 98, Abt. II^a, Jahrg. 1889, Wien 1890, S. 318—326 [1889]) und *F. Mertens* (ebenda S. 431—445 [1889]) haben, veranlaßt durch Abhandlungen von *O. Pelz* über das Normalenproblem der Kegelschnitte (Sitzgsb. Akad. Wien, 85, Abt. II (1882), S. 169/71 und 95, Abt. II (1887), S. 482—491), die Frage nach den Punkten der Ebene analytisch behandelt, für die die Bestimmung der vier an einen Kegelschnitt zu ziehenden Normalen auf quadratische, mit Zirkel und Lineal zu lösende Aufgaben zurückführbar ist. Sie fügen den von *Pelz* angegebenen Geraden zwei Kreise (für die Ellipse) hinzu. Vgl. auch *P. H. Schoute,* Sitzgsb. Akad. Wien, 98, Abt. II^a, Jahrg. 1889, Wien 1890, S. 1519—1526.

Die Anwendung auf das Problem der Normalen in B. 7 verdankte *W. Fiedler* einer Mitteilung von *L. Cremona.*

132) Nr. 410, S. 372. Für die geometrische Entwickelung der Methode der Projektion vergleiche man *W. Fiedler,* Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, 3. Aufl., 1. Teil, Leipzig 1883, 2. Teil 1885, 3. Teil 1888; 4. Aufl., 1. Teil, Leipzig

1904. Für die Anwendung auf die Theorie der Kegelschnitte kommen besonders Nr. 24—36 in Teil 1 in Betracht. Die involutorsiche Kollineation oder die Zentralkollineation mit $\Delta = -1$ findet man in Nr. 20 (3. Aufl., S. 81 ff., 4. Aufl., S. 94 ff.), ihre Anwendung auf die Theorie der Kegelschnitte in Nr. 30 ff. (3. Aufl., S. 148 ff., 4. Aufl., S. 169 ff.).

133) Nr. 411, S. 373. Vgl. das soeben angeführte Werk von *W. Fiedler*, Teil 1, Nr. 22 f und g (3. Aufl., S. 99—100, 4. Aufl., S. 116/7), sowie den Überblick A, der diese Sonderfälle auf die Reziprozität überträgt (3. Aufl., S. 116, 4. Aufl., S. 133 f.).

134) Nr. 413, S. 379. Die Verwendung der Projektion als Methode zur Entdeckung von Sätzen verdankt man *J. V. Poncelet,* Traité des propriétés projectives des figures, 1. Ausg., Paris 1822; 2. Ausg., Bd. 1, Paris 1865. Man kann dies Werk als grundlegend für die neuere Geometrie (in einem weiteren als dem üblichen Sinne des Wortes) bezeichnen. Für die Tiefe der geometrischen Einsichten von Poncelet ist die Fassung aufklärend, die er der Lösung der Aufgabe gibt: Zwei Kegelschnitte derselben Ebene sollen zugleich in Kreise projiziert werden, welches ist der Ort der Projektionszentra und welches ist die Lage der zugehörigen Projektionsebenen? (Siehe im Text S. 387 f.) Die Antwort von *Poncelet* lautet: Die gesuchten Projektionszentra liegen in ebensoviel Kreisperipherien als die gegebenen Kegelschnitte ideale gemeinsame Sehnen haben; diese Kreise werden je aus dem Mittelpunkt der idealen Sehne mit der Hälfte derselben als Radius in der Normalebene zu ihr beschrieben; die zugehörige Projektionsebene ist parallel der Verbindungsebene des Projektionszentrums mit der zugehörigen idealen Sehne (Traité des propriétés projectives des figures 1. Ausg., Paris 1822, Nr. 121, S. 60 f., 2. Ausg., S. 59; die Aufgabe ist in Ann. math. pures appl. 7 (1816/7), S. 128 gestellt worden).

Die gemeinsamen idealen Sehnen sind (an Zahl höchstens zwei) Verbindungslinien konjugiert imaginärer Schnittpunkte oder Geraden mit einerlei elliptischen Polinvolutionen. Der Mittelpunkt ist der Mittelpunkt der Involution, der Radius der Abstand ihres symmetrischen Paares von ihm.

Im Hinblick auf die rechnerischen Bemühungen zur Lösung bemerkt *Poncelet,* daß die offenbar gewordenen Schwierigkeiten in dem Umstande ihren Grund finden, daß der fragliche Ort durch eine Gleichung 12. Grades ausgedrückt wird, die in sechs Faktoren 2. Grades zerfällt.

135) Nr. 414, 4, S. 383. Vgl. das in Anm. 132 angeführte Werk von *W. Fiedler,* besonders Nr. 20, B. 14 und 15 (3. Aufl., S. 86—88, 4. Aufl., B. 14—17, S. 100—104).

136) Nr. 415, S. 384. Die Einführung gleichbenannter Brüche für Cartesisch-Plückersche Koordinaten zur Überführung der Gleichungen zwischen ihnen in homogene Form — wie bei *L. O. Hesse* (z. B. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene, 1. Aufl., Leipzig 1865, S. 98, 4. Aufl., hrsgg. von *S. Gundelfinger,* Leipzig 1906, S. 140) — ist also Übergang zur Untersuchung einer Projektion der ursprünglichen Figur an ihrer Stelle, sobald dieser Nenner als Veränderliche behandelt wird.

137) Nr. 416, S. 387. Vgl. das in Anm. 132 angeführte Werk von *W. Fiedler,* Nr. 11 (3. Aufl., S. 37 ff., 4. Aufl., S. 43 ff.) und besonders Nr. 14 f. (3. Aufl., S. 47 ff., 4. Aufl., S. 56 ff.) und wieder Nr. 18, 10 (3. Aufl., S. 74, 4. Aufl., S. 87). Man sieht, daß in vereinigten projektiven Gebilden erster Stufe die Symmetrischen der Doppelelemente in bezug auf die Gegen- oder Grenzelemente sich entsprechen. Für entsprechende

Eigenschaften der Strahlen- und Ebenenbündel vergleiche man Teil 3 des genannten Werkes, Nr. 71 (S. 481 ff. der 3. Auflage).

138) Nr. 418, S. 392. In der Geometrie der Alten betrachtete man *ursprünglich* die Kegelschnitte nur am geraden Kreiskegel und nur unter der Voraussetzung, daß die Schnittebene zu einer Seitenlinie des Kegels (der einen Seite des Achsendreiecks) rechtwinklig sei, d. h. daß MN rechtwinklig zu OB sei. Hiernach wurden die Kegelschnitte eingeteilt in Schnitte des spitzwinkligen, rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Kegels (Ellipse, Parabel, Hyperbel). *Apollonius* zeigte (um 225 v. Chr.), daß alle drei Kurven aus dem nämlichen — schiefen oder geraden — Kegel geschnitten werden können und legte ihnen aus dem in Nr. 192 (Teil 1, S. 370) angegebenen Grunde die Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel bei. Vgl. auch Anm. 59 in Teil 1, S. 450, sowie *F. Schur,* Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig 1898, S. 1—5.

139) Nr. 422, S. 395. Der Hauptsatz stammt von *G. P. Dandelin,* Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 2 (1822), S. 172. Man findet die Entwicklung bei *J. Steiner,* Vorlesungen über synthetische Geometrie, 1. Teil, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearb. von *C. F. Geiser,* 3. Aufl., Leipzig 1887, § 24, S. 174. Vgl. auch *O. Schlömilch,* Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maßes, 2. Teil, Geometrie des Raumes, Eisenach 1854, S. 110, 118/9, 121 und 131; *W. Fiedler,* Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, 3. Aufl., 2. Teil, Leipzig 1885, § 9, S. 59; *M. Chasles,* Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 2. Aufl., Paris 1875, S. 286/7, die erste Auflage aus dem Französischen übertragen von *L. A. Sohncke* unter dem Titel: Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit bezug auf die neueren Methoden, Halle 1839, S. 289.

140) Nr. 422, Fußnote S. 397. Vgl. *Mulcahy* „Principles of modern geometry", 2. Aufl., Dublin 1862.

141) Nr. 423, S. 398. Das Prinzip der Kontinuität stellte *J. V. Poncelet* in seinem in Anm. 134 genannten Hauptwerk auf (1. Ausg., S. XIIf., 67—70, 225/6, 414/6; 2. Ausg. bez. S. XIV, 65/8, 218/9, 405/8). Vgl. auch das in Anm. 139 genannte geschichtliehe Werk von *M. Chasles,* S. 199—200 in der französischen, S. 195/6 in der von *L. A. Sohncke* veranstalteten deutschen Ausgabe; ferner *E. Kötter,* Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847), Jahresber. deutsch. Math.-Ver. 5, Leipzig 1901, S. 121/2 und *A. Schönflies,* Projektive Geometrie, in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. III, 1. Teil, S. 395/7 [1909].

142) Nr. 425, $_8$, S. 403. Vgl. *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 45 (1853), S. 219 [1852] oder Ges. Werke, hrsgg. von K. Weierstrass, Bd. 2, Berlin 1882, S. 477/8.

143) Nr. 428, $_1$, S. 411. Dieser Beweis der Formel von *J. Mac Cullagh* (Dublin Exam. Papers 1836, S. 22) stammt von *Ch. Graves.*

144) Nr. 429, S. 412. Vgl. das in Anm. 132 erwähnte Werk von *W. Fiedler,* 3. Aufl., 1. Teil, Nr. 10, S. 31 oder 4. Aufl., 1. Teil, S. 36, für das Orthogonalsystem dasselbe Werk, 3. Teil, 3. Aufl., Nr. 74, S. 511f.

145) Nr. 429, S. 412. Der Ausdruck Orthogonalsystem findet sich auch bei *P. H. Zech,* Die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung. 1857.

146) Nr. 430, S. 414. Vgl. *A. F. Möbius,* Berichte der kgl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Kl., Bd. 10 (1858), S. 1 ff. oder Ges. Werke, Bd. 2, hrsgg. von *F. Klein,* Leipzig 1886, S. 329 ff.;

A. Cayley, Annali di mat. (2) 1 (1867), S. 132/4 oder als Annex II der Abhandlung „On polyzomal curves“, Trans. Roy. Soc. Edinburgh 25, Jahrg. 1868 [1867] oder Coll. math. papers, Bd. 6, Cambridge 1893, S. 568—570; Bd. 7, Cambridge 1894, S. 115.

147) Nr. 430 B., S. 416. Für die Ausdehnung auf die Konstruktion der Kreise, die drei gegebene Kreise unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, vgl. *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 1 (1826), S. 162 oder Ges. Werke, hrsgg. von *K. Weierstrass*, Bd. 1, Berlin 1881, S. 20f. oder Ostwalds Klass. Nr. 123, hrsgg. von *R. Sturm*, Leipzig 1901, S. 5; ferner *G. Darboux*, Ann. école normale sup. (2) 1 (1872), S. 323—392, besonders S. 377f.

148) Nr. 431, S. 416. Die Entwickelung der „Zyklographie“ als einer Methode der Untersuchung der Kreis- und Kugelsysteme knüpfte *W. Fiedler* an die Benutzung des Distanzkreises zur Festlegung des Zentrums in der Zentralprojektion. Vgl. *W. Fiedler* „Die Zentralprojektion als geometrische Wissenschaft“, Progr. Chemnitz 1860. Derselbe Verfasser hat den Gegenstand elementar dargestellt in seinem Werke „Zyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln“, Leipzig 1882. In Nr. 178—181 (S. 252—263) ist daselbst das im Text wiederholt behandelte System des Feuerbachschen Kreises im Dreieck zyklographisch erläutert und vervollständigt; nämlich durch das Quadrupel von Kreisen, das die Berührungskreise im Dreieck unter gleichen endlichen Winkeln schneidet und die vier Tripel Apollonischer Kreise, die zu jenen außer dem Feuerbachschen und den Dreiecks-Seiten noch gehören.

Weitere Anwendungen enthält das in Anm. 132 genannte Werk über darstellende Geometrie von *W. Fiedler*, besonders der zweite Teil. Es seien noch einige Anwendungen aus dem Gebiete der Kegelschnittsysteme angeführt, die die neueste Literatur bietet. Die Untersuchung der Auflösung der biquadratischen Gleichungen von *H. E. Timerding*, die schon in Anm. 131 erwähnt ist, läuft aus in das Studium eines dreifach unendlichen linearen Kegelschnittsystems und wird durch die eindeutige Zuordnung seiner Kegelschnitte zu den Punkten des Raumes anschaulich geführt; eine Fläche dritter Ordnung läßt die Beziehungen der Kegelschnitte des Systems unter sich und zu den sämtlichen Kegelschnitten der Ebene erkennen.

P. H. Schoute hat (Amsterdam, koninklijke Akad. van Wetenschappen, Verslagen van de Vergaderingen, Bd. 7 (1899)) direkt zyklographisch die Kreise von *F. Joachimsthal* (J. reine angew. Math. 26 (1843), S. 172ff.) aus der Normalentheorie des Kegelschnittes untersucht: Die Fußpunkte A, B, C, D der vier Normalen aus einem Punkte P liegen so, daß der Kreis durch drei von ihnen, z. B. B, C, D, auch durch den diametral entgegengesetzten A' des vierten geht. Mit der Bemerkung nämlich, daß dieser Kreis die Tangente des Kegelschnittes in A' noch im Fußpunkt ihrer Normale vom Mittelpunkt aus trifft, erkennt man sofort, daß die Kreise für alle Normalentripel aus Punkten der Normale in A ein Büschel mit reellen Grundpunkten bilden, das zyklographische Bild einer gleichseitigen Hyperbel mit ihnen als Scheitel und in der Normalebene zur Kegelschnittebene. Diese Hyperbeln erfüllen eine zur Kegelschnittebene orthogonalsymmetrische Fläche achter Ordnung, deren Untersuchung zu einfachen Ergebnissen über jenes Kreissystem führt.

Am gleichen Orte wie *P. H. Schoute* hat *J. de Vries* das System der Hauptkreise für die Kegelschnitte eines Büschels und eines Netzes, sowie für Schar und Gewebe mit denselben Mitteln untersucht.

149) Nr. 431, S. 417. Dies Mittel führt auch in den Fällen zum Ziel, wo die rein planimetrische Methode nicht direkt anwendbar bleibt, wie bei Kreisen mit einerlei Zentrale. Das wesentliche Fortbestehen derselben Konstruktion für die Kreise, die drei gegebene unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, hat *W. Fiedler* in seinem in Anm. 148 erwähnten Werke über Zyklographie, Nr. 126—131 (S. 169—177), gezeigt.

Nachtrag

zu dem im Jahre 1915 erschienenen ersten Teile des vorliegenden Buches.

Bei S. 443, Anm. 2 möge als weitere Literatur zur graphischen Darstellung von Funktionen und zum Koordinatenbegriff noch genannt werden: *H. Wieleitner* „Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme", Bibl. math. (3) 14 (1913/14), S. 193—243; die Festschrift der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, herausgegeben von *A. Krazer* „Zur Geschichte der graphischen Darstellung von Funktionen", Karlsruhe 1915 oder Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), S. 340—363; *H. Wieleitner* „Zur Erfindung der analytischen Geometrie", Zeitschr. math. naturw. Unterr., 47. Jahrg. (1916), S. 414—426 und eine Abhandlung desselben Verfassers über *Nikolaus Oresme* in der Zeitschrift „Natur und Kultur", 14. Jahrg. (1917), S. 529—536.

Nachtrag

zum vorliegenden zweiten Teile.

Zur Fußnote von S. 196: Die Summe der sechs Doppelverhältnisse ist auch deshalb gleich 3, weil sich die sechs Werte so gruppieren lassen, daß die Summe von je zweien gleich 1 wird; es ist nämlich

$$\lambda + (1 - \lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{\lambda}{\lambda - 1} = 1.$$

Berichtigungen

zu Teil I.

Auf Seite 145, unterste Zeile, hat das dem Gliede $+1$ vorausgehende Glied in der linken Spalte der Seite den Faktor v, in der rechten Spalte den Faktor y zu erhalten.

Seite 447, Zeile 4 von unten lies *Liouville* statt *Lionville.*